MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Concours de l'enseignement du second degré

Rapport de jury

Concours : 3e concours du CAPES
3e CAFEP-CAPES

Section : mathématiques

Session 2019

Rapport de jury présenté par : Loïc FOISSY
Professeur des universités
Président du jury

Conseil aux futurs candidats

Il est recommandé aux candidats de s'informer sur les modalités du concours.

Les renseignements généraux (conditions d'accès, épreuves, carrière, etc.) sont donnés sur le site du ministère de l'Éducation nationale de l'enseignement supérieur et de la recherche :

http://www.devenirenseignant.gouv.fr/

Le jury du CAPES externe de Mathématiques met à disposition des candidats et des formateurs un site spécifique :

http://capes-math.org/

L’épreuve écrite de cette session s’est tenue le 2 avril 2019.

Les épreuves orales se sont déroulées du 8 au 10 juin 2019, dans les locaux du lycée Frédéric Chopin de Nancy. Le jury tient à remercier chaleureusement monsieur le proviseur, monsieur le proviseur adjoint et monsieur le directeur délégué aux formations professionnelles et technologiques ainsi que l’ensemble des personnels du lycée pour la qualité de leur accueil. Que soient également remerciés pour leur grande disponibilité les personnels du Département des Examens et Concours de l’académie de Nancy-Metz, ainsi que les services de la Direction Générale des Ressources Humaines qui ont œuvré avec beaucoup de diligence pour que le concours ait lieu dans de bonnes conditions.

Nous tenons à remercier tout particulièrement messieurs Serge Aubert, François Avril et Yann Hermans pour la conception et la mise en œuvre du système **CAPES**OS, ainsi que pour leur implication sans faille tout au long du concours.

Table des matières

1 Présentation du concours

La forme et les programmes des épreuves du concours sont définis par l'arrêté du 19 avril 2013 fixant les sections et les modalités d'organisation des concours du certificat d'aptitude au professorat du second degré (MENH1310120A). Cet arrêté a été publié :

· au journal officiel de la République française nº 0099 du 27 avril 2013 ;
· sur le serveur SIAC2 dans le guide concours personnels enseignants, d'éducation et d'orientation des collèges et lycées.

2 Quelques statistiques

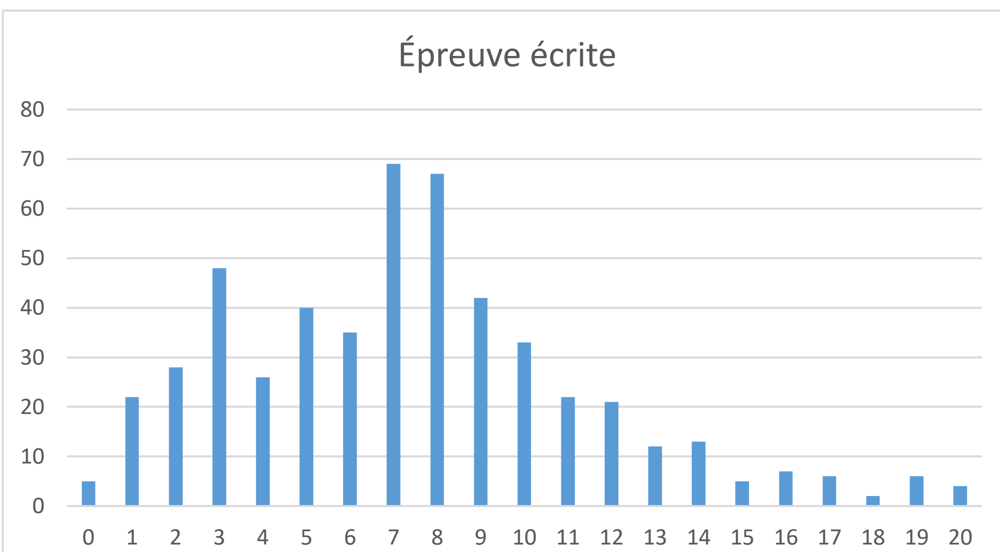
Les données suivantes concernent les concours du CAPES et du CAFEP réunis. Sauf mention contraire, les notes indiquées sont sur 20.

Répartition des notes : épreuve d'admissibilité

513 candidats se sont présentés à l'épreuve d'admissibilité : 431 pour le CAPES, 82 pour le CAFEP. Parmi eux, 5 ont été éliminés pour avoir obtenu la note 0. La barre d'admissibilité a été fixée à 6,6 pour le CAPES, ce qui a donné 225 admissibles et à 11 pour le CAFEP, ce qui a donné 15 admissibles.

Épreuve écrite

Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
6,93	4,10	3,89	6,77	9,16

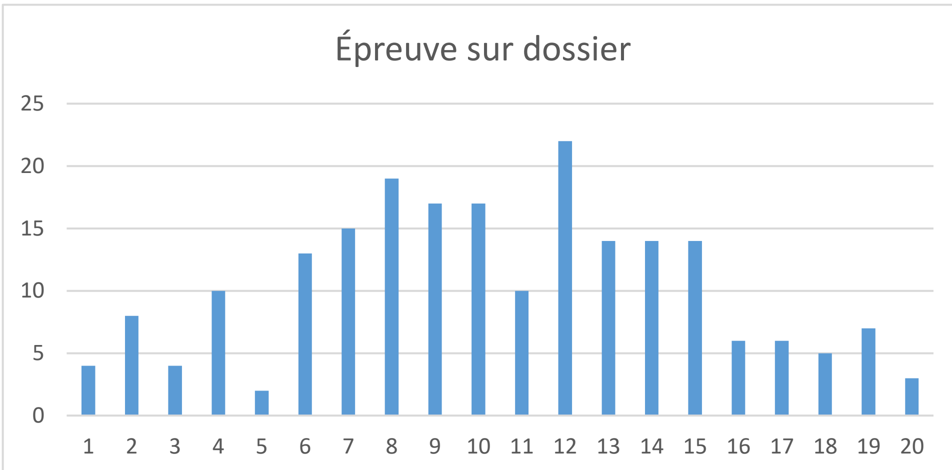


Répartition des notes : épreuve d'admission

Pour le CAPES, le jury a fixé la barre d'admission à 16,2/40, ce qui a permis de pourvoir 127 postes sur les 161 proposés. Pour le CAFEP, le jury a fixé la barre d'admission à 27/40, ce qui a permis de pourvoir les 7 postes proposés. 30 des 240 admissibles ne se sont pas présentés à l'épreuve orale. Ils ne sont pas comptabilisés dans les tableaux qui suivent.

Épreuve sur dossier

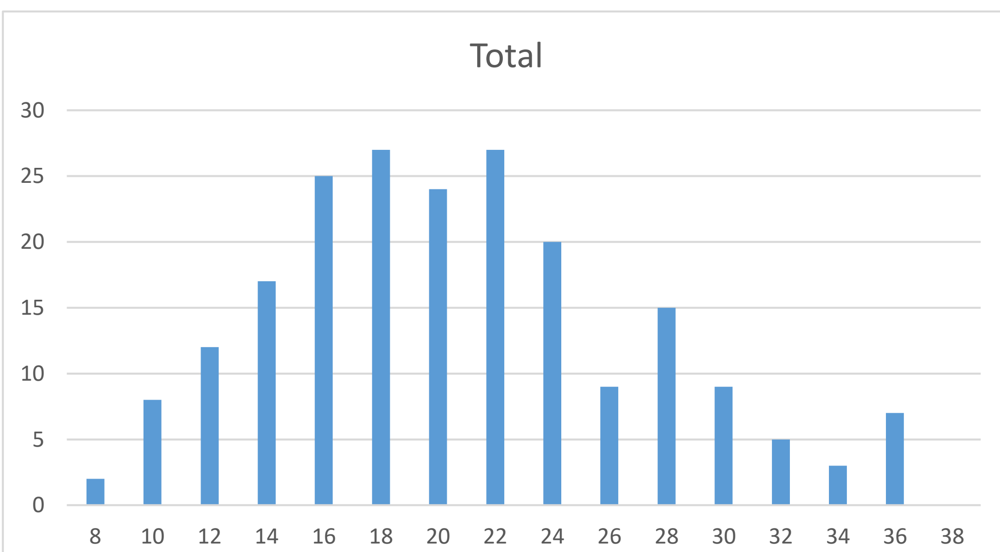
Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
9,91	4,58	6,77	9,72	13,28

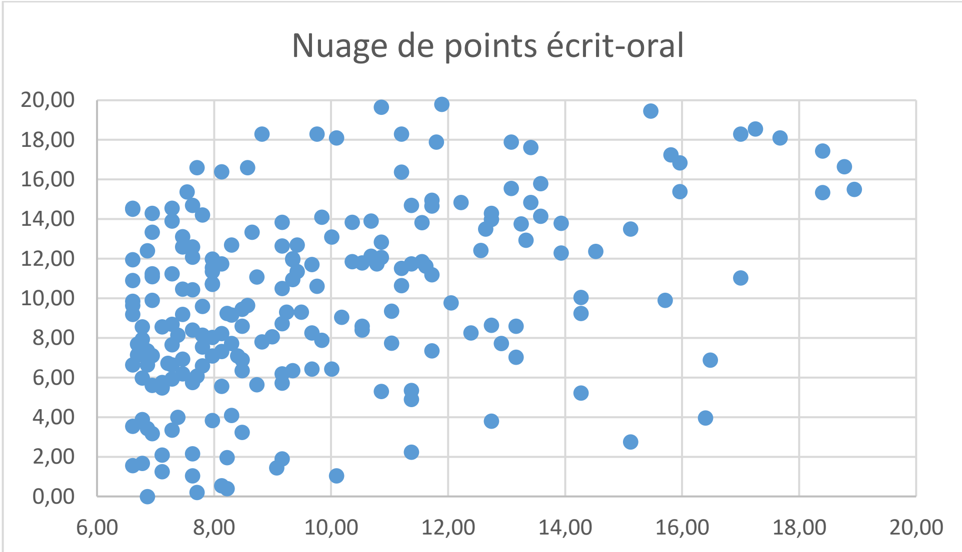


Répartition des notes : total

Note total (écrit et oral, sur 40)

Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
19,72	6,43	15,34	19,18	23,34





Sur ce nuage de points, les notes à l'épreuve d'admissibilité se trouvent en abscisse et les notes à l'épreuve d'admission en ordonnée.

Le coefficient de corrélation entre les épreuves écrite et orale est de 0,43.

Autres données

Les données suivantes concernent les concours du CAPES et CAFEP réunis. Elles ont été établies à partir des renseignements fournis par les candidats au moment de leur inscription.

	Inscrits		Présents		Admissibles		Admis	
Homme	842	60%	324	63%	156	65%	84	63%
Femme	557	40%	189	37%	84	35%	50	37%
Total	1399		513		240		134	

Académie	Inscrits		Présents		Admissibles		Admis	
AIX-MARSEILLE	78	5,58%	27	5,26%	9	3,75%	4	3,0%
AMIENS	35	2,50%	16	3,12%	6	2,50%	2	1,5%
BESANCON	21	1,50%	10	1,95%	5	2,08%	5	3,7%
BORDEAUX	61	4,36%	17	3,31%	7	2,92%	4	3,0%
CAEN	19	1,36%	10	1,95%	7	2,92%	5	3,7%
CLERMONT-FERRAND	9	0,64%	4	0,78%	2	0,83%	1	0,7%
CORSE	5	0,36%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,0%
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	312	22,30%	108	21,05%	56	23,33%	30	22,4%
DIJON	17	1,22%	5	0,97%	1	0,42%	0	0,0%
GRENOBLE	83	5,93%	31	6,04%	14	5,83%	5	3,7%
GUADELOUPE	8	0,57%	2	0,39%	1	0,42%	1	0,7%
GUYANE	14	1,00%	5	0,97%	0	0,00%	0	0,0%
LA REUNION	26	1,86%	13	2,53%	4	1,67%	3	2,2%
LILLE	96	6,86%	45	8,77%	24	10,00%	13	9,7%
LIMOGES	15	1,07%	2	0,39%	2	0,83%	1	0,7%
LYON	98	7,01%	36	7,02%	21	8,75%	14	10,4%
MARTINIQUE	9	0,64%	3	0,58%	0	0,00%	0	0,0%

MAYOTTE	8	0,57%	2	0,39%	1	0,42%	1	0,7%
MONTPELLIER	65	4,65%	18	3,51%	12	5,00%	6	4,5%
NANCY-METZ	26	1,86%	11	2,14%	5	2,08%	2	1,5%
NANTES	75	5,36%	28	5,46%	9	3,75%	6	4,5%
NICE	52	3,72%	18	3,51%	7	2,92%	5	3,7%
NOUVELLE CALEDONIE	4	0,29%	4	0,78%	1	0,42%	0	0,0%
ORLEANS-TOURS	30	2,14%	11	2,14%	4	1,67%	2	1,5%
POITIERS	19	1,36%	10	1,95%	5	2,08%	3	2,2%
POLYNESIE FRANCAISE	4	0,29%	2	0,39%	1	0,42%	1	0,7%
REIMS	16	1,14%	7	1,36%	3	1,25%	3	2,2%
RENNES	66	4,72%	19	3,70%	9	3,75%	6	4,5%
ROUEN	31	2,22%	11	2,14%	4	1,67%	0	0,0%
STRASBOURG	37	2,64%	15	2,92%	7	2,92%	3	2,2%
TOULOUSE	60	4,29%	23	4,48%	13	5,42%	8	6,0%
TOTAL	1399	100,00%	513	100,00%	240	100,00%	134	100,0%

PROFESSION	Inscrits		Présents		Admissibles		Admis	
AG NON TIT FONCT HOSPITAL	1	0,07%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
AG NON TIT FONCT TERRITORIALE	1	0,07%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	6	0,43%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
AGENT ADMI.MEMBRE UE(HORS FRA)	1	0,07%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
ARTISANS / COMMERCANTS	12	0,86%	6	1,2%	3	1,3%	2	1,49%
ASSISTANT D'EDUCATION	31	2,22%	15	2,9%	3	1,3%	3	2,24%
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	369	26,38%	119	23,2%	73	30,4%	41	30,60%
CERTIFIE	9	0,64%	1	0,2%	0	0,0%	0	0,00%
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	8	0,57%	3	0,6%	2	0,8%	2	1,49%
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	236	16,87%	95	18,5%	41	17,1%	21	15,67%
CONTRACTUEL APPRENTISSAGE(CFA)	3	0,21%	2	0,4%	1	0,4%	0	0,00%
CONTRACTUEL FORMATION CONTINUE	3	0,21%	2	0,4%	1	0,4%	1	0,75%
EMPLOI AVENIR PROF.2ND D.PRIVE	2	0,14%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	14	1,00%	6	1,2%	3	1,3%	1	0,75%
ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR	5	0,36%	1	0,2%	1	0,4%	0	0,00%
ETUD.HORS ESPE (PREPA CNED)	2	0,14%	1	0,2%	0	0,0%	0	0,00%
ETUD.HORS ESPE (PREPA MO.UNIV)	3	0,21%	2	0,4%	1	0,4%	1	0,75%
ETUD.HORS ESPE (PREPA PRIVEE)	3	0,21%	1	0,2%	0	0,0%	0	0,00%
ETUD.HORS ESPE (SANS PREPA)	12	0,86%	5	1,0%	4	1,7%	3	2,24%
ETUDIANT EN ESPE EN 1ERE ANNEE	39	2,79%	27	5,3%	22	9,2%	16	11,94%
ETUDIANT EN ESPE EN 2EME ANNEE	2	0,14%	1	0,2%	1	0,4%	1	0,75%
FONCT STAGI FONCT TERRITORIALE	1	0,07%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	41	2,93%	17	3,3%	7	2,9%	4	2,99%
INSTITUTEUR SUPPLEANT	2	0,14%	1	0,2%	0	0,0%	0	0,00%
MAITRE AUXILIAIRE	90	6,43%	41	8,0%	9	3,8%	3	2,24%
MAITRE DELEGUE	2	0,14%	1	0,2%	1	0,4%	0	0,00%
PERS ADM ET TECH MEN	3	0,21%	1	0,2%	0	0,0%	0	0,00%
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	10	0,71%	3	0,6%	2	0,8%	1	0,75%
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	1	0,07%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
PERS FONCT HOSPITAL	2	0,14%	1	0,2%	0	0,0%	0	0,00%
PERS FONCT TERRITORIALE	5	0,36%	2	0,4%	1	0,4%	0	0,00%
PERS FONCTION PUBLIQUE	8	0,57%	2	0,4%	1	0,4%	0	0,00%
PLP	7	0,50%	1	0,2%	0	0,0%	0	0,00%
PROF DES ECOLES STAGIAIRE	4	0,29%	1	0,2%	0	0,0%	0	0,00%
PROFESSEUR ECOLES	10	0,71%	4	0,8%	1	0,4%	0	0,00%

PROFESSIONS LIBERALES	43	3,07%	17	3,3%	9	3,8%	4	2,99%
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	69	4,93%	21	4,1%	7	2,9%	4	2,99%
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	152	10,86%	47	9,2%	15	6,3%	4	2,99%
SANS EMPLOI	166	11,87%	57	11,1%	27	11,3%	20	14,93%
SURVEILLANT D'EXTERNAT	2	0,14%	1	0,2%	0	0,0%	0	0,00%
VACATAIRE APPRENTISSAGE (CFA)	2	0,14%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	15	1,07%	7	1,4%	4	1,7%	2	1,49%
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	1	0,07%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
VACATAIRE FORMATION CONTINUE	1	0,07%	1	0,2%	0	0,0%	0	0,00%
TOTAL	1399	100%	513	100%	240	100,0%	134	100%

AGE	**Inscrits**		**Présents**		**Admissibles**		**Admis**	
20-24	7	0,5%	1	0,2%	0	0,0%	0	0,0%
25-29	53	3,8%	23	4,5%	12	5,0%	7	5,2%
30-34	193	13,8%	68	13,3%	34	14,2%	20	14,9%
35-39	303	21,7%	114	22,2%	58	24,2%	37	27,6%
40-44	319	22,8%	114	22,2%	51	21,3%	30	22,4%
45-49	278	19,9%	103	20,1%	46	19,2%	20	14,9%
50-54	147	10,5%	55	10,7%	18	7,5%	7	5,2%
55-59	79	5,6%	31	6,0%	19	7,9%	13	9,7%
60-64	19	1,4%	4	0,8%	2	0,8%	0	0,0 %
65-70	1	0,1%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0 %

	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Âge du plus jeune	22,6	23,4	25,5	25,9
Âge du plus âgé	65,0	63,7	63,7	59,8
Age moyen	42,6	42,5	42,3	41,6

3 Analyse et commentaires

Le sujet ainsi qu'un corrigé de l'épreuve écrite se trouve sur le site du jury http://capes-math.org/.

Épreuve écrite

Le sujet de la **deuxième épreuve d'admissibilité** est composé de deux problèmes indépendants.

Le premier problème porte sur les fonctions logarithmes. Il est composé de trois parties.

La partie A amène les candidats à justifier l'existence et l'unicité de fonctions logarithmes de base a définies comme solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{a}{x}$ avec $a \in \boldsymbol{R}$ et $y(0) = 1$, à démontrer leurs propriétés algébriques et à en faire l'étude. La partie B, qui peut être une activité de classe proposée en lycée, concerne le cas du logarithme décimal. Il s'agit de mettre en œuvre des propriétés algébriques dans trois situations contextualisées. Enfin, la partie C s'intéresse à deux méthodes d'approximation de $ln(2)$ et $ln(3)$ puis à une approximation de $ln(n)$ pour un entier $n > 1$.

Le second problème, composé de trois parties, porte sur une loi de composition interne dans **Q ⁺** : « la somme des cancres » et sur les suites de Farey.

La partie A étudie certaines propriétés de cette loi de composition interne, définie sur **Q ⁺,** de la façon suivante : deux fractions irréductibles $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ de **Q ⁺** étant données, $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. La partie B permet de déterminer le nombre d'éléments de toute suite de Farey d'ordre n, la suite de Farey d'ordre n, définie comme la suite des fractions irréductibles entre 0 et 1, rangées dans l'ordre croissant, dont le dénominateur est inférieur ou égal à n. Enfin, x et y étant deux termes consécutifs de cette suite, la partie C permet de construire la première fraction apparaissant entre x et y dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à n.

Ces deux problèmes permettent d'apprécier, outre les qualités scientifiques des candidats, leur aptitude à se placer dans une optique professionnelle, notamment avec des références explicites aux pratiques d'un élève de terminale scientifique (problème 1, B.XII).

Le jury a prêté une attention particulière aux compétences suivantes.

— **Limites de la fonction ln aux bornes de son domaine (problème 1)**

Environ 2,9 % des candidats ont répondu correctement à cette question ; environ 79,2 % des candidats n'ont pas répondu correctement à cette question ou de manière incomplète ; environ 17,9 % des candidats n'ont pas abordé la question. Environ 3,6 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

— **Applications des propriétés de la fonction logarithme décimal (problème 1) :**

En arithmétique (nombre de chiffres d'un entier en numération décimale)

Environ 16,1 % des candidats ont validé cet item (question B XII 1.) ; 49,3 % des candidats n'ont pas validé cet item ou de manière incomplète ; environ 43,6 % des candidats n'ont pas traité cette question. Environ 28,6 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

Dans une situation contextualisée (intensité sonore)

Environ 8,3 % des candidats ont validé cet item (question B XII 2b.) ; 65,4 % des candidats n'ont pas validé cet item ou de manière incomplète ; environ 26,3 % des candidats n'ont pas traité cette question. Environ 11,2 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

Dans une situation contextualisée (suite géométrique)

Environ 14,9 % des candidats ont validé cet item (question B XII 3.) ; 50,9 % des candidats n'ont pas validé cet item ou de manière incomplète ; environ 34,2 % des candidats n'ont pas traité cette question. Environ 22,7 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

— **Arithmétique : propriété d'égalité de deux PGCD (problème 2)**

Environ 8,3 % des candidats ont répondu correctement à la question (question A I.) ; environ 52,5 % des candidats n'ont pas répondu correctement à la question ou de manière incomplète ; environ 39,3 % des candidats n'ont pas abordé la question. Environ 13,6 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

— **Logique : établir une équivalence (problème 2)**

Environ 9,2 % des candidats ont répondu correctement à la question A IV 1. ; environ 65,8 % des candidats n'ont pas répondu correctement à la question ou de manière incomplète ; environ 25 % des candidats n'ont pas abordé la question. Environ 12,3 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

— **Logique : raisonnement par l'absurde (problème 2)**

Pour valider cet item, il était attendu que le candidat réponde correctement à l'une des questions suivantes : C XIII 1. 2. ou 3. ou C XIV 2c. ou 2h. Environ 3,5 % des candidats ont validé cet item ; environ 32,6 % des candidats n'ont pas validé cet item ou de manière incomplète ; environ 63,9 % des candidats n'ont traité aucune des questions examinées. Environ 9,8 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

Dans l'ensemble des copies, des compétences ont été régulièrement manifestées comme la mise en œuvre de raisonnements par récurrence, la maitrise du calcul intégral, la preuve d'une équivalence par double implication, les propriétés des séries alternées.

En revanche, d'autres compétences révèlent un degré de maîtrise insuffisant, comme en témoignent les maladresses ou erreurs suivantes : la confusion entre f et $f(x)$, le manque de rigueur dans les calculs avec des inégalités, l'oubli de vérifications liées aux existences de limite, de primitive…, le recours à des propriétés sans vérifier les hypothèses, l'absence ou l'utilisation erronée de quantificateurs. Les enchaînements logiques entre deux assertions ou entre deux inégalités ainsi que le passage à la limite dans une inégalité… sont souvent absents ou traités de façon peu rigoureuse. De même, les symboles ⇔ ou ⇒ sont souvent utilisés avec légèreté et de manière non maitrisée, le symbole ⇒ étant parfois confondu avec « donc ».

De plus, le jury déplore le manque de soin de certaines copies : écriture illisible, fautes d'orthographe, absence de numérotation et un manque de rigueur dans les notations mathématiques.

Problème 1

Beaucoup de candidats n'ont pas compris que l'objectif de la partie A était de démontrer, à partir de la définition donnée, l'existence, l'unicité et certaines propriétés des fonctions logarithmes de base a, sans avoir recours aux propriétés connues de la fonction logarithme népérien. Dans la question A I, si l'unicité est bien justifiée, de nombreux candidats n'ont pas établi l'existence. Par ailleurs, la condition d'existence d'une primitive d'une fonction sur un intervalle semble mal connue. De même, la dérivabilité de la fonction $x \mapsto f_a(xy)$ est très peu voire pas du tout mentionnée ni justifiée. Concernant la limite en $+\infty$ de la fonction ln, trop de candidats affirment qu'une fonction croissante et positive admet comme limite $+\infty$ en $+\infty$. Enfin, en A VIII, l'argument de continuité est peu mis en avant pour justifier la bijection.
Concernant la partie B, un nombre significatif de candidats ne prennent pas en compte le fait que la rédaction doit être accessible à des élèves de terminale, cette rédaction devant pour autant rester précise et rigoureuse. À la question B XII 3., une modélisation par une suite géométrique est attendue mais ne semble pas maitrisée.

Dans la partie C, si les candidats montrent une maitrise satisfaisante du calcul intégral, l'encadrement d'une somme par des intégrales ainsi que les majorations d'intégrales ne sont pas correctement traités (non prise en compte de l'ordre des bornes). Plusieurs candidats ont manipulé des sommes infinies sans prendre de précaution. Par ailleurs, des raisonnements par récurrence (bien rédigés) ont été utilisés quand il était possible de s'en passer. Enfin, les dernières questions concernant les approximations de $ln(2)$, $ln(3)$ et $ln(n)$ ont été très peu abordées.

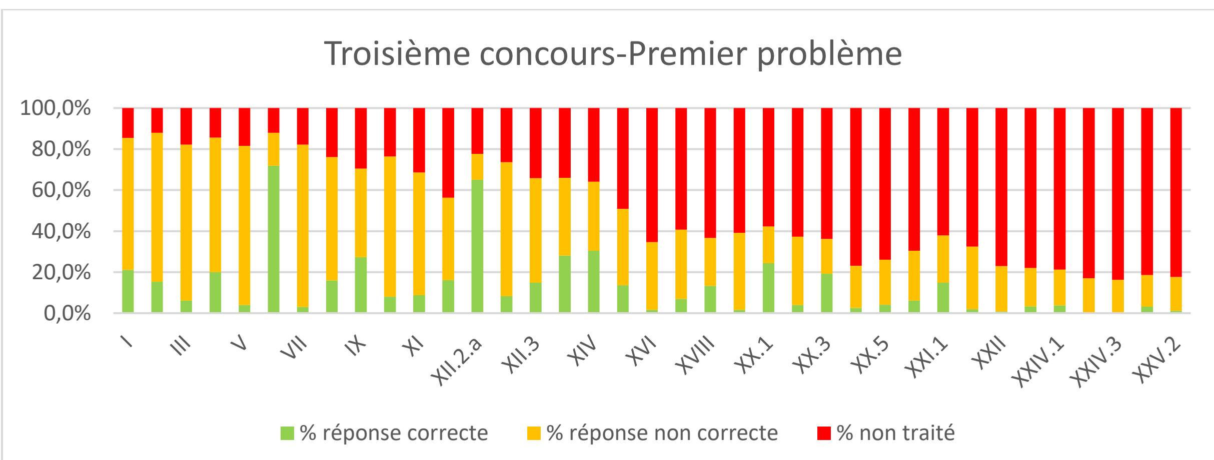
Problème 2

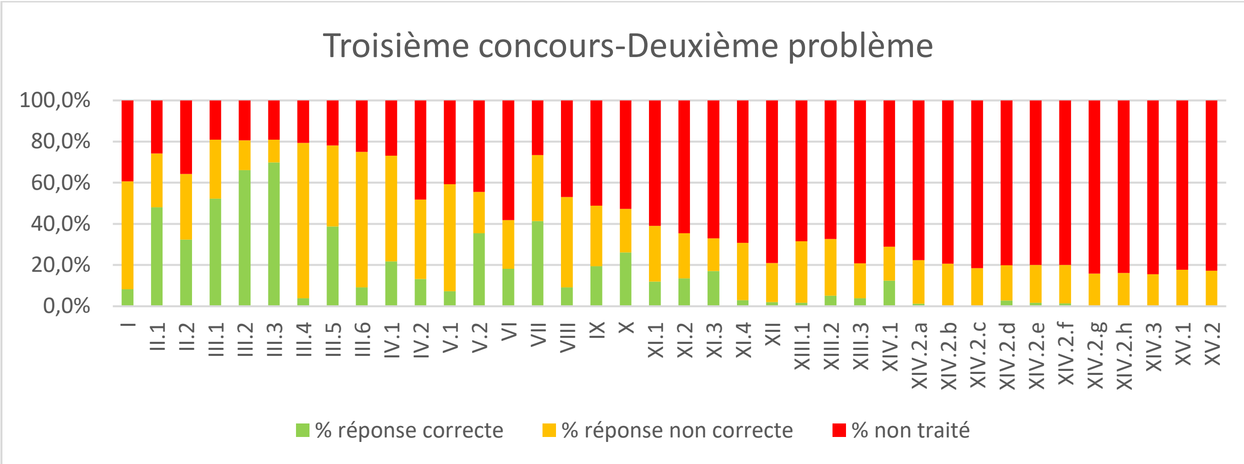
Le problème 2 débute par une démonstration classique et élémentaire de terminale spécialité mathématiques qui a pourtant été très mal réussie et non traitée par 40 % des candidats. Beaucoup se sont contentés de montrer que : $pgcd\ (a\ ;\ b)$ divise $pgcd\ (a\ ;\ a+nb)$. Concernant la *somme des cancres*, la question III a été globalement bien réussie même si le recours à des contre exemples reste inégal d'un candidat à l'autre. En revanche, le caractère irréductible des FFI (Formes Fractionnaires Irréductibles) n'a pas été suffisamment pris en compte et exploité, des candidats ne faisant pas la différence entre une écriture fractionnaire et la FFI. En fin de partie A, le traitement des questions de géométrie révèle la méconnaissance des candidats relative aux droites remarquables du triangle : confusion avec médiatrice, hauteur…

Dans la partie B, la première question consistant à donner les premières suites de Farey a été plutôt bien réussie excepté certains candidats qui n'ont pas rangé les fractions dans l'ordre croissant. Dans la question VIII, le sens direct de l'équivalence a été bien mieux traité que la réciproque.

La partie C, hormis quelques questions triviales (XIV 1., par exemple), a été très peu abordée.

Les diagrammes suivants décrivent les réussites des candidats, question par question :





La réussite à l'**épreuve écrite** nécessite que la préparation des candidats prenne en compte les éléments suivants :

· maîtriser et énoncer avec précision, lorsqu'elles sont utilisées, les connaissances mathématiques de base, indispensables à la prise de recul sur les notions enseignées ;
· rédiger clairement et de manière rigoureuse une démonstration simple, ce qui est une composante essentielle du métier de professeur de mathématiques ;
· exposer avec toute la précision voulue, en mentionnant clairement les étapes successives, les raisonnements, plus particulièrement ceux qui relèvent du collège ou du lycée.

On rappelle aussi l'importance du respect des notations, de la nécessité de conclure une argumentation, mais aussi l'intérêt de la lisibilité d'une copie.

Épreuve orale

La nature de l'épreuve

L'épreuve orale d'admission est une épreuve sur dossier : elle s'appuie sur des éléments fournis par le jury portant sur un thème des programmes de mathématiques du collège, du lycée général et du lycée technologique. Ce thème est illustré par un exercice qui peut être complété par des productions d'élèves ou des extraits des programmes officiels, des documents ressources ou des manuels. Cette épreuve commence par l'exposé des réponses à trois questions (comprenant notamment la présentation motivée d'exercices sur le thème du dossier). Elle se poursuit par un entretien avec le jury prenant appui sur le dossier fourni et l'exposé présenté. On cherche notamment à évaluer la capacité du candidat à engager une réflexion pédagogique pertinente ainsi qu'à communiquer efficacement et clairement. L'épreuve orale s'achève par un dernier échange avec le candidat sur les compétences professionnelles développées lors de ses expériences professionnelles précédentes et transposables au métier d'enseignant. Cela est aussi l'occasion d'évaluer la capacité du candidat à prendre en compte les acquis et les besoins des élèves, à se représenter la diversité des conditions d'exercice de son métier futur, à en connaître de façon réfléchie le contexte de travail dans différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) ainsi que les valeurs qui le portent, dont celles de la République.

Lors de cet oral et compte tenu de la diversité des compétences professionnelles attendues chez un enseignant de mathématiques, les attentes du jury sont multiples et l'évaluation des candidats prend en compte des critères nombreux et variés, plus particulièrement :

· Maîtrise (compétences mathématiques)
· Organisation et clarté (compétences pédagogiques)

· Pertinence et niveau (compétences mathématiques et pédagogiques)
· Réactivité (compétences mathématiques et professionnelles)

Quelques remarques, éclairages et conseils sur l'épreuve orale sont donnés ci-dessous. Ils visent notamment à favoriser le travail de préparation de tout candidat à cette épreuve orale du concours.

Concernant la forme de l'exposé

Le vidéoprojecteur est utilisé par de nombreux candidats dans des cadres variés : présentation de l'exposé, présentation d'une application obtenue à l'aide d'un outil logiciel, captures d'écran d'exercices issus des manuels numériques mis à disposition dans le cadre du concours... Dans le cadre de la préparation, il y a lieu d'avoir une réflexion sur la réalité de la plus-value apportée par l'emploi d'un vidéoprojecteur ainsi que sur l'articulation nécessaire entre le support vidéo-projeté, les traces écrites portées au tableau et la prestation orale. Les candidats qui choisissent de présenter leur exposé au moyen d'un document numérique projeté (ce qui n'est ni obligatoire, ni interdit) doivent prendre conscience que ce document sera projeté et lu par des personnes se situant à au moins trois mètres de l'écran ; il convient donc d'éviter les documents composés avec des caractères de trop petite taille.
De façon générale, les candidats ont une bonne posture face au jury et s'expriment oralement dans un français très correct (d'autant plus lors de la mise en valeur de l'expérience professionnelle). Pour la grande majorité des candidats, le ton employé est posé, calme, avec une élocution claire et une présentation dynamique. De façon globale, le temps de présentation apparaît plutôt bien géré : il est important de s'organiser pour disposer d'un temps suffisant pour traiter chacune des trois questions de l'exposé. Un nombre limité de candidats ont tendance à consacrer trop de temps à l'analyse des productions d'élèves, et cela au détriment des deux autres questions dont notamment celle de présentation motivée d'exercices sur le thème du dossier.
La grande partie des candidats gèrent bien l'utilisation de leurs notes personnelles lors de l'exposé devant la commission : ils ont recours à leurs notes de façon discrète, adaptée et parcimonieuse, ce qui rend l'exposé plus vivant.
L'utilisation du tableau reste souvent perfectible, voire défaillante. Il convient d'avoir une organisation du tableau qui soit claire et organisée, le tableau pouvant être effacé au cours de l'exposé si besoin est.

Concernant le fond de l'exposé et de l'entretien avec le jury

L'analyse des productions d'élèves est globalement assez satisfaisante et pertinente, même si l'accompagnement proposé ne l'est pas toujours. Il y a aussi une volonté notable de repérer et mettre en valeur les points positifs dans les productions des élèves. Quelques candidats ne lisent pas complètement et précisément les productions d'élèves : au cours de l'interrogation par le jury, ils découvrent alors qu'ils ont mal interprété les productions d'élèves, et cela souvent par manque d'attention et de réflexion lors de la préparation. Au-delà de montrer les erreurs contenues dans les productions d'élèves fournies, il convient d'approfondir ces erreurs et d'identifier avec précision leur origine (par exemple la faute de raisonnement commise). De même, il conviendrait également d'avoir des idées de pistes de remédiation à proposer en regard de certaines « erreurs » d'élèves.

Par ailleurs, la majorité des candidats parvient à traiter l'exercice proposé dans le dossier. Toutefois, par manque de temps, d'efforts, d'application ou de maîtrise, la rédaction de cette correction manque trop souvent de rigueur, de précision, d'articulations ou de détails. Il s'agit de présenter et d'écrire la correction de l'exercice telle qu'elle pourrait idéalement être présentée devant une classe et écrite dans un cahier d'élève. En particulier, il convient donc d'employer un vocabulaire mathématique précis et adéquat et de présenter un raisonnement correctement articulé avec des notations justes. La correction de l'exercice peut être judicieusement diversifiée, par exemple en évoquant d'autres démarches possibles que celle présentée ou en établissant un lien avec d'autres problèmes ou d'autres contextes.

Les exercices proposés par le candidat restent trop souvent basiques : ils sont relativement pauvres, peu pertinents et peu originaux, et cela quand ils ne sont pas hors sujet. Les exercices restent encore souvent trop proches de l'exercice du dossier, même s'il peut être intéressant de proposer un travail de « remédiation » à l'éclairage de problèmes rencontrés dans les productions d'élèves (cela ne saurait suffire toutefois pour l'illustration d'un thème dans sa généralité). Par ailleurs, les exercices proposés par le candidat ne sont pas systématiquement cherchés lors du temps de préparation. Il est important de sélectionner, étudier et chercher à résoudre ces exercices avec soin lors du temps de préparation. De plus, les candidats parviennent encore trop peu à motiver avec précision le choix des exercices opéré.

Concernant l'échange autour de l'expérience professionnelle acquise et de la projection dans le métier d'enseignant

De façon générale, les candidats sont plutôt performants sur la valorisation de leur expérience professionnelle et la mise en relation avec les compétences professionnelles enseignantes, avec une réelle réflexion sur les compétences développées et transposables au métier projeté. Les réponses sont souvent construites et argumentées, laissant percevoir une forte motivation et un réel questionnement dans la réorientation professionnelle projetée. La concision, la sincérité et la rigueur de cette présentation peuvent augurer des qualités d'un futur enseignant. Les oraux menés ont été l'occasion de percevoir la diversité et la richesse des expériences professionnelles précédentes (ingénierie, finance, santé, formation d'adultes…) et des compétences afférentes développées.

Un nombre limité de candidats fait le choix d'une description linéaire de l'expérience professionnelle acquise, sans mettre cette dernière en perspective avec le métier d'enseignant. Quelques candidats ont encore une vision bien trop parcellaire du métier d'enseignant ou restent sur des lieux communs ou des poncifs.

Pour favoriser la prise de recul, une immersion en établissement scolaire a été réalisée par plusieurs candidats. Cette expérience a souvent été mise à profit pour conforter le choix de réorientation professionnelle, connaître quelques grandes lignes sur le système éducatif et le fonctionnement d'un établissement scolaire et ainsi mieux appréhender la diversité et la complexité des missions assurées par un enseignant. Cette prise de recul peut aussi être favorisée par un travail de réflexion autour du référentiel de compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation publié au Bulletin Officiel n°30 du 25 juillet 2013.

Quelques points spécifiques

- *Concernant la maîtrise des contenus mathématiques*

De façon générale, une réelle maîtrise des contenus mathématiques des candidats est attendue. Le jury ne peut pas se contenter de réponses vagues et imprécises ou d'approximations dans le vocabulaire mathématique (telle que, par exemple, la confusion entre un point du plan muni d'un repère et les coordonnées de ce point dans le repère).
Le jury attend des candidats qu'ils sachent écrire correctement une définition ou un théorème au tableau, et cela avec des énoncés correctement quantifiés (il ne s'agit pas, bien entendu, d'introduire des quantificateurs à tout propos, mais simplement de savoir s'en servir au moment opportun). À titre d'exemple, des candidats ont été parfois dans l'embarras pour donner une définition correcte de la croissance d'une fonction réelle sur un intervalle.

- *Concernant les manuels numériques*

L'utilisation des manuels numériques mis à disposition est possible mais le candidat doit faire preuve d'un minimum d'esprit critique et de prise de recul vis-à-vis de ces ressources. Certains manuels comportent des maladresses, voire des inexactitudes ou des erreurs parfois significatives. Il est à noter que les manuels ne constituent pas la seule source possible. En effet, les documents d'accompagnement ou les autres ressources disponibles sur le site EDUSCOL peuvent fournir bien des idées intéressantes. Lors de sa préparation en amont du concours, il peut être pertinent de travailler sur un nombre limité de ressources, judicieusement choisies et utilisées.

- *Concernant les outils logiciels*

D'une manière générale, le jury a apprécié l'utilisation des outils logiciels, visiblement bien maîtrisés par une majorité de candidats, notamment en termes de logiciel de géométrie dynamique ou de tableur (à noter que le logiciel GeoGebra est un logiciel de géométrie *dynamique* et qu'il est encore bien souvent utilisé de manière trop statique). Tout candidat au concours se doit aussi de maîtriser un logiciel de programmation. Il est à noter que les candidats ont une propension certaine à se limiter au(x) logiciel(s) utilisé(s) dans le sujet proposé lors du temps de correction de l'exercice ou de présentation d'exercices sur le même thème que le dossier, alors que, dans certains cas, d'autres logiciels non évoqués dans le sujet peuvent être judicieusement employés pour enrichir l'exposé.

Quelques conseils aux candidats

En complément de ceux déjà formulés ci-dessus, quelques conseils peuvent être donnés aux futurs candidats :

- bien connaître le format et les modalités de déroulement de l'épreuve (dans ce cadre et au-delà du présent rapport, on peut encourager les candidats à assister à quelques oraux du concours quand cela est possible) ;
- accorder une importance toute particulière à la précision et à la rigueur dans le vocabulaire mathématique employé, et cela tout au long de l'interrogation orale (par exemple, $f(x)$ ne désigne pas une fonction mais désigne l'image du réel x par la fonction f) ;
- opérer un choix judicieux d'exercices qui répondent clairement aux objectifs fixés par le sujet, avec une motivation du choix opéré ;
- maîtriser une bibliographie d'exercices intéressants à proposer et à exploiter à l'oral, et cela sur différents thèmes et avec une réflexion approfondie, tant sur un plan pédagogique que didactique (dans ce cadre, il est intéressant de travailler avec un nombre limité de ressources bien choisies et maîtrisées, et cela tant en amont du concours que lors du temps de préparation de l'interrogation orale) ;
- être capable de rédiger une correction détaillée, rigoureuse, articulée d'un point de vue logique laissant apparente la démarche de résolution, et plus généralement être capable de produire au tableau des écrits élaborés et rigoureux.

Au sujet de CAPES**OS**

L'usage de l'outil informatique au cours de la session 2019 confirme la bonne préparation des candidats au système **CAPES**OS ainsi que sa pleine adoption.

Quelques utilisations singulières ont cependant pu être observées et suggèrent alors les remarques suivantes :

- Il relève de la responsabilité des candidats de sauvegarder les travaux qu'ils souhaitent présenter devant le jury. Ainsi le simple fait de laisser les logiciels ouverts en salle de préparation ne suffit pas à retrouver leurs productions en salle d'interrogation.
- Le système **CAPES**OS bénéficie des associations de type de fichier, il convient donc de conserver les bonnes extensions lors de la sauvegarde de ses fichiers pour en faciliter l'ouverture. Dès lors,

par exemple, une image sauvegardée au format png mais enregistrée avec l'extension odt s'avèrera délicate à ouvrir.

- Les candidats doivent, au sein de certains logiciels, porter attention au mode dans lequel ils travaillent : radians ou degrés. Il convient aussi de savoir passer d'un mode à l'autre.
- Certains candidats masquent accidentellement la barre d'outils mathématiques de leur traitement de texte. Il serait opportun de savoir l'afficher à nouveau en cas de besoin.
- Par ailleurs, il est déconseillé de poser des objets sur le clavier de l'ordinateur. Par exemple, les effets d’un livre posé sur un coin du clavier (en particulier sur la touche Ctrl) peuvent être fort déroutants pour les candidats.

Nous rappelons enfin aux candidats qu'il est de leur responsabilité de savoir utiliser les logiciels et l'environnement de travail mis à leur disposition pendant les épreuves orales du concours.

4 Annexe : ressources diverses

Les sujets des épreuves écrites sont disponibles sur le serveur SIAC2 et sur le site du concours.

La liste des sujets de l'épreuve de mise en situation professionnelle est publiée chaque année, bien avant la tenue des épreuves. Cette liste est disponible sur le site du concours, dans la rubrique épreuves orales, puis dans la rubrique archives.

Les sujets de l'épreuve sur dossier ne sont publiés sur le site du concours qu'après la session, en page d'accueil, puis dans la rubrique archives du concours.

Pendant le temps de préparation de chaque épreuve orale, les candidats ont à leur disposition des ressources numériques de diverses natures : textes réglementaires, ressources d'accompagnement des programmes, logiciels, manuels numériques. On trouvera la liste de toutes ces ressources sur le site du concours, rubrique des épreuves orales.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A : logarithme de base a

Rappel. On appelle *logarithme* toute fonction f définie sur $]0, +\infty[$, dérivable, telle que :
- il existe un nombre réel a non nul tel que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{a}{x}.$$

- $f(1) = 0$.

I. Soit a un nombre réel non nul. Justifier qu'il existe un unique logarithme, que l'on notera f_a, tel que, pour tout nombre réel $x > 0$, $f_a'(x) = \frac{a}{x}$. Lorsque $a = 1$, on utilise la notation ln (logarithme néperien).

II. Pour tout nombre réel a non nul, exprimer f_a à l'aide de ln.

III. Montrer que, pour tout nombre réel a non nul, tous nombres réels $x, y > 0$,

$$f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y).$$

Indication : on pourra étudier la fonction définie par $x \mapsto f_a(xy)$.

IV. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$,

$$f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x).$$

V. Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel. Montrer que $f_a(x^r) = r f_a(x)$.
Indication : on pourra commencer par le cas où r est un entier naturel, puis celui où r est un entier relatif, avant de conclure dans le cas où r est un nombre rationnel.

VI. Montrer que la fonction ln est strictement croissante.

VII. Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 de la fonction ln.

VIII. Montrer que la fonction ln est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

IX. Comment peut-on généraliser les résultats des questions VI. et VIII. au cas des logarithmes f_a ?

Partie B : logarithme décimal

X. Montrer qu'il existe un unique logarithme f_a tel que $f_a(10) = 1$. Ce logarithme est noté Log et est appelé logarithme décimal.

XI. Soit N un nombre entier naturel dont l'écriture en base dix possède n chiffres. Déterminer la partie entière de $\text{Log}(N)$.

XII. Les exercices suivants sont proposés à une classe de terminale scientifique :

> **1.** Combien le nombre 4^{2019} possède t-il de chiffres ?
>
> **2.** Le niveau sonore L (en dB) s'exprime en fonction de l'intensité I (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) selon la formule
> $$L = 10\,\text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$
> où $I_0 = 10^{-12}\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ correspond à l'intensité sonore minimale à laquelle l'oreille est sensible pour un son de fréquence 1000Hz.
>
> **a.** Calculer le niveau sonore correspondant à une intensité sonore de $10^{-5}\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.
>
> **b.** Quel est l'effet sur l'intensité sonore d'une augmentation du niveau sonore de 10dB ?
>
> **3.** Une balle lancée d'une hauteur de 2m atteint après chaque rebond 70% de sa hauteur précédente et cesse de rebondir quand sa hauteur n'excède pas 1mm. Au bout de combien de rebonds cela se produira-t-il ?

Pour chacun de ces trois exercices, présentez une rédaction de la solution, telle que vous l'exposeriez à une classe de terminale scientifique.

Partie C : calcul approché de valeurs du logarithme népérien

XIII. Montrer que pour tout nombre réel $x \neq -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

XIV. En déduire que pour tout nombre réel $x > -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t.$$

XV. On suppose que $x \geqslant 0$. Montrer que

$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

XVI. On suppose que $-1 < x \leqslant 0$. Montrer que

$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

XVII. En déduire que, si $-1 < x \leqslant 1$, la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est convergente et que sa somme vaut $\ln(1+x)$. On pourra raisonner par disjonction de cas.

XVIII. Justifier que la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ diverge lorsque $|x| > 1$.

XIX. À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur de n pour laquelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-8} près pour :

1. $x = \dfrac{1}{3}$.

2. $x = \dfrac{1}{8}$.

3. $x = 1$.

XX. **1.** Justifier que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

2. Soit p un entier naturel non nul. On considère $R_p = \displaystyle\sum_{k=2p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que

$$R_p = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

3. Soit N un entier naturel non nul. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

4. Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\int_{p}^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2}.$$

5. En déduire que pour tout entier naturel non nul p,

$$\frac{1}{4p+4} \leqslant R_p \leqslant \frac{1}{4p-2}.$$

6. Montrer que R_p est équivalent à $\dfrac{1}{4p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

XXI. On se propose de calculer des approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

1. Exprimer $\ln(2)$ et $\ln(3)$ à l'aide de $\ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{8}\right)$.

2. Les calculs de la question XIX. ont donné les valeurs approchées à 10^{-8} près suivantes :

$$\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) \approx 0,28768207 \qquad \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) \approx 0,11778304.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(2)$ et $\ln(3)$. Donner la précision de ces résultats.

XXII. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

XXIII. En déduire que si $x \in [0,1[$, alors

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{1}{1-x^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

XXIV.

1. Quelle valeur de x doit-on choisir pour déduire de la question précédente une valeur approchée de $\ln(2)$? de $\ln(3)$?
2. À l'aide de ces valeurs de x, donner une valeur de n permettant d'obtenir des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ à 10^{-8} près.
3. Comparer cette méthode d'approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ avec celle de la question XXI.

XXV. On se propose de calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout nombre entier $n > 1$.

1. Expliquer pourquoi il suffit de calculer des valeurs de $\ln(p)$ pour p nombre premier.
2. Décrire une méthode pour calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout entier n tel que $2 \leqslant n \leqslant 20$.

Problème n° 2

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres relatifs et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. L'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls est noté $\mathbb{Q}^+$.

Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

On rappelle que, pour tout élément x non nul de $\mathbb{Q}^+$, il existe un unique couple (a, b) d'entiers naturels premiers entre eux tel que $x = \dfrac{a}{b}$. Le quotient $\dfrac{a}{b}$ est la forme fractionnaire irréductible (en abrégé, FFI) de x. Par convention, la forme fractionnaire irréductible de 0 est $\dfrac{0}{1}$.

Partie A : Somme des cancres

Définition. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$. Leur FFI respectives sont notées $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ (a, b, c, d sont des entiers naturels, b et d sont non nuls, a et b sont premiers entre eux, c et d sont premiers entre eux). La somme des cancres de x et y est définie par :

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d}.$$

I. Question de cours. Soient a, b, n trois entiers relatifs, a et b étant non nuls. Montrer que $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(a, b + na)$.

II. Soient x et y deux rationnels positifs.

1. Montrer que $x \oplus y$ est un rationnel positif.

2. On note $\dfrac{a}{b}$ la FFI de x et $\dfrac{c}{d}$ la FFI de y. La FFI de $x \oplus y$ est-elle toujours $\dfrac{a+c}{b+d}$?

III. Chacune des affirmations suivantes est soit vraie soit fausse. Préciser pour chacune ce qu'il en est, en justifiant la réponse.

1. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus 0 = x$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus x = x$.

3. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus y = y \oplus x$.

4. Pour tous $x, y, z, \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.

5. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, $\dfrac{1}{x} \oplus \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x \oplus y}$.

6. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, pour tout entier naturel n, $(n + x) \oplus (n + y) = n + (x \oplus y)$.

IV. Soit x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$.

1. Montrer que $x \oplus y = x$ si, et seulement si, $x = y$.

2. Montrer que si $x < y$, alors $x < x \oplus y < y$.

V. Interprétation géométrique. On se place dans un plan euclidien, muni d'un repère (O, I, J). Pour $x \in \mathbb{Q}^+$, de FFI $\frac{a}{b}$, on note M_x le point de coordonnées (b, a).

1. Soient $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls. Montrer que O, $M_{x\oplus y}$ et le milieu de $[M_x M_y]$ sont alignés.

2. Qu'est la droite $(OM_{x\oplus y})$ pour le triangle OM_xM_y ?

VI. Soient $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, de FFI respectives $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. On suppose que $a > c$ et $b < d$. En utilisant l'aire de rectangles et de triangles rectangles, montrer que l'aire du triangle OM_xM_y est

$$\frac{ad - bc}{2}.$$

Partie B : suites de Farey

Définition : pour tout entier $n \geqslant 1$, la suite de Farey d'ordre n est la suite dont les termes sont, rangés dans l'ordre croissant, tous les rationnels positifs compris entre 0 et 1 dont la FFI a un dénominateur inférieur ou égal à n. On note F_n cette suite. Par exemple :

$$F_1 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_2 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right).$$

VII. Déterminer F_4, F_5 et F_6.

VIII. Soit $x \in \mathbb{Q}^+$ et soit n un entier naturel non nul. Montrer que x est un terme de la suite F_n si, et seulement si, il existe $a, b \in \mathbb{N}$, b non nul, tels que $x = \frac{a}{b}$ et $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

IX. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que les termes de F_n sont aussi des termes de F_{n+1}.

X. Montrer que si x est un terme de la suite F_n alors $1 - x$ également.

XI. On considère l'application suivante :

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{Q}^+ & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x & \mapsto & (a, b) \text{ tel que } \frac{a}{b} \text{ est la FFI de } x. \end{array} \right.$$

1. Montrer que θ est injective.

2. Montrer que θ n'est pas surjective.
Indication : on pourra montrer que $(2, 2)$ n'appartient pas à $\theta(\mathbb{Q}^+)$.

3. Soit x un élément de la suite F_n, non nul. Montrer que $\theta(x) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$.

4. On note f_n le nombre de termes de F_n. Montrer que $f_n \leqslant n^2 + 1$ et que l'égalité n'est satisfaite que si $n = 1$.

XII. Soit n un entier naturel non nul. L'indicatrice d'Euler de n est l'entier défini par

$$\varphi(n) = \operatorname{card}(\{k \in [\![1, n]\!],\ \operatorname{PGCD}(k, n) = 1\}).$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

Partie C : éléments consécutifs des suites de Farey

XIII. Soit n un entier naturel non nul et soient x et y deux termes consécutifs de la suite F_{n+1}. On suppose qu'aucun des deux n'est un terme de F_n.

1. Montrer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $x = \dfrac{k}{n+1}$ et $y = \dfrac{k+1}{n+1}$.

2. Montrer que $x < \dfrac{k}{n} < y$.

3. Montrer que si x et y sont deux termes consécutifs de la suite F_{n+1}, alors au moins l'un des deux est un élément de F_n.

XIV. Le but de cette question est de démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, la propriété (P_n) : « si x et y sont, dans cet ordre, deux termes consécutifs de la suite de Farey F_n, dont les FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, alors $bc - ad = 1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre m strictement supérieur à n. »

1. Démontrer (P_1).

2. On suppose que, pour un certain entier $n \geqslant 1$, la propriété (P_n) est vraie. Soit alors x et y deux termes consécutifs (dans cet ordre) de F_{n+1}, dont les FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$. On rappelle que, dans ce cas, x ou y est un élément de F_n.

a. Montrer que si x et y sont des éléments de F_n, alors $bc - ad = 1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à $n + 1$.

b. On suppose dans tout ce qui suit que x est un terme de F_n et que y n'est pas un terme de F_n. Soit z le successeur de x dans F_n et $z = \dfrac{r}{s}$ la FFI de z. Montrer que $\dfrac{a+r}{b+s}$ est une fraction irréductible comprise entre x et z.

c. Montrer que $x < y < z$ puis que $y = x \oplus z$.

d. En déduire que $c = a + r$ et $d = b + s$.

e. Déduire que $bc - ad = rd - sc = 1$.

f. Soit $\dfrac{p}{q}$ la première fraction irréductible qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey F_m d'ordre strictement m supérieur à $n+1$. On pose $u = qc-pd$ et $v = pb - aq$. Montrer que u et v sont des entiers naturels non nuls et que

$$\begin{cases} au + cv & = p, \\ bu + dv & = q. \end{cases}$$

g. Déduire que $x \oplus y$ apparaît dans une suite $F_{m'}$ avec $n + 1 < m' \leqslant m$ et que

$$x < x \oplus y < y.$$

h. En déduire que $x \oplus y = \dfrac{p}{q}$.

3. Conclure.

XV. Applications.

1. Montrer que si $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ sont les FFI de deux termes successifs d'une suite de Farey F_n, alors $\dfrac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible.

2. Soient x, y et z trois termes consécutifs d'une suite de Farey F_n de FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{e}{f}$. Montrer que $bc - ad = de - fc$ puis que $y = x \oplus z$.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A : logarithme de base a

Rappel. On appelle *logarithme* toute fonction f définie sur $]0, +\infty[$, dérivable, telle que :

- il existe un nombre réel a non nul tel que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{a}{x}.$$

- $f(1) = 0$.

I. Soit a un nombre réel non nul. Justifier qu'il existe un unique logarithme, que l'on notera f_a, tel que, pour tout nombre réel $x > 0$, $f_a'(x) = \frac{a}{x}$. Lorsque $a = 1$, on utilise la notation ln (logarithme néperien).

La fonction g :$]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{a}{x}$ est continue, donc possède une unique primitive s'annulant en 1.

II. Pour tout nombre réel a non nul, exprimer f_a à l'aide de ln.

Posons $g_a = a\ln$. Alors g_a est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$g_a'(x) = \frac{a}{x}.$$

De plus, $g_a(1) = a\ln(1) = 0$, Par unicité de f_a, $f_a = g_a = a\ln$.

III. Montrer que, pour tout nombre réel a non nul, tous nombres réels $x, y > 0$,

$$f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y).$$

Indication : on pourra étudier la fonction définie par $x \mapsto f_a(xy)$.

Fixons $y > 0$ et considérons la fonction définie h sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = f_a(xy)$. Par composition, h est dérivable et pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = yf_a'(xy) = \frac{ay}{xy} = \frac{a}{x} = f_a'(x).$$

Par suite, il existe un nombre réel C tel que pour tout $x > 0$, $h(x) = f_a(x) + C$. Pour $x = 1$:

$$h(1) = f_a(y) = f_a(1) + C = C,$$

donc $C = f_a(y)$ et $f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)$.

IV. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$,

$$f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x).$$

D'après la question précédente :

$$f_a(x) + f_a\left(\frac{1}{x}\right) = f_a\left(x\frac{1}{x}\right) = f_a(1) = 0,$$

donc $f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x)$.

V. Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel. Montrer que $f_a(x^r) = rf_a(x)$.
Indication : on pourra commencer par le cas où r est un entier naturel, puis celui où r est un entier relatif, avant de conclure dans le cas où r est un nombre rationnel.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: $f_a(x^n) = nf_a(x)$. Montrons cette propriété par récurrence. Si $n = 0$, $f_a(x^0) = f_a(1) = 1 = 0f_a(x)$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors :

$$f_a(x^{n+1})) = f_a(x^n x) = f_a(x^n) + f_a(x) = nf_a(x) + f_a(x) = (n+1)f_a(x),$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit n un entier négatif. Alors, d'après ce qui précède :

$$f_a(x^n) = f_a\left(\frac{1}{x^{|n|}}\right) = -f_a(x^{|n|}) = -|n|f_a(x) = nf_a(x).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_a(x^n) = nf_a(x)$.
Soit $r \in \mathbb{Q}$. Posons $r = \frac{p}{q}$, avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$. D'après ce qui précède, avec $y = x^{\frac{p}{q}}$:

$$qf_a(x^r) = qf_a(y) = f_a(y^q) = f_a(x^p) = pf_a(x),$$

donc $f_a(x^r) = \frac{p}{q}f_a(x) = rf_a(x)$.

VI. Montrer que la fonction ln est strictement croissante.

Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc ln est strictement croissante.

VII. Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 de la fonction ln.
Comme ln est croissante, ces deux limites existent. Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} 2^n = +\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \ln(2^n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} n\ln(2) = +\infty,$$

car, ln étant strictement croissante, $\ln(2) > \ln(1) = 0$. Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} 2^{-n} = -\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \ln(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \ln(2^{-n}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} -n\ln(2) = -\infty.$$

VIII. Montrer que la fonction ln est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Comme ln est strictement croissante et continue, ln définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \ln(x), \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln(x)[= \mathbb{R}$.

IX. Comment peut-on généraliser les résultats des questions VI. et VIII. au cas des logarithmes f_a ?

Comme $f_a = a\ln$:

— Si $a > 0$, f_a est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

— Si $a < 0$, f_a est une bijection strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : logarithme décimal

X. Montrer qu'il existe un unique logarithme f_a tel que $f_a(10) = 1$. Ce logarithme est noté Log et est appelé logarithme décimal.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

$$f_a(10) = 1 \Longleftrightarrow a\ln(10) = 1 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{\ln(10)},$$

car $\ln(10)$ est non nul, ln étant strictement croissante. Donc l'unique logarithme f_a tel que $f_a(10) = 1$ est $f_{\frac{1}{\ln(10)}}$.

XI. Soit N un nombre entier naturel dont l'écriture en base dix possède n chiffres. Déterminer la partie entière de $\text{Log}(N)$.

Alors $10^{n-1} \leqslant N < 10^n$. Comme Log est strictement croissante (question IX.) :

$$\text{Log}(10^{n-1}) = (n-1)\text{Log}(10) = n - 1 \leqslant \text{Log}(N) < \text{Log}(10^n) = n\text{Log}(10)n.$$

Donc la partie entière de $\text{Log}(N)$ est $n - 1$.

XII. Les exercices suivants sont proposés à une classe de terminale scientifique :

> **1.** Combien le nombre 4^{2019} possède t-il de chiffres ?
>
> **2.** Le niveau sonore L (en dB) s'exprime en fonction de l'intensité I (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) selon la formule
>
> $$L = 10\,\text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$
>
> où $I_0 = 10^{-12}\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ correspond à l'intensité sonore minimale à laquelle l'oreille est sensible pour un son de fréquence 1000Hz.
>
> **a.** Calculer le niveau sonore correspondant à une intensité sonore de $10^{-5}\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.
>
> **b.** Quel est l'effet sur l'intensité sonore d'une augmentation du niveau sonore de 10dB ?
>
> **3.** Une balle lancée d'une hauteur de 2m atteint après chaque rebond 70% de sa hauteur précédente et cesse de rebondir quand sa hauteur n'excède pas 1mm. Au bout de combien de rebonds cela se produira-t-il ?

Pour chacun de ces trois exercices, présentez une rédaction de la solution, telle que vous l'exposeriez à une classe de terminale scientifique.

1. Posons $N = 4^{2019}$. Alors le nombre de chiffres de l'écriture en base 10 de N est la partie entière de $\text{Log}(N)$ augmentée de 1. De plus, $\text{Log}(N) = \text{Log}(4^{2019}) = 2019\text{Log}(4) \approx 1215,6$, à 10^{-1} près. Donc le nombre de chiffres de l'écriture en base 10 de N est 1216.

2. a. Si $I = 10^{-5}\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$, on obtient :

$$L = 10\text{Log}\left(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}\right) 10\text{Log}(10^7) = 70\text{Log}(10) = 70.$$

2.b. Soit I l'intensité de départ et I' l'intensité après augmentation du niveau sonore de dB. En notant L le niveau sonore de départ et L' le niveau sonore après augmentation de dB, on a $L' = L + 10$, donc :

$$\begin{aligned}
&10\text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) = 10\text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) + 10 \\
\iff &\text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) - \text{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 1 \\
\iff &\text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\right) + \text{Log}\left(\frac{I_0}{I}\right) = 1 \\
\iff &\text{Log}\left(\frac{I'}{I_0}\frac{I_0}{I}\right) = 1 \\
\iff &\text{Log}\left(\frac{I'}{I}\right) = \text{Log}(10).
\end{aligned}$$

Comme la fonction Log est bijective,

$$\frac{I'}{I} = 10.$$

L'intensité sonore est multipliée par 10.

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est la hauteur atteinte au n-ième rebond, exprimée en mètre. Alors $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7u_n$. Il s'agit donc d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $0,7$ et par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2 \times 0,7^n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction Log est strictement croissante :

$$\begin{aligned}
u_n < 10^{-3} &\iff 2 \times 0,7^n < 10^{-3} \\
&\iff \text{Log}(2 \times 0,7^n) < \text{Log}(10^{-3}) \\
&\iff \text{Log}(2) + n\text{Log}(0,7) < -3 \\
&\iff n > \frac{-3 - \text{Log}(2)}{\text{Log}(0,7)} \text{ (car Log}(0,7) < 0) \\
&\iff n > 21,3 \\
&\iff n \geqslant 22 \text{ (car } n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

La balle s'arrête après 22 rebonds.

Partie C : calcul approché de valeurs du logarithme népérien

XIII. Montrer que pour tout nombre réel $x \neq -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

Comme $-x \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - (-1^n)\frac{1}{1+x},$$

d'où le résultat.

XIV. En déduire que pour tout nombre réel $x > -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t.$$

En conséquence, si $x > -1$:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^x t^k \mathrm{d}t + \int_0^x (-1)^k \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

XV. On suppose que $x \geqslant 0$. Montrer que

$$\left| \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Pour tout $t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{1+t} \leqslant \dfrac{1}{1+0} = 1$, donc :

$$\left| \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x \left| (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \right| \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

XVI. On suppose que $-1 < x \leqslant 0$. Montrer que

$$\left| \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

Pour tout $t \in [x, 0]$:

$$\left| \frac{t^n}{1+t} \right| = \frac{|t|^n}{1+t} \leqslant \frac{|t|^n}{1+x} = (-1)^n \frac{t^n}{1+x}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \right| &\leqslant \int_x^0 \left| \frac{t^n}{1+t} \right| \mathrm{d}t \\ &= \int_x^0 (-1)^n \frac{t^n}{1+x} \mathrm{d}t \\ &\leqslant -\frac{1}{1+x} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

XVII. En déduire que, si $-1 < x \leqslant 1$, la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est convergente et que sa somme vaut $\ln(1+x)$. On pourra raisonner par disjonction de cas.

Si $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0.$$

Si $-1 < x < 0$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1} = 0.$$

Dans les trois cas, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t = 0,$$

ce qui implique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x).$$

XVIII. Justifier que la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ diverge lorsque $|x| > 1$.

Dans ce cas, le terme général ne tend pas vers 0.

XIX. À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur de n pour laquelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-8} près pour :

1. $x = \dfrac{1}{3}$.

2. $x = \dfrac{1}{8}$.

3. $x = 1$.

D'après la question XV, si $x > 0$,

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} - \ln(1+x) \right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Il suffit donc de trouver n tel que $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant 10^{-8}$. pour $x = 1$ on obtient $n = 10^8 - 1$. Pour $x = \dfrac{1}{3}$, à l'aide de la calculatrice on obtient $n = 14$; pour $x = \dfrac{1}{8}$, on obtient $n = 7$.

Remarque : 7 et 14 sont les meilleurs valeurs possibles pour $x = \dfrac{1}{8}$ et $x = \dfrac{1}{3}$. Pour $x = 1$, la meilleure valeur possible est 49 997 752.

XX. **1.** Justifier que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

C'est la question XVII pour $x = 1$.

2. Soit p un entier naturel non nul. On considère $R_p = \displaystyle\sum_{k=2p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que

$$R_p = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

$$
\begin{aligned}
R_p &= \lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{k=2p+1}^{2N+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= \lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) \\
&= \lim_{N\longrightarrow+\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{2k+2-2k-1}{(2k+2)(2k+1)} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.
\end{aligned}
$$

3. Soit N un entier naturel non nul. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Si $p \leqslant k \leqslant N$, $0 < (2k+1)^2 \leqslant (2k+1)(2k+2) \leqslant (2k+2)^2$, ce qui implique le résultat par passage à l'inverse.

4. Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\int_p^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2}.$$

Soit $k \in N$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(2x+a)^2}$ décroît sur $[k, k+1]$ et donc :

$$\frac{1}{(2(k+1)+a)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{(2x+a)^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(2k+a)^2}.$$

En sommant la première inégalité pour k de $p-1$ à $N-1$:

$$\sum_{k=p-1}^{N-1} \frac{1}{(2(k+1)+a)^2} = \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2}.$$

En sommant la première inégalité pour k de p à N :

$$\int_p^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2}.$$

5. En déduire que pour tout entier naturel non nul p,

$$\frac{1}{4p+4} \leqslant R_p \leqslant \frac{1}{4p-2}.$$

On prend $a = 2$ et on obtient, pour tout $N \geqslant p$:

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \geqslant \int_p^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+2)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{N+1}\right).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$:

$$R_p \geqslant \frac{1}{4p+4}.$$

On prend $a = 1$ et on obtient, pour tout $N \geqslant p$:

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2N+1}\right).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$:

$$R_p \leqslant \frac{1}{4p-2}.$$

6. Montrer que R_p est équivalent à $\dfrac{1}{4p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{4p}{4p+4} \leqslant 4pR_p \leqslant \frac{4p}{4p-2}.$$

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{p \longrightarrow +\infty} 4pR_p = 1$, donc R_p est équivalent à $\dfrac{1}{4p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

XXI. On se propose de calculer des approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

1. Exprimer $\ln(2)$ et $\ln(3)$ à l'aide de $\ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{8}\right)$.

$$\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 2\ln(2) - \ln(3).$$
$$\ln\left(1+\frac{1}{8}\right) = \ln\left(\frac{9}{8}\right) = -3\ln(2) + 2\ln(3).$$

Par suite :

$$2\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) = \ln(2),$$
$$3\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + 2\ln\left(1+\frac{1}{8}\right) = \ln(3).$$

2. Les calculs de la question XIX. ont donné les valeurs approchées à 10^{-8} près suivantes :

$$\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) \approx 0,28768207 \qquad \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) \approx 0,11778304.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(2)$ et $\ln(3)$. Donner la précision de ces résultats.

Avec la calculatrice, on obtient :

$$\ln(2) \approx 0,69314718 = \alpha, \qquad \ln(3) \approx 1,09861229 = \beta.$$

De plus :

$$\begin{aligned}|\ln(2)-\alpha| &\leqslant 2\left|\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)-0,28768207\right|+\left|\ln\left(1+\frac{1}{8}\right)-0,11778304\right|\\ &\leqslant 3\times 10^{-8}.\end{aligned}$$

De même, $|\ln(3)-\beta|\leqslant 5\times 10^{-8}$.

XXII. Montrer que pour tout $x\in]-1,1[$ et pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\int_0^x\frac{t^{2n}\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

Pour tout entier naturel p :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)&=\ln(1+x)-\ln(1-x)\\ &=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}-\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\frac{(-x)^{k+1}}{k+1}\\ &\quad+\int_0^x(-1)^p\frac{t^p}{1+t}\mathrm{d}t-\int_0^{-x}(-1)^p\frac{t^p}{1+t}\mathrm{d}t\\ &=\sum_{k=0}^{p-1}\left((-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)\\ &\quad+\int_0^x(-1)^p\frac{t^p}{1+t}\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{t^p}{1-t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Soit n un entier naturel. Pour $p=2n$:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+2\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

XXIII. En déduire que si $x\in[0,1[$, alors

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right|\leqslant\frac{1}{1-x^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Par suite :

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right|\leqslant\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\frac{1}{1-x^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

XXIV. **1.** Quelle valeur de x doit-on choisir pour déduire de la question précédente une valeur approchée de $\ln(2)$? de $\ln(3)$?

Soient $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $y\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1-x}=y&\Longleftrightarrow 1+x=y-xy\\ &\Longleftrightarrow x(1+y)=y-1\\ &\Longleftarrow x=\frac{y-1}{y+1}.\end{aligned}$$

Par suite, pour obtenir une valeur approchée de $\ln(2)$, on prend $x=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$; pour obtenir une valeur approchée de $\ln(3)$, on prend $x=\dfrac{3-1}{3+1}=\dfrac{1}{2}$.

2. À l'aide de ces valeurs de x, donner une valeur de n permettant d'obtenir des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ à 10^{-8} près.

Il suffit de choisir n tel que

$$\frac{2}{1-x^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} < 10^{-8}.$$

Pour $\ln(2)$, avec l'aide de la calculatrice on montre que $n = 7$ convient. Pour $\ln(3)$, $n = 11$ convient.

3. Comparer cette méthode d'approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ avec celle de la question XXI.

Avec cette méthode, on calcule 7 termes d'une série pour $\ln(2)$ et 11 pour $\ln(3)$, soit en tout 18 termes. Avec la méthode de la question XXI, il faut calculer $14+7 = 21$ termes d'une série (question XIX) qu'on combine ensuite : la méthode de la question XXI est moins efficace.

XXV. On se propose de calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout nombre entier $n > 1$.

1. Expliquer pourquoi il suffit de calculer des valeurs de $\ln(p)$ pour p nombre premier.

En décomposant n en produit de nombres premiers, on peut exprimer $\ln(n)$ comme combinaison à coefficients entiers de $\ln(p)$ avec p premiers.

2. Décrire une méthode pour calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout entier n tel que $2 \leqslant n \leqslant 20$.

On connaît déjà des valeurs approchées de $\ln(2)$ et $\ln(3)$. On utilise ensuite la méthode de la question XXIV :

— $p = 5$: on prend $x = \dfrac{2}{3}$.

— $p = 7$: on prend $x = \dfrac{3}{4}$.

— $p = 11$: on prend $x = \dfrac{5}{6}$.

— $p = 13$: on prend $x = \dfrac{6}{7}$.

— $p = 17$: on prend $x = \dfrac{8}{9}$.

— $p = 19$: on prend $x = \dfrac{9}{10}$.

On obtient ensuite les autres valeurs :

$$\begin{aligned}
\ln(4) &= 2\ln(2), & \ln(6) &= \ln(2)+\ln(3), & \ln(8) &= 3\ln(2),\\
\ln(9) &= 2\ln(3), & \ln(10) &= \ln(2)+\ln(5), & \ln(12) &= 2\ln(2)+\ln(3),\\
\ln(14) &= \ln(2)+\ln(7), & \ln(15) &= \ln(3)+\ln(5), & \ln(16) &= 4\ln(2),\\
\ln(18) &= \ln(2)+2\ln(3), & \ln(20) &= 2\ln(2)+\ln(5).
\end{aligned}$$

Problème n° 2

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres relatifs et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. L'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls est noté $\mathbb{Q}^+$.

Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

On rappelle que, pour tout élément x non nul de $\mathbb{Q}^+$, il existe un unique couple (a, b) d'entiers naturels premiers entre eux tel que $x = \frac{a}{b}$. Le quotient $\frac{a}{b}$ est la forme fractionnaire irréductible (en abrégé, FFI) de x. Par convention, la forme fractionnaire irréductible de 0 est $\frac{0}{1}$.

Partie A : Somme des cancres

Définition. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$. Leur FFI respectives sont notées $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ (a, b, c, d sont des entiers naturels, b et d sont non nuls, a et b sont premiers entre eux, c et d sont premiers entre eux). La somme des cancres de x et y est définie par :

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d}.$$

I. **Question de cours**. Soient a, b, n trois entiers relatifs, a et b étant non nuls. Montrer que $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(a, b + na)$.
Posons $d = \mathrm{PGCD}(a, b)$ et $d' = \mathrm{PGCD}(a, b+na)$. Comme d divise a et b, alors d divise $b+na$. Par définition de d', d' divise d. Comme d' divise a et $b+na$, d' divise également $b + na - na = b$. Par définition de d, d divise d'. Donc $d = d'$.

II. Soient x et y deux rationnels positifs.

1. Montrer que $x \oplus y$ est un rationnel positif.
Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x et $\frac{c}{d}$ la FFI de y, comme $a, c \in \mathbb{N}$, $a+c \in \mathbb{N}$. Comme $b, d \in \mathbb{N}^*$, $b + d \in \mathbb{N}^*$. Donc $x \oplus y \in \mathbb{Q}^+$.

2. On note $\frac{a}{b}$ la FFI de x et $\frac{c}{d}$ la FFI de y. La FFI de $x \oplus y$ est-elle toujours $\frac{a+c}{b+d}$?
Pas nécessairement. Par exemple, si $x = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{1}{5}$,

$$x \oplus y = \frac{1+1}{3+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

III. Chacune des affirmations suivantes est soit vraie soit fausse. Préciser pour chacune ce qu'il en est, en justifiant la réponse.

1. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus 0 = x$.
C'est faux. Par exemple

$$\frac{1}{3} \oplus 0 = \frac{1+0}{3+1} = \frac{1}{4}.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus x = x$.
C'est vrai. Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x :

$$x \oplus x = \frac{a+a}{b+b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = x.$$

3. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus y = y \oplus x$.
C'est vrai. Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x et Si $\frac{c}{d}$ la FFI de y :

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c+a}{d+b} = y \oplus x.$$

4. Pour tous $x, y, z, \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.
C'est faux. Par exemple :

$$\left(\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3}\right) \oplus \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \oplus \frac{1}{5} = \frac{3}{10},$$
$$\frac{1}{2} \oplus \left(\frac{1}{3} \oplus \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} \oplus \frac{2}{8} = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

5. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, $\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{1}{x \oplus y}$.
C'est vrai. Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x et si $\frac{c}{d}$ la FFI de y, alors la FFI de $\frac{1}{x}$ est $\frac{b}{a}$ et celle de $\frac{1}{y}$ est $\frac{d}{c}$.

$$\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{b+d}{a+c} = \frac{1}{x \oplus y}.$$

6. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, pour tout entier naturel n, $(n+x) \oplus (n+y) = n + (x \oplus y)$.
C'est vrai. Notons $\frac{a}{b}$ la FFI de x. D'après la première question, PGCD$(a+bn, a) = 1$, donc la FFI de $n+x$ est $\frac{a+bn}{b}$. Par suite, en notant $\frac{c}{d}$ la FFI de y :

$$(n+x) \oplus (n+y) = \frac{a+bn+c+dn}{b+d} = \frac{a+b}{c+d} + n = n + (x \oplus y).$$

IV. Soit x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$.

1. Montrer que $x \oplus y = x$ si, et seulement si, $x = y$.
Si $x = y$, d'après la question III.2, $x \oplus y = x \oplus x = x$. Supposons $x \oplus y = x$. Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x et si $\frac{c}{d}$ la FFI de y, alors

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b},$$

donc $ab + bc = ab + ad$ et donc $bc = ad$ et finalement $x = y$.

2. Montrer que si $x < y$, alors $x < x \oplus y < y$.
Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x et si $\frac{c}{d}$ la FFI de y,

$$y - x = \frac{bc - ad}{bd} > 0,$$

donc $bc - ad > 0$. En conséquence :

$$\begin{aligned} x \oplus y - x &= \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ab + bc - ab - ad}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0, \\ y - x \oplus y &= \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc + cd - ad - cd}{d(b+d)} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} > 0. \end{aligned}$$

Donc $x < x \oplus y < y$.

V. Interprétation géométrique. On se place dans un plan euclidien, muni d'un repère (O, I, J). Pour $x \in \mathbb{Q}^+$, de FFI $\frac{a}{b}$, on note M_x le point de coordonnées (b, a).

1. Soient $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls. Montrer que O, $M_{x\oplus y}$ et le milieu de $[M_x M_y]$ sont alignés.
Soit $\frac{e}{f}$ la FFI de $x \oplus y$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{N}^*$, tel que $a + c = \lambda e$ et $b + d = \lambda f$.
Dans le repère (O, I, J) :

$$O : (0, 0), \qquad M_x : (b, a), \qquad M_y : (d, c), \qquad M_{x\oplus y} : (f, e) = \frac{1}{\lambda}(b + d, a + c).$$

Les coordonnées du milieu N de $[M_x M_y]$ sont $\frac{1}{2}(b + d, a + c)$. On constate que les vecteurs $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OM_{x\oplus y}}$ sont colinéaires, donc O, N et $M_{x\oplus y}$ sont alignés.

2. Qu'est la droite $(OM_{x\oplus y})$ pour le triangle $OM_x M_y$?
Il s'agit de la médiane issue de O.

VI. Soient $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, de FFI respectives $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. On suppose que $a > c$ et $b < d$. En utilisant l'aire de rectangles et de triangles rectangles, montrer que l'aire du triangle $OM_x M_y$ est

$$\frac{ad - bc}{2}.$$

Soient A, B, C, D et E les points de coordonnées respectives $(0, a)$, $(b, 0)$, $(0, c)$, $(d, 0)$ et (d, a). En notant $\mathcal{A}$ l'aire recherchée :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \text{Aire}(ODEA) - \text{Aire}(ODM_x) - \text{Aire}(M_y E M_x) - \text{Aire}(OM_x A) \\ &= ad - \frac{cd}{2} - \frac{(a-c)(b-d)}{2} - \frac{ab}{2} \\ &= \frac{ad - bc}{2}. \end{aligned}$$

Partie B : suites de Farey

Définition : pour tout entier $n \geqslant 1$, la suite de Farey d'ordre n est la suite dont les termes sont, rangés dans l'ordre croissant, tous les rationnels positifs compris entre 0 et 1 dont la FFI a un dénominateur inférieur ou égal à n. On note F_n cette suite. Par exemple :

$$F_1 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_2 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right).$$

VII. Déterminer F_4, F_5 et F_6.

$$F_4 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_6 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right),$$

VIII. Soit $x \in \mathbb{Q}^+$ et soit n un entier naturel non nul. Montrer que x est un terme de la suite F_n si, et seulement si, il existe $a, b \in \mathbb{N}$, b non nul, tels que $x = \frac{a}{b}$ et $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

$\Longrightarrow$. Soit $\frac{a}{b}$ la FFI de x. Alors $a, b \in \mathbb{N}$, b et non nul et $0 \leqslant b \leqslant n$. De plus, comme $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant a \leqslant b$.

$\Longleftarrow$. Alors x est un rationnel et $x \in [0,1]$. Soit $d = \mathrm{PGCD}(a,b)$, $a' = \frac{a}{d}$ et $b' = \frac{b}{d}$. La FFI de x est $\frac{a'}{b'}$ et $b' \leqslant b \leqslant n$. Donc x apparaît dans la suite F_n.

IX. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que les termes de F_n sont aussi des termes de F_{n+1}.

Si x apparaît dans F_n, sa FFI est $\frac{a}{b}$, avec $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$. Alors $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n+1$. D'après la question précédente, x apparaît dans F_{n+1}.

X. Montrer que si x est un terme de la suite F_n alors $1-x$ également.
Soit $\frac{a}{b}$ la FFI de x. Alors $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$. Alors :

$$1 - x = \frac{b-a}{b}.$$

D'après la question VIII, $1-x$ est un terme de F_n.

XI. On considère l'application suivante :

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^+ & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x & \mapsto & (a,b) \text{ tel que } \frac{a}{b} \text{ est la FFI de } x. \end{array} \right.$$

1. Montrer que θ est injective.

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$ tels que $\theta(x) = \theta(y) = (a, b)$. Alors $x = \dfrac{a}{b} = y$.

2. Montrer que θ n'est pas surjective.
Indication : on pourra montrer que $(2, 2)$ n'appartient pas à $\theta(\mathbb{Q}^+)$.

Si $(a, b) \in \theta(\mathbb{Q}^+)$, alors $\dfrac{a}{b}$ est la FFI d'un certain rationnel positif, donc $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$. Or $\mathrm{PGCD}(2, 2) = 2$, donc $(2, 2) \notin \theta(\mathbb{Q}^+)$. L'application θ n'est pas surjective.

3. Soit x un élément de la suite F_n, non nul. Montrer que $\theta(x) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$.

La FFI de x est notée $\dfrac{a}{b}$. Comme x est un terme de F_n non nul, $0 < x \leqslant 1$, donc $0 < a \leqslant b \leqslant n$. Donc $\theta(x) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$.

4. On note f_n le nombre de termes de F_n. Montrer que $f_n \leqslant n^2 + 1$ et que l'égalité n'est satisfaite que si $n = 1$.

Soit X_n l'ensemble des termes non nuls de f_n. Comme θ est injectif, $|\theta(X_n)| = |X_n| = f_n - 1$. De plus, comme $\theta(X_n) \subseteq [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, $f_n - 1 \leqslant n^2$.
Si $n = 1$, $f_1 = 2 = 1 + 1^2$. Supposons $n \geqslant 2$. Comme $(2, 2)$ n'est pas dans $\theta(\mathbb{Q}^+)$,

$$\theta(X_n) \subseteq [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!] \setminus \{(2, 2)\}.$$

Donc $|\theta(X_n)| = f_n - 1 \leqslant n^2 - 1$ et $f_n < 1 + n^2$.

XII. Soit n un entier naturel non nul. L'indicatrice d'Euler de n est l'entier défini par

$$\varphi(n) = \mathrm{card}(\{k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{PGCD}(k, n) = 1\}).$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

En séparant les termes de F_n selon le dénominateur de leur FFI et séparant le terme 0 :

$$f_n = 1 + \sum_{b=1}^{n} |\{a \in [\![1, n]\!],\ 1 \leqslant a \leqslant b,\ \mathrm{PGCD}(a, b) = 1\}| = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

Partie C : éléments consécutifs des suites de Farey

XIII. Soit n un entier naturel non nul et soient x et y deux termes consécutifs de la suite F_{n+1}. On suppose qu'aucun des deux n'est un terme de F_n.

1. Montrer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $x = \dfrac{k}{n+1}$ et $y = \dfrac{k+1}{n+1}$.

Soit $\dfrac{k}{b}$ la FFI de x. Comme x est un terme de F_{n+1}, $0 \leqslant k \leqslant b \leqslant n + 1$. Comme x n'est pas un terme de F_n, $b > n$ donc $b = n + 1$. De même, la FFI de y est de la forme $\dfrac{l}{n+1}$. Comme $x < y$, $k < l$. Si $l > k + 1$, alors $\dfrac{k+1}{n+1}$ est un terme de F_{n+1} intercalé entre x et y, alors que x et y sont consécutifs dans F_{n+1}. Donc $l = k + 1$.

2. Montrer que $x < \dfrac{k}{n} < y$.

$$\frac{k}{n} - x = \frac{k}{n} - \frac{k}{n+1} > 0,$$
$$y - \frac{k}{n} = \frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n} = \frac{n-k}{n(n+1)}.$$

Comme $y \leqslant 1$, $k+1 \leqslant n+1$, donc $n-k \geqslant 0$. Si $n = k$, alors $y = \dfrac{n}{k} = 1$ et y apparaît dans F_1 et donc dans F_n, ce qui est une contradiction. Donc $n - k > 0$ et finalement $x < \dfrac{k}{n} < y$.

3. Montrer que si x et y sont deux termes consécutifs de la suite F_{n+1}, alors au moins l'un des deux est un élément de F_n.

Si ni x ni y n'apparaissent dans F_n, d'après la question précédente, il existe un rationnel de la forme $z = \dfrac{k}{n}$ tel que $x < z < y$. D'après la question IX, z est un terme de F_n et donc de F_{n+1} qui s'intercale entre x et y : c'est une contradiction. Donc x ou y est un terme de F_n.

XIV. Le but de cette question est de démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, la propriété (P_n) : « si x et y sont, dans cet ordre, deux termes consécutifs de la suite de Farey F_n, dont les FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, alors $bc - ad = 1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre m strictement supérieur à n. »

1. Démontrer (P_1).

Comme $F_1(0, 1)$, le seul cas à considérer est $x = 0$ et $y = 1$, ce qui donne $a = 0$, $c = 1$, $b = d = 1$. Alors $bc - ad = 1$. De plus, le premier terme à s'intercaler entre x et y dans une suite de Farey d'ordre > 1 est $\dfrac{1}{2}$ (qui apparaît dans F_2) et on a bien $\dfrac{1}{2} = 0 \oplus 1$.

2. On suppose que, pour un certain entier $n \geqslant 1$, la propriété (P_n) est vraie. Soit alors x et y deux termes consécutifs (dans cet ordre) de F_{n+1}, dont les FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$. On rappelle que, dans ce cas, x ou y est un élément de F_n.

a. Montrer que si x et y sont des éléments de F_n, alors $bc - ad = 1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à $n+1$.

D'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$, $bc - ad = 1$ et la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à n est $x \oplus y$. Comme aucune fraction n'apparaît entre x et y dans F_{n+1} par hypothèse, cette fraction apparaît dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à $n+1$.

b. On suppose dans tout ce qui suit que x est un terme de F_n et que y n'est pas un terme de F_n. Soit z le successeur de x dans F_n et $z = \dfrac{r}{s}$ la FFI de z.

Montrer que $\dfrac{a+r}{b+s}$ est une fraction irréductible comprise entre x et z.

D'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$, $rb - as = 1$. Donc :

$$rb - as = r(b+s) - (a+r)s = 1.$$

Par le théorème de Bézout, $\mathrm{PGCD}(a+r, b+s) = 1$, donc la fraction $\dfrac{a+r}{b+s}$ est irréductible. D'après la question IV.2 :

$$x < \frac{a+r}{b+s} = x \oplus z < z.$$

c. Montrer que $x < y < z$ puis que $y = x \oplus z$.
Comme z apparaît dans F_n, elle apparaît dans F_{n+1} aussi. Comme le successeur de x dans F_{n+1} est y et que $z > x$, z apparaît après y, donc $x < y < z$. Il n'y a aucun autre terme entre x et z que y dans F_{n+1} : sinon, comme il n'y a aucun terme entre x et z dans F_n, aucun de ces termes n'est dans F_n et on aurait deux termes consécutifs de F_{n+1} dont aucun n'est dans F_n, ce qui contredit la question XIII. Donc y est la première fraction à apparaître entre x et z dans une suite de Farey d'ordre $> n$. Par l'hypothèse de récurrence $P(n)$, $y = x \oplus z$.

d. En déduire que $c = a + r$ et $d = b + s$.
La FFI de y et de $x \oplus z$ sont donc les mêmes : par la question b, $c = a + r$ et $b = d + s$.

e. Déduire que $bc - ad = rd - sc = 1$.

$$\begin{aligned} bc - ad &= (a+r)b - a(b+s) = br - as = 1, \\ rd - sc &= r(b+s) - s(a+r) = rb - as = 1. \end{aligned}$$

f. Soit $\dfrac{p}{q}$ la première fraction irréductible qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey F_m d'ordre strictement m supérieur à $n+1$. On pose $u = qc - pd$ et $v = pb - aq$. Montrer que u et v sont des entiers naturels non nuls et que

$$\begin{cases} au + cv &= p, \\ bu + dv &= q. \end{cases}$$

Par définition :

$$\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d},$$

donc $qc - pd > 0$ et $pb - aq > 0$. Donc u et v sont des entiers naturels non nuls. De plus :

$$\begin{aligned} au + cv &= aqc - apd + pbc - aqc = (bc - ad)p = p, \\ bu + dv &= qbc - pbd + pbd - abq = (bc - ad)q = q. \end{aligned}$$

g. Déduire que $x \oplus y$ apparaît dans une suite $F_{m'}$ avec $n + 1 < m' \leqslant m$ et que

$$x < x \oplus y < y.$$

D'après la question IV. 2, $x < x \oplus y < y$. De plus, comme $u, v \in \mathbb{N}^*$,

$$m \geqslant q = bu + dv \geqslant b + d.$$

Donc $x \oplus y$ apparaît dans $F_{m'}$ avec $m' \leqslant m$.

h. En déduire que $x \oplus y = \dfrac{p}{q}$.

Si $m' < m$, $x \oplus y$ s'intercale entre x et y avant $\dfrac{p}{q}$: ceci contredit la définition de $\dfrac{p}{q}$. Donc $m' = m$. Comme deux termes consécutifs de F_m ne peuvent pas tous deux ne pas appartenir à F_{m-1}, un seul terme s'intercale entre x et y dans F_m, donc $\dfrac{p}{q} = x \oplus y$.

3. Conclure.

Pour terminer la démonstration de l'hérédité, d'après la question XII, il reste le cas où x n'est pas un terme de F_n et y est un terme de F_n. On applique le résultat obtenu précédemment à $x' = 1 - y$ et $y' = 1 - x$ et cela termine la preuve de l'hérédité. Le résultat est donc vrai à tout rang n par le principe de récurrence.

XV. Applications.

1. Montrer que si $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ sont les FFI de deux termes successifs d'une suite de Farey F_n, alors $\dfrac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible.

D'après la question XIV, $bc - ad = 1$ et donc :

$$b(a+c) - a(b+d) = ab + bc - ab - ad = bc - ad = 1.$$

Par le théorème de Bézout, $\text{PGCD}(a+c, b+d) = 1$ et donc $\dfrac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

2. Soient x, y et z trois termes consécutifs d'une suite de Farey F_n de FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{e}{f}$. Montrer que $bc - ad = de - fc$ puis que $y = x \oplus z$.

D'après la question précédente, $bc - ad = de - cf = 1$. Par suite :

$$\frac{c}{d} - \frac{a+e}{b+f} = \frac{bc + cf - ad - de}{d(b+f)} = \frac{(bc-ad) + (cf - de)}{d(b+f)} = 0.$$

Donc $y = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+e}{b+f} = x \oplus z$.

Thème : probabilités

L'exercice

À Florence au début du XVII^{e} siècle, un jeu consistait à jeter trois dés et à miser sur le résultat de la somme des trois dés. Durant sa jeunesse Cosme II de Médicis, grand-duc de Toscane, a observé de nombreuses parties : il a remarqué qu'il était préférable de miser sur le nombre 10.
Un de ses fidèles disciples lui affirma : « Maître excusez-moi de vous contredire mais le 9 apparaît plus souvent que le 10 ». Lequel des deux a raison ?

Les productions de deux élèves de seconde

Élève 1

J'ai réalisé une feuille de tableur et j'ai tenté de modéliser la situation. Je remarque que le 10 apparaît plus souvent même si parfois c'est le 9.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Dé 1	Dé 2	Dé 3	Somme			
2	2	1	6	9		Apparition du 9	Apparition du 10
3	4	4	2	10		22	18
4	2	2	6	10			
5	4	6	6	16		Testé avec 200 essais	
6	1	5	5	11			
7	6	5	3	14			

Élève 2

J'ai compté les différentes façons d'obtenir 9 avec 3 dés. Il y en a 6. Puis j'ai fait le même raisonnement avec 10 il y en a 6 différentes également. J'en déduis que la probabilité de voir apparaître 9 sur la somme des dés est la même que celle de voir apparaître 10.

Donc aucun des deux n'a raison.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *probabilités*, un au niveau du collège et un au niveau du lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « modéliser ».

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 4n - 6$ pour tout entier naturel n.
Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, et démontrer cette conjecture.

Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

J'ai utilisé le tableur pour calculer de u_0 jusqu'à u_{10}.
Je vois que le diagramme obtenu correspond à une parabole. En considérant le sommet de la parabole, je vois que $\alpha = 2$ et $\beta = -3$, donc je fais l'hypothèse que $u_n = (n-2)^2 - 3$.
J'ai essayé de le prouver par récurrence mais je n'arrive pas à prouver l'hérédité et je ne sais pas pourquoi ça ne marche pas.

Élève 2

D'après l'énoncé on peut écrire que $u_{n+1} - u_n = 4n - 6$.
Donc la suite $u_{n+1} - u_n$ est une suite arithmétique de raison 4.
Donc si on ajoute les termes de la suite on obtient $u_{n+1} - u_0 = (n+1)\dfrac{-6+4n-6}{2} = 2n^2 - 4n - 6$.
Je peux en déduire que $u_n = 5 + 2(n+1)^2 - 4(n+1) - 6 = 2n^2 - 3$.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de développer la compétence « modéliser ».

Thème : géométrie plane

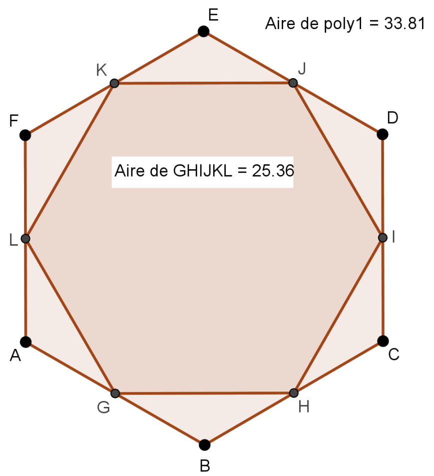
L'exercice

$ABCDEF$ est un hexagone régulier d'aire 230 cm^2. Les points G, H, I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$,... et $[FA]$. Déterminer l'aire du polygone $GHIJKL$.

Les productions de deux élèves de troisième

Élève 1

À l'aide de GeoGebra, j'ai construit l'hexagone régulier $ABCDEF$ en choisissant une longueur de côté quelconque. J'ai ensuite placé les milieux G, H, I, J, K et L des segments $[AB]$, $[BC]$,... et $[FA]$.



J'ai ensuite demandé au logiciel l'aire des deux polygones. L'aire de $ABCDEF$ est égale à 33,81 cm^2 et l'aire de $GHIJKL$ est égale à 25,36 cm^2.

$$\frac{33,81}{25,36} \approx 1,33.$$

Donc en revenant aux hexagones de l'énoncé, si $ABCDEF$ a pour aire 230 cm^2, alors on peut déterminer l'aire de $GHIJKL$ par le calcul :

$$230 \div 1,33 \approx 172,93.$$

L'aire du polygone $GHIJKL$ est à peu près égale à 172,93 cm^2.

Élève 2

Le grand hexagone est un agrandissement du petit hexagone.
J'ai essayé de calculer le rapport entre les côtés du petit et du grand mais je n'y arrive pas.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les réponses de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez, en particulier, les aides qui pourraient leur être apportées.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de troisième.

3 – Proposer deux exercices, un au niveau du lycée et un au niveau du collège, sur le thème *géométrie plane* permettant notamment de développer la compétence « chercher ».

Thème : problèmes conduisant à la résolution d'équations

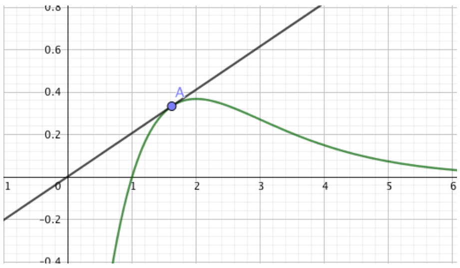
L'exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{1-x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans ce repère. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des tangentes passant par l'origine O du repère ?

Les productions de trois élèves de terminale scientifique

Élève 1

J'ai tracé la courbe avec GeoGebra.
J'ai trouvé une tangente qui passe par l'origine du repère.
Son équation est $y = 0,2x$.
Donc la réponse est oui.



Élève 2

Équation de la tangente : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
J'ai calculé $f(0) = -\mathrm{e}$ et $f'(0) = 2\mathrm{e}$, ce qui donne $y = 2\mathrm{e}x - \mathrm{e}$.
Cette droite ne passe pas par l'origine du repère donc la réponse est non.

Élève 3

$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{1-x}$ donc $f'(x) = (1) \times (-\mathrm{e}^{1-x})$.
L' équation $y = mx + p$ de la tangente est : $y = -\mathrm{e}^{1-a}(x-a) + (a-1)\mathrm{e}^{1-a}$.
$p = 0 \iff a\mathrm{e}^{1-a} + (a-1)\mathrm{e}^{1-a} = 0 \iff a = 0,5$.
Il y a une seule tangente qui passe par O.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les démarches de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites, leurs éventuelles erreurs et l'accompagnement que vous pourriez leur proposer.

2 – Présenter une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *problèmes conduisant à la résolution d'équations* dont l'un au moins nécessitera une prise d'initiative.

Thème : arithmétique

L'exercice

On dispose de billets de 5 € et de billets de 20 €.
De combien de façons peut-on obtenir la somme de 165 € ?

Les productions de trois élèves de terminale S spécialité mathématiques

Élève 1

Soit x le nombre de billets de 5 € et y celui de billets de 20 €. On a $5x + 20y = 165$.
Comme x et y sont des entiers positifs, on a $20y \leq 165$ *donc y est compris entre 0 et 8.*
Il y a donc 8 façons d'obtenir 165 €.

Élève 2

J'ai utilisé un tableur pour trouver les nombres de billets de 5 € et 20 €.

G12

	A	B	C	D	E
1	y	20y	reste	x	
2	1	20	145	29	
3	2	40	125	25	
4	3	60	105	21	
5	4	80	85	17	
6	5	100	65	13	
7	6	120	45	9	
8	7	140	25	5	
9	8	160	5	1	

Élève 3

J'appelle x le nombre de billets de 5 € et y le nombre de billets de 20 €.
Je dois donc résoudre $5x + 20y = 165$. *C'est une droite, il y a une infinité de solutions.*

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique spécialité mathématiques.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *arithmétique*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un d'entre eux permettra notamment de travailler la compétence « communiquer ».