MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

EBE MAT 1

SESSION 2021

CONCOURS EXTERNE
CAPES / CAPES-CAFEP

Section : MATHÉMATIQUES

Section : LANGUES RÉGIONALES Option : BRETON

Section : LANGUES KANAK Option : NENGONE

PREMIÈRE ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie et poursuivre l'épreuve.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► Concours externe du **CAPES** de l'enseignement **public** :

- **Section MATHEMATIQUES**

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EBE	1300E	101	0540

- **Section : LANGUES REGIONALES Option BRETON**

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EBE	0441E	102	0466

- **Section : LANGUES REGIONALES Option KANAK - NENGONE**

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EBE	0477E	102	0466

► Concours externe du **CAFEP/CAPES** de l'enseignement **privé** :

- **Section MATHEMATIQUES**

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EBF	1300E	101	0540

- **Section : LANGUES REGIONALES Option BRETON**

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EBF	0441E	102	0466

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Pour i et j deux entiers naturels tels que $i \leqslant j$, $[\![i\,;j]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $i \leqslant k \leqslant j$.

Partie A : étude des nombres harmoniques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n-ième nombre harmonique par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

I. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

II. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

III. À l'aide de la relation précédente :

1. Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.
2. Démontrer que

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

IV. On considère désormais les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$u_n = H_n - \ln(n), \qquad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

1. Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive. Cette limite est notée γ.

V. 1. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leqslant H_n - \ln(n) - \gamma \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

2. Écrire en langage Python une fonction prenant comme argument un nombre réel ε strictement positif et renvoyant une valeur approchée de γ à ε près. On suppose que l'on dispose de la fonction `math.log()` pour le logarithme népérien.

Partie B : le problème de Bâle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

VI. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

VII. Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On explicitera le théorème de convergence utilisé.

VIII. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0\,;\pi]$, on pose

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0\,;\pi]$,

$$\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = D_n(t).$$

2. En déduire que, si $t \in]0\,;\pi]$,

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

3. Calculer la valeur de $D_n(0)$.

IX. On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par

$$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{t}{\sin(t)} \text{ si } t > 0, \\ 1 \text{ si } t = 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Démontrer que f est dérivable en 0.

3. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

X. **1.** Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel k non nul,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$B_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{D_n(t) - 1}{2} \mathrm{d}t.$$

3. Déterminer la valeur de

$$\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) \mathrm{d}t.$$

4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) D_n(t) \mathrm{d}t.$$

5. En déduire que, pour tout entier naturel non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin(t)} \left(2 - \frac{2t}{\pi} \right) \sin((2n+1)t) \mathrm{d}t.$$

XI. Déterminer une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ telle que

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t) \mathrm{d}t.$$

XII. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t) \mathrm{d}t = 0.$$

XIII. En déduire la limite de la suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$.

Partie C : les lois géométriques

XIV. Démontrer que, pour tout $x \in]-1\,;1[$, la série de terme général x^k converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

XV. Justifier, pour tout $x \in]-1\,;1[$, les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On citera précisément les théorèmes utilisés.

XVI. Soit p un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$. Démontrer qu'on définit une loi de probabilité sur l'univers $\mathbb{N}^*$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k = p(1-p)^{k-1}.$$

On rappelle qu'une variable aléatoire définie sur un univers Ω suit la loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

XVII. Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Démontrer que X admet une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$, et une variance, notée $\mathbb{V}(X)$, vérifiant :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

XVIII. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p_i)$, où $p_i \in]0\,;1[$.

1. Donner l'espérance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ en fonction des p_i.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}.$$

Partie D : inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

XIX. Inégalité de Markov

Soit Y une variable aléatoire positive définie sur un univers Ω, possédant une espérance notée $\mathbb{E}(Y)$.
Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(Y \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.$$

On pourra décomposer $Y(\Omega)$ sous la forme $Y(\Omega) = Y_1 \cup Y_2$, avec

$$Y_1 = \{y \in Y(\Omega),\ y \geqslant a\}, \qquad Y_2 = \{y \in Y(\Omega),\ y < a\}.$$

XX. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω possédant une espérance notée $\mathbb{E}(X)$ et une variance notée $\mathbb{V}(X)$.
Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

Partie E : le problème du collectionneur

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un fabriquant de tablettes de chocolat propose à ses acheteurs de collectionner des vignettes. Chaque tablette contient une vignette qui représente un animal que l'on découvre à l'ouverture de la tablette. Le nombre d'animaux différents représentés sur les vignettes est égal à n et on suppose que ces animaux sont répartis de façon équiprobable entre les tablettes.

Un collectionneur achète des tablettes jusqu'à obtenir l'ensemble de la collection, c'est-à-dire pour chacun des n animaux au moins une vignette le représentant.
Soit $k \in [\![1; n]\!]$. On note T_k la variable aléatoire égale au nombre d'achats effectués par le collectionneur au moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents, éventuellement avec des doublons.
On note Z_k le nombre d'achats effectués par le collectionneur entre le moment où sa collection comporte pour la première fois $k-1$ animaux différents et le moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents.

XXI. En utilisant les notations précédentes, désigner la variable aléatoire qui modélise le nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection.

XXII. Déterminer la loi de T_1.

XXIII. **1.** On suppose que q est un entier supérieur ou égal à 2. Calculer la probabilité qu'un collectionneur obtienne toujours le même animal au cours de ses q premiers achats.

2. En déduire, pour tout $q \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(T_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}.$$

3. En déduire la loi de T_2.

4. On suppose que la collection contient 100 animaux. Calculer le nombre minimal d'achats que le collectionneur doit effectuer pour que la probabilité d'obtenir deux animaux différents soit supérieure ou égale à 0,99.

5. Pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$, justifier que

$$Z_k = \begin{cases} T_1 \text{ si } k = 1, \\ T_k - T_{k-1} \text{ si } k \geqslant 2. \end{cases}$$

6. En déduire, pour $k \geqslant 2$, une expression de T_k en fonction des Z_i.

7. Démontrer que Z_k suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Z_k.

8. En déduire que

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = nH_n.$$

9. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Tournez la page S.V.P.

XXIV. On admet que les variables aléatoires Z_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes.

1. Exprimer $\mathbb{V}(T_n)$ en fonction de n, B_n et H_n.

2. En déduire que $\mathbb{V}(T_n) \leqslant \dfrac{n^2\pi^2}{6}$.

XXV. Démontrer que, pour tout nombre réel $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geqslant \lambda n \ln n\right) \leqslant \frac{\pi^2}{6\lambda^2(\ln n)^2}.$$

XXVI. Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0,

$$\mathbb{P}\left(T_n \geqslant nH_n + n\ln n\right) \leqslant 0,01.$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 0188 – D'après documents fournis