MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

EBE MAT 2

SESSION 2019

CAPES
CONCOURS EXTERNE
TROISIEME CONCOURS
ET CAFEP CORRESPONDANTS

Section : MATHÉMATIQUES

SECONDE ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours externe du CAPES de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EBE	1300E	102	0530

► **Concours externe du CAFEP/CAPES de l'enseignement privé :**

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EBF	1300E	102	0530

► **Troisième concours du CAPES de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EBV	1300E	101	2611

► **Troisième concours CAFEP/CAPES de l'enseignement privé** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EBW	1300E	101	2611

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A : logarithme de base a

Rappel. On appelle *logarithme* toute fonction f définie sur $]0,+\infty[$, dérivable, telle que :

- il existe un nombre réel a non nul tel que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{a}{x}.$$

- $f(1) = 0$.

I. Soit a un nombre réel non nul. Justifier qu'il existe un unique logarithme, que l'on notera f_a, tel que, pour tout nombre réel $x > 0$, $f_a'(x) = \dfrac{a}{x}$. Lorsque $a = 1$, on utilise la notation ln (logarithme néperien).

II. Pour tout nombre réel a non nul, exprimer f_a à l'aide de ln.

III. Montrer que, pour tout nombre réel a non nul, tous nombres réels $x, y > 0$,

$$f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y).$$

Indication : on pourra étudier la fonction définie par $x \mapsto f_a(xy)$.

IV. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$,

$$f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x).$$

V. Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel. Montrer que $f_a(x^r) = r f_a(x)$.
Indication : on pourra commencer par le cas où r est un entier naturel, puis celui où r est un entier relatif, avant de conclure dans le cas où r est un nombre rationnel.

VI. Montrer que la fonction ln est strictement croissante.

VII. Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 de la fonction ln.

VIII. Montrer que la fonction ln est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

IX. Comment peut-on généraliser les résultats des questions VI. et VIII. au cas des logarithmes f_a ?

Partie B : logarithme décimal

X. Montrer qu'il existe un unique logarithme f_a tel que $f_a(10) = 1$. Ce logarithme est noté Log et est appelé logarithme décimal.

Tournez la page S.V.P.

B

XI. Soit N un nombre entier naturel dont l'écriture en base dix possède n chiffres. Déterminer la partie entière de $\mathrm{Log}(N)$.

XII. Les exercices suivants sont proposés à une classe de terminale scientifique :

> **1.** Combien le nombre 4^{2019} possède t-il de chiffres ?
>
> **2.** Le niveau sonore L (en dB) s'exprime en fonction de l'intensité I (en $\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$) selon la formule
> $$L = 10\,\mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$
> où $I_0 = 10^{-12}\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ correspond à l'intensité sonore minimale à laquelle l'oreille est sensible pour un son de fréquence 1000Hz.
>
> **a.** Calculer le niveau sonore correspondant à une intensité sonore de $10^{-5}\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.
>
> **b.** Quel est l'effet sur l'intensité sonore d'une augmentation du niveau sonore de 10dB ?
>
> **3.** Une balle lancée d'une hauteur de 2m atteint après chaque rebond 70% de sa hauteur précédente et cesse de rebondir quand sa hauteur n'excède pas 1mm. Au bout de combien de rebonds cela se produira-t-il ?

Pour chacun de ces trois exercices, présentez une rédaction de la solution, telle que vous l'exposeriez à une classe de terminale scientifique.

Partie C : calcul approché de valeurs du logarithme népérien

XIII. Montrer que pour tout nombre réel $x \neq -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

XIV. En déduire que pour tout nombre réel $x > -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t.$$

XV. On suppose que $x \geqslant 0$. Montrer que

$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

XVI. On suppose que $-1 < x \leqslant 0$. Montrer que

$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

XVII. En déduire que, si $-1 < x \leqslant 1$, la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est convergente et que sa somme vaut $\ln(1+x)$. On pourra raisonner par disjonction de cas.

XVIII. Justifier que la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ diverge lorsque $|x| > 1$.

XIX. À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur de n pour laquelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-8} près pour :

1. $x = \dfrac{1}{3}$.

2. $x = \dfrac{1}{8}$.

3. $x = 1$.

XX. **1.** Justifier que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

2. Soit p un entier naturel non nul. On considère $R_p = \displaystyle\sum_{k=2p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que

$$R_p = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

3. Soit N un entier naturel non nul. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

4. Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\int_{p}^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2}.$$

5. En déduire que pour tout entier naturel non nul p,

$$\frac{1}{4p+4} \leqslant R_p \leqslant \frac{1}{4p-2}.$$

6. Montrer que R_p est équivalent à $\dfrac{1}{4p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

XXI. On se propose de calculer des approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

1. Exprimer $\ln(2)$ et $\ln(3)$ à l'aide de $\ln\left(1 + \dfrac{1}{3}\right)$ et $\ln\left(1 + \dfrac{1}{8}\right)$.

2. Les calculs de la question XIX. ont donné les valeurs approchées à 10^{-8} près suivantes :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) \approx 0,28768207 \qquad \ln\left(1 + \frac{1}{8}\right) \approx 0,11778304.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(2)$ et $\ln(3)$. Donner la précision de ces résultats.

XXII. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

XXIII. En déduire que si $x \in [0,1[$, alors

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{1}{1-x^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

XXIV.

1. Quelle valeur de x doit-on choisir pour déduire de la question précédente une valeur approchée de $\ln(2)$? de $\ln(3)$?
2. À l'aide de ces valeurs de x, donner une valeur de n permettant d'obtenir des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ à 10^{-8} près.
3. Comparer cette méthode d'approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ avec celle de la question XXI.

XXV. On se propose de calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout nombre entier $n > 1$.

1. Expliquer pourquoi il suffit de calculer des valeurs de $\ln(p)$ pour p nombre premier.
2. Décrire une méthode pour calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout entier n tel que $2 \leqslant n \leqslant 20$.

Problème n° 2

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres relatifs et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. L'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls est noté $\mathbb{Q}^+$.

Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

On rappelle que, pour tout élément x non nul de $\mathbb{Q}^+$, il existe un unique couple (a, b) d'entiers naturels premiers entre eux tel que $x = \dfrac{a}{b}$. Le quotient $\dfrac{a}{b}$ est la forme fractionnaire irréductible (en abrégé, FFI) de x. Par convention, la forme fractionnaire irréductible de 0 est $\dfrac{0}{1}$.

Partie A : Somme des cancres

Définition. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$. Leur FFI respectives sont notées $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ (a, b, c, d sont des entiers naturels, b et d sont non nuls, a et b sont premiers entre eux, c et d sont premiers entre eux). La somme des cancres de x et y est définie par :

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d}.$$

I. Question de cours. Soient a, b, n trois entiers relatifs, a et b étant non nuls. Montrer que $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(a, b + na)$.

II. Soient x et y deux rationnels positifs.

1. Montrer que $x \oplus y$ est un rationnel positif.

2. On note $\dfrac{a}{b}$ la FFI de x et $\dfrac{c}{d}$ la FFI de y. La FFI de $x \oplus y$ est-elle toujours $\dfrac{a+c}{b+d}$?

III. Chacune des affirmations suivantes est soit vraie soit fausse. Préciser pour chacune ce qu'il en est, en justifiant la réponse.

1. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus 0 = x$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus x = x$.

3. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus y = y \oplus x$.

4. Pour tous $x, y, z, \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.

5. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, $\dfrac{1}{x} \oplus \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x \oplus y}$.

6. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, pour tout entier naturel n, $(n + x) \oplus (n + y) = n + (x \oplus y)$.

IV. Soit x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$.

1. Montrer que $x \oplus y = x$ si, et seulement si, $x = y$.

2. Montrer que si $x < y$, alors $x < x \oplus y < y$.

V. Interprétation géométrique. On se place dans un plan euclidien, muni d'un repère (O, I, J). Pour $x \in \mathbb{Q}^+$, de FFI $\frac{a}{b}$, on note M_x le point de coordonnées (b, a).

1. Soient $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls. Montrer que O, $M_{x \oplus y}$ et le milieu de $[M_x M_y]$ sont alignés.

2. Qu'est la droite $(OM_{x\oplus y})$ pour le triangle $OM_x M_y$?

VI. Soient $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, de FFI respectives $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. On suppose que $a > c$ et $b < d$. En utilisant l'aire de rectangles et de triangles rectangles, montrer que l'aire du triangle $OM_x M_y$ est

$$\frac{ad - bc}{2}.$$

Partie B : suites de Farey

Définition : pour tout entier $n \geqslant 1$, la suite de Farey d'ordre n est la suite dont les termes sont, rangés dans l'ordre croissant, tous les rationnels positifs compris entre 0 et 1 dont la FFI a un dénominateur inférieur ou égal à n. On note F_n cette suite. Par exemple :

$$F_1 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_2 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right).$$

VII. Déterminer F_4, F_5 et F_6.

VIII. Soit $x \in \mathbb{Q}^+$ et soit n un entier naturel non nul. Montrer que x est un terme de la suite F_n si, et seulement si, il existe $a, b \in \mathbb{N}$, b non nul, tels que $x = \frac{a}{b}$ et $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

IX. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que les termes de F_n sont aussi des termes de F_{n+1}.

X. Montrer que si x est un terme de la suite F_n alors $1 - x$ également.

XI. On considère l'application suivante :

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{Q}^+ & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x & \mapsto & (a, b) \text{ tel que } \frac{a}{b} \text{ est la FFI de } x. \end{array} \right.$$

1. Montrer que θ est injective.

2. Montrer que θ n'est pas surjective.
Indication : on pourra montrer que $(2, 2)$ n'appartient pas à $\theta(\mathbb{Q}^+)$.

3. Soit x un élément de la suite F_n, non nul. Montrer que $\theta(x) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$.

4. On note f_n le nombre de termes de F_n. Montrer que $f_n \leqslant n^2 + 1$ et que l'égalité n'est satisfaite que si $n = 1$.

XII. Soit n un entier naturel non nul. L'indicatrice d'Euler de n est l'entier défini par

$$\varphi(n) = \text{card}(\{k \in [\![1, n]\!],\ \text{PGCD}(k, n) = 1\}).$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

Partie C : éléments consécutifs des suites de Farey

XIII. Soit n un entier naturel non nul et soient x et y deux termes consécutifs de la suite F_{n+1}. On suppose qu'aucun des deux n'est un terme de F_n.

1. Montrer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $x = \dfrac{k}{n+1}$ et $y = \dfrac{k+1}{n+1}$.

2. Montrer que $x < \dfrac{k}{n} < y$.

3. Montrer que si x et y sont deux termes consécutifs de la suite F_{n+1}, alors au moins l'un des deux est un élément de F_n.

XIV. Le but de cette question est de démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, la propriété (P_n) : « si x et y sont, dans cet ordre, deux termes consécutifs de la suite de Farey F_n, dont les FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, alors $bc - ad = 1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre m strictement supérieur à n. »

1. Démontrer (P_1).

2. On suppose que, pour un certain entier $n \geqslant 1$, la propriété (P_n) est vraie. Soit alors x et y deux termes consécutifs (dans cet ordre) de F_{n+1}, dont les FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$. On rappelle que, dans ce cas, x ou y est un élément de F_n.

a. Montrer que si x et y sont des éléments de F_n, alors $bc - ad = 1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à $n + 1$.

b. On suppose dans tout ce qui suit que x est un terme de F_n et que y n'est pas un terme de F_n. Soit z le successeur de x dans F_n et $z = \dfrac{r}{s}$ la FFI de z. Montrer que $\dfrac{a+r}{b+s}$ est une fraction irréductible comprise entre x et z.

c. Montrer que $x < y < z$ puis que $y = x \oplus z$.

d. En déduire que $c = a + r$ et $d = b + s$.

e. Déduire que $bc - ad = rd - sc = 1$.

f. Soit $\dfrac{p}{q}$ la première fraction irréductible qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey F_m d'ordre strictement m supérieur à $n+1$. On pose $u = qc-pd$ et $v = pb - aq$. Montrer que u et v sont des entiers naturels non nuls et que

$$\begin{cases} au + cv &= p, \\ bu + dv &= q. \end{cases}$$

g. Déduire que $x \oplus y$ apparaît dans une suite $F_{m'}$ avec $n + 1 < m' \leqslant m$ et que

$$x < x \oplus y < y.$$

h. En déduire que $x \oplus y = \dfrac{p}{q}$.

3. Conclure.

XV. Applications.

1. Montrer que si $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ sont les FFI de deux termes successifs d'une suite de Farey F_n, alors $\dfrac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible.

2. Soient x, y et z trois termes consécutifs d'une suite de Farey F_n de FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{e}{f}$. Montrer que $bc - ad = de - fc$ puis que $y = x \oplus z$.