MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

EAI MAT 1

SESSION 2024

AGRÉGATION
Concours interne et CAER

Section
MATHÉMATIQUES

Première épreuve

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

A

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie. Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

AGRÉGATION INTERNE
MATHÉMATIQUES

► Concours interne de l'Agrégation de l'enseignement public :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAI	1300A	101	0540

► Concours interne du CAER / Agrégation de l'enseignement privé :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAH	1300A	101	0540

IMPRIMERIE NATIONALE – 24 0350 – D'après documents fournis

Notations et rappels

On désigne respectivement par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}$ l'ensemble des entiers naturels, l'anneau des entiers relatifs et le corps des nombres complexes. On désigne par $\mathbb{C}[X]$ la $\mathbb{C}$-algèbre des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Pour $i, j \in \mathbb{N}$ avec $i \leqslant j$, on désigne par $[\![i, j]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre i et j.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathrm{End}(E)$ l'algèbre des endomorphismes linéaires de E et $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des automorphismes linéaires de E. Pour $f \in \mathrm{End}(E)$, la trace de f est notée $\mathrm{Tr}(f)$.

Soit G un groupe fini. Son ordre (c'est-à-dire son cardinal) esr noté $|G|$.

Soient $(G, \cdot)$ un groupe et x un élément de G. Le sous-groupe de G engendré par x est noté $\langle x \rangle$.

Soient $(G, \cdot)$ un groupe et H un sous-groupe distingué de G. Le groupe quotient de G par H est noté G/H.

Pour n un entier naturel non nul, on désigne par $\mathfrak{S}_n$ le n-ième groupe symétrique, c'est-à-dire le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Dans tout le sujet, les éléments de $\mathbb{C}^n$, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, seront notés sous forme de vecteurs colonnes.

On rappelle le résultat suivant :

Lemme 1. ***(Lemme des noyaux)**. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $f \in \mathrm{End}(E)$ et $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes deux-à-deux premiers entre eux. On pose*

$$P = \prod_{i=1}^{k} P_i.$$

Alors

$$\mathrm{Ker}(P(f)) = \mathrm{Ker}(P_1(f)) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_k(f)).$$

Ce problème est découpé en six parties. La première partie est formée de trois exercices préliminaires. Les parties suivantes sont consacrées à l'étude des représentations des groupes finis et en particulier à l'établissement des théorèmes de Maschke et de Kronecker.

B

Première partie

Cette première partie contient trois exercices dont les résultats pourront être utilisés dans les parties suivantes.

Exercice 1

Dans tout cet exercice, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Les réponses devront être soigneusement justifiées.
   (a) Tout endomorphisme de E est diagonalisable.
   (b) Soient f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Il existe un sous-espace vectoriel F' de E stable par f tel que $E = F \oplus F'$.
   (c) Soit f un endomorphisme de E diagonalisable. Alors f^2 est diagonalisable.
   (d) Soit f un endomorphisme de E tel que f^2 est diagonalisable. Alors f est diagonalisable.
   (e) Soient f et g deux endomorphismes de E. Alors $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(g \circ f)$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f désigne un endomorphisme de E.

2. **(Question de cours)**. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est diagonalisable.
   (b) f est annulé par un polynôme P dont les racines sont toutes de multiplicité 1.
   (c) Les racines du polynôme minimal de f sont toutes de multiplicité 1.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. On considère l'endomorphisme $f_{|F}$ de F, défini par
$$f_{|F} : \begin{cases} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{cases}$$
   Montrer que si f est diagonalisable, alors $f_{|F}$ est diagonalisable.
4. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f_1, \ldots, f_k$ des endomorphismes de E, où k est un entier naturel non nul. On suppose que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, f_i est diagonalisable et que pour tous $i, j \in [\![1, k]\!]$, $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$.
   (a) On suppose dans cette question que $k \geqslant 2$. Soit F un sous-espace propre de f_k. Montrer que F est stable par $f_1, \ldots, f_{k-1}$.
   (b) On suppose dans cette question que $k \geqslant 2$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, l'endomorphisme de F induit par f_i est diagonalisable.
   (c) Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à $f_1, \ldots, f_k$.

Exercice 3

Définition 2. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien fini. L'exposant de G est le plus petit multiple commun (PPCM) des ordres des éléments de G. On le note* $\exp(G)$.

Dans tout cet exercice, $(G, \cdot)$ désigne un groupe abélien fini. Le but de l'exercice est de montrer que G possède un élément d'ordre $\exp(G)$.

5. Soit g un élément de G, dont l'ordre est noté n et soit $d \in \mathbb{N}$, divisant n. Déterminer l'ordre de g^d.
6. Soit g un élément de G, dont l'ordre est noté n et soit $d \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ordre de g^d.
7. Soient g et h deux éléments de G, d'ordre respectif k et l premiers entre eux.
   (a) Montrer que $\langle g\rangle \cap \langle h\rangle$ est réduit à l'élément neutre de G.
   (b) En déduire l'ordre de $g \cdot h$.
8. Soient $g_1, \dots, g_n$ des éléments de G, d'ordre respectif $k_1, \dots, k_n$ deux-à-deux premiers entre eux. Montrer que l'ordre de $g_1 \cdot \ldots \cdot g_n$ est $k_1 \ldots k_n$.
9. On décompose l'exposant de G en produit de nombres premiers, sous la forme

$$\exp(G) = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n},$$

   avec $p_1, \dots, p_n$ des nombres premiers deux-à-deux distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des entiers supérieurs ou égaux à 1.
   (a) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que G possède un élément d'ordre un multiple de $p_i^{\alpha_i}$ puis que G possède un élément d'ordre $p_i^{\alpha_i}$.
   (b) Montrer que G a un élément d'ordre $\exp(G)$.

Deuxième partie : définition et exemples

Définition 3. *Soient $(G, \cdot)$ un groupe (non nécessairement fini) et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel **de dimension finie**. Une représentation de G d'espace E est un homomorphisme de groupes θ de G dans* $\mathrm{GL}(E)$.

On notera que les espaces des représentations que l'on considèrera par la suite sont toujours de dimension finie.

10. *Quelques exemples.*
   (a) Soit θ une représentation d'un groupe $(G, \cdot)$ d'espace E.
      i. Déterminer $\theta(e_G)$, où e_G est l'élément neutre du groupe $(G, \cdot)$.
      ii. Pour $g \in G$, déterminer $\theta(g^{-1})$ en fonction de $\theta(g)$.
   (b) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et f un automorphisme de E. Montrer que l'application suivante est une représentation du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ d'espace E :

$$\theta_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ k & \longmapsto & f^k. \end{array} \right.$$

   (c) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de E tel que $f^n = \mathrm{Id}_E$. Montrer que l'application suivante est une représentation du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ d'espace E :

$$\theta_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ \bar{k} & \longmapsto & f^k. \end{array} \right.$$

   (d) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, soit f_λ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ défini par

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \qquad f_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix}.$$

   Montrer que l'application suivante est une représentation du groupe $(\mathbb{C}, +)$ d'espace $\mathbb{C}^2$:

$$\theta_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2) \\ \lambda & \longmapsto & f_\lambda. \end{array} \right.$$

(e) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_3$. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ défini par

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \qquad g_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ x_{\sigma^{-1}(2)} \\ x_{\sigma^{-1}(3)} \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'application suivante est une représentation du groupe $\mathfrak{S}_3$ d'espace $\mathbb{C}^3$:

$$\theta_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_3 & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3) \\ \sigma & \longmapsto & g_\sigma. \end{array} \right.$$

Définition 4. *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation d'un groupe $(G, \cdot)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est un sous-espace invariant de θ si pour tout $g \in G$,*

$$\theta(g)(F) \subseteq F.$$

11. (a) Montrer que si F est un sous-espace invariant de θ, alors pour tout $g \in G$, $\theta(g)$ induit une bijection de F dans F. *Par abus de notation, cette bijection sera notée $\theta(g)_{|F}$.*

    (b) Montrer que si F est un sous-espace invariant de θ, alors l'application suivante est une représentation de G :

    $$\theta_{|F} : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(F) \\ g & \longmapsto & \theta(g)_{|F}. \end{array} \right.$$

    (c) Déterminer les sous-espaces invariants de la représentation θ_3 du groupe $\mathbb{C}$.
    Indication : on pourra considérer les espaces propres de l'endomorphisme $\theta_3(1)$.

    (d) On considère la représentation θ_4 de $\mathfrak{S}_3$.

    i. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Montrer que F est sous-espace invariant de θ.

    ii. Déterminer une base de F et déterminer les matrices de $\theta_{4|F}(\sigma)$ dans cette base pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$.

    iii. Déterminer un sous-espace F' invariant de θ, supplémentaire de F dans E.

Définition 5. *Soient $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ et $\theta' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E')$ deux représentations d'un même groupe G. Un homomorphisme de représentations de θ vers θ' est une application linéaire $f : E \longrightarrow E'$ telle que pour tout $g \in G$, $f \circ \theta(g) = \theta'(g) \circ f$. Si de plus f est bijective, on dira que f est un isomorphisme de représentations de θ vers θ'. Enfin, on dira que θ et θ' sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de représentations de θ vers θ'.*

12. Soient $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ et $\theta' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E')$ deux représentations d'un même groupe G et f un homomorphisme de représentations de θ vers θ'.

    (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace invariant de θ.

    (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace invariant de θ'.

    (c) On suppose que $E = E'$ et que $\theta = \theta'$. Montrer que les espaces propres de f sont des sous-espaces invariants de θ.

Définition 6. *Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation d'un groupe fini G. On dira que θ est irréductible si E est non nul et si les seuls espaces invariants de θ sont E et $\{0_E\}$.*

13. Soient $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ et $\theta' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E')$ deux représentations irréductibles d'un même groupe fini G et f un homomorphisme de représentations de θ vers θ'.

   (a) ***(Lemme de Schur)***.

      i. Montrer que f est soit nul, soit un isomorphisme.

      ii. Dans le cas particulier où $\theta = \theta'$, montrer qu'il existe un nombre complexe λ tel que $f = \lambda \mathrm{Id}_E$.

   (b) Soit $h : E \longrightarrow E'$ une application linéaire quelconque.

      i. Montrer que l'application suivante est un homomorphisme de représentations de θ vers θ' :
$$f = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta'(g) \circ h \circ \theta(g^{-1}).$$

      ii. Montrer que si θ et θ' ne sont pas isomorphes, alors $f = 0$.

      iii. Dans le cas particulier où $\theta = \theta'$, montrer que
$$f = \frac{\mathrm{Tr}(h)}{\dim(E)} \mathrm{Id}_E.$$

      Indication : on pourra d'abord montrer que f est un multiple de Id_E puis considérer sa trace.

Troisième partie : théorème de Maschke

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 7. ***(Théorème de Maschke)***. *Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation d'un groupe fini d'espace E. Il existe des sous-espaces invariants $F_1, \dots, F_k$ de θ tels que :*
— $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$.
— *Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, la représentation $\theta_{|F_i}$ est irréductible.*

14. Soient $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation d'un groupe fini G et F un sous-espace invariant de θ.

   (a) Justifier l'existence d'un supplémentaire F' de F dans E.

   (b) Soit p la projection sur F parallèlement à F'. On considère l'endomorphisme de E défini par
$$q = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta(g) \circ p \circ \theta(g^{-1}).$$

   (c) Montrer que pour tout $x \in F$, $q(x) = x$.

   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(q) = F$ puis que q est une projection sur F.

   (e) Montrer que q est un homomorphisme de représentations de θ vers elle-même.

   (f) Montrer que $\mathrm{Ker}(q)$ est un sous-espace invariant de θ et que $E = F \oplus \mathrm{Ker}(q)$.

15. Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation de G dont l'espace E est de dimension 1. Montrer que θ est irréductible.

16. Démontrer le théorème de Maschke. *Indication :* on pourra procéder par récurrence sur la dimension de E.

Quatrième partie : le cas des groupes abéliens finis

Dans toute cette partie, G désigne un groupe abélien fini. Son ordre est noté N.

17. Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation irréductible de G d'espace E.
    (a) Montrer que pour tout $g \in G$, $\theta(g)^N = \mathrm{Id}_E$. En déduire que pour tout $g \in G$, $\theta(g)$ est diagonalisable.
    (b) Montrer que les endomorphismes $\theta(g)$ de E, où g parcourt G, ont un vecteur propre commun.
    (c) En déduire que E est de dimension 1.
18. Justifier que lorsque E est de dimension 1, alors $\mathrm{GL}(E)$ est isomorphe au groupe $\mathbb{C}^*$.

Définition 8. *Soit G un groupe abélien fini. L'ensemble des homomorphismes de G dans $\mathbb{C}^*$ est noté $\widehat{G}$. Les éléments de $\widehat{G}$ sont appelés les caractères de G.*

Ainsi, les représentations irréductibles de G s'identifient aux caractères de G.

19. Montrer que l'application suivante munit $\widehat{G}$ d'une loi de groupe abélien :

$$\left\{\begin{array}{ccl} \widehat{G}\times\widehat{G} & \longrightarrow & \widehat{G} \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & \alpha\cdot\beta : \left\{\begin{array}{ccl} G & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ g & \longmapsto & \alpha(g)\beta(g). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ainsi, $(\widehat{G},\cdot)$ est un groupe abélien, appelé groupe des caractères de G.

20. On suppose dans cette question que G est le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
    (a) Montrer que l'application suivante est un élément de $\widehat{G}$:

$$\alpha_1 : \left\{\begin{array}{ccl} G & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \overline{k} & \longmapsto & \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}. \end{array}\right.$$

    (b) Montrer que $\widehat{G}$ est un groupe cyclique d'ordre n, engendré par α_1.
    Indication : si $\alpha \in \widehat{G}$, on pourra considérer $\alpha(\overline{1})$.
21. Déterminer $\widehat{G}$ lorsque G est le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Cinquième partie : prolongement des caractères et théorème de Kronecker

Dans toute cette partie, G désigne un groupe abélien fini.

22. Soit H un sous-groupe de G et soit $\alpha \in \widehat{H}$. Le but de cette question est de montrer qu'il existe $\alpha' \in \widehat{G}$ tel que $\alpha'_{|H} = \alpha$.
    (a) On suppose H est différent de G. Soit alors x un élement de G n'appartenant pas à H. On considère le sous-groupe K de G engendré par les éléments de H et par x. Montrer que
    $$K = \{hx^p \mid h \in H,\ p \in \mathbb{Z}\}$$
    et en déduire que K/H est un groupe cyclique non nul.
    L'ordre de K/H sera noté r.
    (b) Montrer que tout élément g de K s'écrit de façon unique $g = hx^p$, avec $h \in H$ et $p \in [\![0, r-1]\!]$.

(c) Justifier que $x^r \in H$.
On pose alors $z = \alpha(x^r)$.

(d) Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$ tel que $\omega^r = z$. Pour $h \in H$ et $p \in [\![0, r-1]\!]$, on pose $\tilde{\alpha}(hx^p) = \alpha(h)\omega^p$. Montrer que cela définit un caractère $\tilde{\alpha} \in \widehat{K}$ prolongeant α de H à K.

(e) Conclure. *Indication* : on pourra raisonner par récurrence sur $[G : H] = \dfrac{|G|}{|H|}$.

23. *Le but de cette question est de démontrer que $|G| = |\widehat{G}|$.*

(a) Conclure lorsque G est cyclique.

(b) On suppose G non cyclique. Soit x un élément de G différent de l'élément neutre et soit $H = \langle x \rangle$. Montrer que l'application suivante est un homomorphisme surjectif de groupes :

$$\theta : \begin{cases} \widehat{G} & \longrightarrow & \widehat{H} \\ \alpha & \longmapsto & \alpha_{|H}. \end{cases}$$

(c) Soit $\alpha \in \mathrm{Ker}(\theta)$. On pose

$$\overline{\alpha} : \begin{cases} G/H & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \overline{g} & \longmapsto & \alpha(g). \end{cases}$$

Montrer que $\overline{\alpha}$ est une application bien définie et qu'il s'agit d'un élément de $\widehat{G/H}$.

(d) Montrer que $\mathrm{Ker}(\theta)$ est isomorphe à $\widehat{G/H}$.

(e) Conclure.

Le but de la question 24 est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 9. ***(Théorème de Kronecker).*** *Si G est un groupe abélien fini non réduit à son élément neutre, alors il existe des entiers naturels $N_1, \ldots, N_k \geqslant 2$, avec N_k divisant N_{k-1}, …, N_2 divisant N_1, tels que G est isomorphe au groupe*

$$\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z}/N_k\mathbb{Z}$$

Une telle écriture (dont on peut montrer qu'elle est unique) s'appelle décomposition de Kronecker de G.

24. *On considère dans cette question un groupe abélien G fini. Son exposant (voir la première partie) est noté N. D'après la première partie, G possède un élément x d'ordre N. On pose $H = \langle x \rangle$.*

(a) Justifier que H possède un caractère $\alpha \in \widehat{H}$ injectif.

(b) Justifier qu'il existe $\beta \in \widehat{G}$ tel que $\beta_{|H} = \alpha$.

(c) Monter que $\beta(G) = \alpha(H) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^N = 1\}$.

(d) Justifier que l'exposant de $\mathrm{Ker}(\beta)$ divise N.

(e) Montrer G est isomorphe à $H \times \mathrm{Ker}(\beta)$.

(f) Conclure.

25. Donner une décomposition de Kronecker du groupe abélien $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

 Tournez la page S.V.P.

Sixième partie : applications centrales

Définition 10. *Soit $(G,\cdot)$ un groupe fini. Une application λ de G dans $\mathbb{C}$ est dite centrale si pour tous $g,h \in G$, $\lambda(g\cdot h) = \lambda(h\cdot g)$. L'ensemble des applications centrales de G est noté $\mathcal{C}(G)$.*

Dans toute cette partie, on considère un groupe fini $(G,\cdot)$.

26. (a) Montrer que $\mathcal{C}(G)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de G dans $\mathbb{C}$.

    (b) Soit $\lambda : G \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. Montrer que λ est centrale si, et seulement si, elle est constante sur chaque classe de conjugaison de G.

    (c) Soit C une classe de conjugaison de G. On considère l'application

    $$\iota_C : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } g \in C, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

    Montrer que ces applications forment une base de $\mathcal{C}(G)$. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(G)$.

27. Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation de G.

    (a) Montrer que l'application suivante est centrale :

    $$\chi_\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longmapsto & \mathrm{Tr}(\theta(g)). \end{array} \right.$$

    (b) Montrer que pour tout $g \in G$, $\theta(g)$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines de l'unité.

    (c) En déduire que pour tout $g \in G$, $\chi_\theta(g^{-1}) = \overline{\chi_\theta(g)}$.

28. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathcal{C}(G)$, on pose

    $$\langle \lambda, \mu \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\lambda(g)}\mu(g).$$

    Montrer que cela définit une forme hermitienne définie positive sur $\mathcal{C}(G)$.

29. Soient $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ et $\theta' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E')$ deux représentations irréductibles d'un même groupe G. La dimension de E est notée n et la dimension de E' est notée n'. On fixe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et E'. Pour tout $g \in G$, la matrice de $\theta(g)$ dans la base $\mathcal{B}$ est notée $M_{\mathcal{B}}(\theta(g))$, la matrice de $\theta'(g)$ dans la base $\mathcal{B}'$ est notée $M_{\mathcal{B}'}(\theta'(g))$ et on pose

    $$M_{\mathcal{B}}(\theta(g)) = (a_{i,j}(g))_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \qquad M_{\mathcal{B}'}(\theta'(g)) = (a'_{k,l}(g))_{1\leqslant k,l\leqslant n'}.$$

    (a) Exprimer $\langle \chi_{\theta'}, \chi_\theta \rangle$ en fonction des coefficients $a_{i,j}(g)$ et $a'_{k,l}(g)$ des matrices $M_{\mathcal{B}}(\theta(g))$ et $M_{\mathcal{B}'}(\theta'(g))$.

    (b) Soit $X = (x_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n',\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_{n',n}(\mathbb{C})$ une matrice et $h : E \longrightarrow E'$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est X. On pose

    $$f = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \theta'(g) \circ h \circ \theta(g^{-1}).$$

    Exprimer les coefficients de la matrice $Y = (y_{i,l})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n',\\ 1\leqslant l\leqslant n}}$ de la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

    (c) On suppose que θ et θ' ne sont pas isomorphes. Montrer que pour tous $i,j \in [\![1,n']\!]$, pour tous $k,l \in [\![1,n]\!]$,

    $$\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} a'_{i,j}(g) a_{k,l}(g^{-1}) = 0.$$

    En déduire que $\langle \chi_\theta, \chi_{\theta'} \rangle = 0$. *Indication* : on pourra utiliser le lemme de Schur.

(d) On suppose que $E = E'$ et que $\theta = \theta'$. Dans ce cas, on prend $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

i. Montrer que pour $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a'_{i,j}(g) a_{k,l}(g^{-1}) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ si } i = l \text{ et } j = k, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Indication : on pourra utiliser le lemme de Schur.

ii. En déduire que $\langle \chi_\theta, \chi_{\theta'} \rangle = 1$.

(e) Soient $\theta_1, \ldots, \theta_k$ des représentations irréductibles de G, deux-à-deux non isomorphes. Montrer que $(\chi_{\theta_i})_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est une famille libre de $\mathcal{C}(G)$ et en déduire une majoration de k.

Ainsi, le nombre de représentations irréductibles de G à isomorphisme près est fini.

30. Montrer que si G est abélien, le nombre de représentations irréductibles à isomorphisme près de G est égal à $|G|$.
31. Montrer que si θ et θ' sont isomorphes, alors $\langle \chi_\theta, \chi_{\theta'} \rangle = 1$.
32. Soient $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation d'un groupe fini G et soit $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_k$ une décomposition de E en sous-espaces invariants irréductibles, obtenue avec le théorème de Maschke.

   (a) Exprimer χ_θ en fonction des $\chi_{\theta_{|F_i}}$.

   (b) Soit $\theta' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E')$ une représentation irréductible de G. Montrer que le nombre de F_i tels que θ' et $\theta_{|F_i}$ sont isomorphes est égal à $\langle \chi_{\theta'}, \chi_\theta \rangle$.
33. Soient θ et θ' deux représentations de G. Montrer que θ et θ' sont isomorphes si et seulement si $\chi_\theta = \chi_{\theta'}$.