MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

Liberté
Égalité
Fraternité

EAD MAT 1

SESSION 2025

AGRÉGATION

Concours externe spécial docteur

Section

MATHÉMATIQUES

Composition de mathématiques

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents, sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. Il est possible d'utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

L'épreuve comporte deux parties :

— Une première partie, composée d'**exercices**. Les candidats sont invités à consacrer au moins un tiers du temps de l'épreuve de cette partie en cherchant à traiter les cinq exercices numérotés 1, 2, 3, 4 et 5.

— Un problème à traiter **au choix** parmi deux proposés : le Problème 1, plutôt orienté « Algèbre et Géométrie » ou bien le Problème 2, plutôt orienté « Analyse et Probabilités ». **Le candidat devra indiquer clairement sur sa copie le problème qu'il choisit. Seul ce choix sera pris en compte dans l'évaluation.** Au moins la moitié du temps de l'épreuve devrait être consacrée à l'un de ces problèmes.

Le barème tient compte de cette répartition indicative du temps à accorder à chaque partie.

Dans tout le sujet, pour tous entiers m et n tels que $m \leqslant n$, on note $[\![m, n]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 1

Pierre de Fermat avait conjecturé que 26 est le seul entier naturel qui peut à la fois s'écrire comme un carré augmenté de 1, car $26 = 5^2 + 1$, et comme un cube diminué de 1, car $26 = 3^3 - 1$.
Le but de cet exercice est de le démontrer en étudiant l'équation d'inconnues x, y dans $\mathbb{Z}$:

$$y^3 = x^2 + 2 \tag{1}$$

1. Soit A l'ensemble $\{a + ib\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
  (a) Démontrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
  (b) Démontrer que pour tout élément z de A, l'écriture $z = a+ib\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ est unique.
  (c) Soit z_1 dans A et z_2 dans $A\backslash\{0\}$. Démontrer qu'il existe (q, r) dans A^2 tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & z_2 \times q + r \\ |r| & < & |z_2| \end{array}\right.$$

  Indication : On pourra commencer par considérer le rapport $\dfrac{z_1}{z_2}$.
  (d) En déduire que A est un anneau principal.

2. On note $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau A, c'est-à-dire :

$$A^\times = \{z \in A,\ \exists z' \in A,\ z \times z' = 1\}$$

  (a) Démontrer : $\forall z \in A^\times, |z| = 1$.
  (b) En déduire $A^\times$.

3. Soit (x, y) dans $\mathbb{Z}^2$ une solution de (1).
  (a) Démontrer que $x + i\sqrt{2}$ et $x - i\sqrt{2}$ sont premiers entre eux dans A, c'est-à-dire que leurs seuls diviseurs communs dans A sont les éléments inversibles de A.
  (b) En déduire que :

$$\exists z \in A,\ x + i\sqrt{2} = z^3$$

4. Déterminer l'ensemble des couples (x, z) de $\mathbb{Z} \times A$ qui vérifient $z^3 = x + i\sqrt{2}$.

5. En déduire l'ensemble des solutions de (1) dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On considère la suite réelle récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0, où u_0 est un nombre réel strictement positif, et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

(a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$$

(b) Établir que la suite (u_n) admet une limite et expliciter cette limite.

(c) Démontrer que

$$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

(d) En déduire qu'il existe un nombre réel strictement positif ℓ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2) = \ell$$

et déterminer la valeur de ℓ.

(e) En déduire que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ell n}$$

2. Plus généralement, soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $]0, +\infty[$.
On considère la suite réelle récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme v_0, où v_0 est un nombre réel strictement positif, et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n).$$

On suppose que f vérifie les conditions suivantes :

— $\forall x > 0,\ f(x) > x$
— $\exists (\alpha, \beta) \in \,]-\infty, 1[\, \times \mathbb{R}^*$ tel que $f(x) = x + \beta x^\alpha + \underset{x\to+\infty}{o}(x^\alpha)$

(a) Déterminer le signe de β.

(b) Établir que la suite (v_n) admet une limite en $+\infty$ et expliciter cette limite.

(c) Démontrer qu'il existe un unique nombre réel γ, que l'on explicitera, tel que la suite $(v_{n+1}^\gamma - v_n^\gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel non nul que l'on déterminera.

(d) En déduire un équivalent simple de la suite (v_n).

Exercice 3

Dans cet exercice, on cherche à classifier, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 26.

1. Soit n un entier naturel tel que $n > 1$ et soit p un diviseur premier de n. On considère un groupe G d'ordre n, dont la loi est notée multiplicativement et dont l'élément neutre est noté e.

On considère :

$$E = \{(x_0, \ldots, x_{p-1}) \in G^p,\ x_0 x_1 \cdots x_{p-1} = e\}$$

(a) Calculer le cardinal de E et justifier qu'il est divisible par p.

On fait agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E de la façon suivante :

$$\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ \forall (x_0, \ldots, x_{p-1}) \in E,\ \bar{a} \cdot (x_0, \ldots, x_{p-1}) = (x_{\phi(a)}, x_{\phi(1+a)}, \ldots, x_{\phi(p-1+a)})$$

où $\bar{a}$ est la classe d'un entier a modulo p et où ϕ est l'application définie sur $\mathbb{Z}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\phi(k)$ est le reste de la division euclidienne de k par p.

(b) Démontrer qu'on définit bien ainsi une action du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E. En particulier, on démontrera que $\bar{a} \cdot (x_0, \ldots, x_{p-1})$ ne dépend pas du choix du représentant a de la classe $\bar{a}$.

(c) En appliquant l'équation aux classes à cette action de groupe, démontrer qu'il existe x dans $G \backslash \{e\}$ tel que $x^p = e$.

2. On considère désormais un groupe G d'ordre 26.

(a) Justifier l'existence dans G d'un élément d'ordre 2 et d'un élément d'ordre 13.

Soit a un élément d'ordre 2 et b un élément d'ordre 13 dans G. On note H le sous-groupe de G engendré par b.

(b) Quels sont les ordres des éléments de H ?

(c) Démontrer que si a et b commutent, alors G est un groupe cyclique.

(d) On suppose désormais que a et b ne commutent pas.

i. Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & bxb^{-1} \end{array}$$

est un automorphisme de G. En déduire que φ conserve l'ordre des éléments de G, c'est-à-dire que pour tout x dans G, $\varphi(x)$ et x ont le même ordre.

ii. Démontrer que tous les éléments d'ordre 13 de G appartiennent à H.
Indication : On pourra raisonner par l'absurde, et justifier que pour un élément c d'ordre 13 de $G \backslash H$, $\langle c \rangle \cap H = \{e\}$, où $\langle c \rangle$ est le sous-groupe de G engendré par c.

iii. Démontrer que tous les éléments de $G \backslash H$ sont d'ordre 2, puis que

$$\forall c \in G \backslash H,\ cH = G \backslash H$$

(e) Démontrer qu'à isomorphisme près, il existe au plus un groupe non abélien d'ordre 26.

(f) Démontrer qu'à isomorphisme près, il existe un et un seul groupe non abélien d'ordre 26.

3. Soit p un nombre premier impair. Démontrer qu'à isomorphisme près, il existe un et un seul groupe non abélien d'ordre $2p$.

Exercice 4

On désigne par ch la fonction *cosinus hyperbolique* et par sh la fonction *sinus hyperbolique*. On rappelle que pour tout z dans $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{ch}(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On rappelle que la transformée de Fourier de f est la fonction $\hat{f}$ définie par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x$$

Dans tout l'exercice, on considère la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$$

1. Justifier que la transformée de Fourier $\hat{g}$ est bien définie.

L'objectif de l'exercice est de calculer $\hat{g}$ de deux façons différentes.

2. **Première méthode de calcul.**

(a) Démontrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}(\xi) = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(x\xi)}{\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x$$

(b) En déduire que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}(\xi) = 4\int_{0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-(2n+1)x}\cos(x\xi)\right)\mathrm{d}x$$

(c) En déduire que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}(\xi) = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2 + \xi^2}$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit h_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, telle que

$$\forall t \in\,]-\pi, \pi[\,,\ h_x(t) = \mathrm{sh}(xt), \qquad \text{et} \qquad h_x(\pi) = 0$$

En utilisant la décomposition en série de Fourier de h_x, déterminer une expression de $\hat{g}(\xi)$.

3. **Seconde méthode de calcul.**
Soit $U = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{ch}(z) \neq 0\}$.
Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On considère la fonction j_ξ définie par :

$$\forall z \in U\,,\ j_\xi(z) = \frac{\mathrm{e}^{-iz\xi}}{\mathrm{ch}(z)}$$

On admet que la fonction j_ξ est holomorphe sur U.

(a) Déterminer les singularités de j_ξ. De quelle nature sont-elles ?

(b) Calculer le résidu de j_ξ en $\dfrac{i\pi}{2}$.

(c) En intégrant j_ξ sur un contour rectangulaire bien choisi entourant la singularité $\dfrac{i\pi}{2}$, déterminer une expression de $\hat{g}(\xi)$.

Exercice 5

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On s'intéresse au problème suivant : étant donné deux dés, dont les faces sont respectivement numérotées de 1 à n et de 1 à p, peut-on piper les dés de sorte que la somme des deux dés suive la loi uniforme sur $[\![2, n+p]\!]$?

1. **Un exemple :** On considère un dé cubique à 6 faces, numérotées de 1 à 6, et un dé icosaédral à 20 faces, numérotées de 1 à 20. On note X la variable aléatoire correspondant à la valeur donnée par le dé cubique et Y la variable aléatoire correspondant à la valeur donnée par le dé icosaédral. On suppose dans la suite que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.
   (a) On définit les a_i et les b_j de la façon suivante :
   $$\forall i \in [\![1, 6]\!],\ P(X = i) = a_i \qquad \forall j \in [\![1, 20]\!],\ P(Y = j) = b_j$$
   Donner l'expression des fonctions génératrices g_X et g_Y de X et Y.
   (b) Exprimer, en justifiant, la fonction génératrice g_{X+Y} de la variable aléatoire $X + Y$ en fonction de g_X et g_Y.
   (c) On suppose par l'absurde que $X + Y$ suit la loi uniforme sur $[\![2, 26]\!]$. Quelle est l'expression de g_{X+Y} ?
   (d) Conclure que $X + Y$ ne peut pas suivre la loi uniforme sur $[\![2, 26]\!]$.
2. **Cas général :** On considère un dé à n faces, numérotées de 1 à n, et un dé à p faces numérotées de 1 à p, avec $n \leqslant p$. On note X la variable aléatoire correspondant à la valeur donnée par le dé à n faces, et Y celle correspondant à la valeur donnée par le dé à p faces.
   On suppose que X et Y sont indépendantes et que les dés sont pipés de telle sorte que $X + Y$ suive la loi uniforme sur $[\![2, n+p]\!]$.
   Pour tout entier naturel i, soit $a_i = P(X = i)$ et $b_i = P(Y = i)$.
   Soit enfin g_X, g_Y et g_{X+Y} les fonctions génératrices respectives de X, Y et $X + Y$.
   (a) Justifier que g_X et g_Y sont définies sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe un unique couple (P_X, P_Y) de $\mathbb{R}[X]^2$ tel que
   $$\forall t \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{lcl} g_X(t) & = & tP_X(t) \\ g_Y(t) & = & tP_Y(t) \end{array} \right.$$
   Expliciter les degrés des polynômes P_X et P_Y.
   (b) Exprimer g_{X+Y} en fonction de g_X et g_Y.
   (c) En déduire que toutes les racines complexes de P_X et P_Y sont de module 1, puis que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i = a_{n+1-i}$ et $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $b_j = b_{p+1-j}$.
   (d) En déduire que les variables aléatoires X et $(n+1-X)$ suivent la même loi, puis que $Y - X$ suit la loi uniforme sur $[\![1-n, p-1]\!]$.
   (e) En déduire que
   $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \frac{1}{n+p-1}$$
   puis que
   $$\forall i \geqslant 2,\ a_i b_i = 0$$
   (f) Démontrer que pour tout $i \geqslant 2$, $a_i \leqslant a_1$ et $b_i \leqslant b_1$.
   (g) Démontrer que $n < p$.
   (h) Démontrer par récurrence forte que
   $$\forall i \geqslant 2,\ a_i \in \{0, a_1\} \text{ et } b_i \in \{0, b_1\}$$
   (i) En déduire, pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$, une condition nécessaire et suffisante sur p (avec $p \geqslant n$) pour qu'il existe deux variables aléatoires indépendantes X et Y, respectivement à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, p]\!]$, telles que $X + Y$ suive la loi uniforme sur $[\![2, n+p]\!]$.

Problème 1 Algèbre

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.
Pour tous entiers naturels non nuls m et n, on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$, I_n la matrice identité et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $(E_{i,j}^{(n)})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour i et j dans $[\![1,n]\!]$, $E_{i,j}^{(n)}$ désigne la matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui placé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, qui est égal à 1. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur de n considérée, la matrice $E_{i,j}^{(n)}$ est notée plus simplement $E_{i,j}$.
Pour tous entiers naturels non nuls m et n, et pour toute matrice M de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on note M^T sa matrice transposée.

L'objectif du problème est d'étudier les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui ne contiennent aucune matrice inversible, en particulier leur dimension.

Partie I

Soit n un entier $\geqslant 2$. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On veut démontrer que $H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que H ne contient aucune matrice inversible.

1. Démontrer que I_n engendre un sous-espace vectoriel supplémentaire de H.

2. Démontrer que si A est une matrice nilpotente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $I_n + A$ est inversible et donner une expression de $(I_n + A)^{-1}$.

3. Démontrer que toutes les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appartiennent à H.

4. Conclure que H contient une matrice inversible.

Partie II : le cas général

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On souhaite démontrer la propriété $\mathcal{P}_n$:
Tout sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne contenant aucune matrice inversible (i.e. $F \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \emptyset$) vérifie $\dim(F) \leqslant n(n-1)$.
On raisonne par récurrence sur n.

5. Démontrer les propriétés $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

6. On suppose désormais que n est supérieur ou égal à 3 et que la propriété $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $F \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \emptyset$ et $\dim(F) > n(n-1)$.

(a) Démontrer qu'il existe une matrice A dans $F\backslash\{0\}$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la première.

(b) Démontrer qu'il existe des matrices P, Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $PAQ = E_{1,1}$.

(c) Soit f l'application définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & PMQ \end{array}$$

On pose $F' = f(F)$. Démontrer que F' est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de même dimension que F, qui ne contient aucune matrice inversible, et qui contient la matrice $E_{1,1}$.

(d) Pour toute matrice M de F', on note :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} a_M & L_M \\ \hline C_M & N_M \end{array}\right)$$

avec $a_M \in \mathbb{K}$, $L_M \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, $C_M \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$, $N_M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.
On pose g l'application définie sur F' qui envoie toute matrice M sur la matrice N_M. Démontrer que g est linéaire, puis établir :

$$\forall M \in F',\ g(M) \notin \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$$

(e) En appliquant l'hypothèse de récurrence, établir que

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!],\ E_{i,1} \in F' \\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ E_{1,j} \in F' \end{cases}$$

(f) En déduire que F' contient tous les $E_{i,j}$ avec $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Conclure.

Partie III : quelques lemmes

Dans cette partie, on démontre quelques lemmes utiles pour la suite. Soit n un entier naturel $\geqslant 2$.

lemme 1.

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

lemme 2. *On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique non dégénérée sur E. Pour tout sous-espace F totalement isotrope pour q,* $\dim(F) \leqslant \dfrac{n}{2}$

7. Démonstration du lemme 1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On souhaite démontrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Démontrer que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \exists (P_j, Q_i) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2,\ E_{i,j} = P_j E_{1,n} Q_i$$

En déduire que

$$E_{1,n} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ E_{i,j} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$$

(b) Démontrer que $E_{1,n} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$ puis conclure.

8. Démonstration du lemme 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n avec $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, et q une forme quadratique sur E, c'est-à-dire une application :

$$\begin{array}{rcl} q : E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \varphi(x,x) \end{array}$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$.
On suppose que q est non dégénérée, c'est-à-dire que pour tout x dans $E\backslash\{0\}$, $\varphi(x,\cdot)$ et $\varphi(\cdot,x)$ sont des formes linéaires non nulles.
Soit F un sous-espace totalement isotrope (SETI) pour q, c'est-à-dire tel que
$\forall x \in F,\ q(x) = 0$.

(a) Démontrer que $\forall (x,y) \in F^2,\ \varphi(x,y) = 0$.

(b) En déduire que $\dim(F) \leqslant \dfrac{n}{2}$.

Partie IV : le cas d'égalité

Dans cette partie, on considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2 et de cardinal supérieur ou égal à n.

Pour toute droite D de $\mathbb{K}^n$ et tout hyperplan H de $\mathbb{K}^n$, on définit :

$$K_D = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ D \subset \ker(M)\} \quad \text{et} \quad I_H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{Im}(M) \subset H\}$$

On considère la matrice $\Pi_n = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ne contenant aucune matrice inversible, de dimension $n(n-1)$. On suppose dans les questions **9** et **10** que F contient la matrice Π_n.

9. Pour toute matrice M dans F, soit A_M dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, C_M dans $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$, L_M dans $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et α_M dans $\mathbb{K}$ tels que :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A_M & C_M \\ \hline L_M & \alpha_M \end{array}\right)$$

On note ψ l'application définie sur F qui envoie toute matrice M sur la matrice A_M.
Soit M une matrice dans F.

(a) Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{K}$, $M + t\Pi_n$ est non inversible.

(b) En déduire que $\alpha_M = 0$ et $L_M C_M = 0$.

(c) En utilisant le lemme 2, démontrer que $\psi(F) = \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

(d) Démontrer que pour tout N dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $L_M N C_M = 0$.

10. Déduire des questions précédentes qu'il existe dans $\mathbb{K}^n$ une droite D telle que $F = K_D$ ou qu'il existe un hyperplan H tel que $F = I_H$.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ne contenant aucune matrice inversible, de dimension $n(n-1)$. On ne suppose plus que F contient la matrice Π_n.

11. Démontrer qu'il existe dans $\mathbb{K}^n$ une droite D telle que $F = K_D$ ou il existe un hyperplan H tel que $F = I_H$.
Indication : On pourra démontrer que F contient une matrice de rang $n-1$.

Partie V : automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Dans cette partie, on considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2 et de cardinal supérieur ou égal à n.

On cherche à déterminer les endomorphismes f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \tag{2}$$

Soit f un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie (2).

12. Démontrer que f est bijective.

13. Démontrer que si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme K_D ou de la forme I_H, alors $f(F)$ est également de la forme K_D ou I_H.

14. Démontrer que, quitte à composer f par la transposition matricielle, f envoie tous les sous-espaces de la forme K_D (respectivement I_H) sur des sous-espaces de la forme K_D (respectivement I_H).

15. En déduire que f conserve le rang des matrices, c'est-à-dire que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{rg}(f(M)) = \mathrm{rg}(M)$$

16. Démontrer qu'il existe $(C_1, \ldots, C_n)$ une famille libre de matrices colonnes, $(L_1, \ldots, L_n)$ une famille libre de matrices lignes et $(\lambda_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille de scalaires tous non nuls telles que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ f(E_{i,j}) = \lambda_{i,j} C_i L_j$$

ou

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ f(E_{i,j}) = \lambda_{i,j} C_j L_i$$

17. En conclure que :

$$\exists (A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2,\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f(M) = AMB$$

ou

$$\exists (A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2,\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f(M) = AM^T B$$

Problème 2 Analyse

Partie I

On rappelle la définition d'une fonction convexe de variable réelle. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *convexe* si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

1. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que f est dérivable à gauche et à droite en x et, en notant $f'_d(x)$ son nombre dérivé à droite en x, que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant f(x) + f'_d(x)(t-x) \tag{1}$$

En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On considère f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty \tag{2}$$

(a) Démontrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction

$$g_y : x \mapsto (xy - f(x))$$

admet un maximum global sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que la fonction

$$f^* : y \mapsto \max_{x \in \mathbb{R}} (xy - f(x))$$

est bien définie et convexe sur $\mathbb{R}$.

(c) Démontrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) + f^*(y) \geqslant xy. \tag{3}$$

(d) Démontrer que f^* vérifie aussi la condition (2).

Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, vérifiant (2). On appelle *transformée de Legendre* de la fonction f et on note f^* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f^* : y \mapsto \max_{x \in \mathbb{R}} (xy - f(x))$$

3. Soit f une fonction convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant (2) et f^* sa tranformée de Legendre. Démontrer qu'on a égalité dans l'inégalité (3) si et seulement si $y = f'(x)$.

4. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, vérifiant (2). En notant f^{**} la transformée de Legendre de f^*, démontrer que $f^{**} = f$.

5. Applications.

(a) Soit p un réel > 1 et soit $f_p : x \mapsto \frac{|x|^p}{p}$. Justifier que f_p est convexe et vérifie la condition (2) ; calculer f_p^*. En déduire l'inégalité :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| \leqslant \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q},$$

où q est le réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(b) Démontrer que la fonction ch (la fonction cosinus hyperbolique) est convexe et vérifie la condition (2), puis calculer sa transformée de Legendre.

Dans la suite du problème, étant donné H un espace de Hilbert réel, en notant $\|\cdot\|_H$ sa norme hilbertienne, on dit qu'une fonction $f : H \to \mathbb{R}$ est *semi-continue inférieurement*, qu'on abrège en s.c.i., si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in H,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in H,\ \|x-y\|_H \leqslant \eta \Rightarrow f(y) \geqslant f(x) - \varepsilon$$

Partie II

Dans cette partie, on généralise aux espaces de Hilbert réels les notions de fonctions convexes et de transformée de Legendre.
Soit H un espace de Hilbert réel. On note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire sur H, et $\|\cdot\|_H$ la norme hilbertienne qui en découle :

$$\forall x \in H,\ \|x\|_H = \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

Une fonction f définie sur H et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est convexe si

$$\forall (x,y) \in H^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

6. (a) Démontrer que la continuité implique la semi-continuité inférieure. Qu'en est-il de la réciproque ?

(b) Démontrer que si $f : H \to \mathbb{R}$ et $g : H \to \mathbb{R}$ sont s.c.i., alors $f+g$ est s.c.i..

(c) Démontrer que $f : H \to \mathbb{R}$ est s.c.i. si et seulement si son épigraphe Γ_f^+ défini par

$$\Gamma_f^+ = \{(x,y) \in H \times \mathbb{R},\ y \geqslant f(x)\}$$

est fermé dans $H \times \mathbb{R}$.

7. On s'intéresse maintenant à la notion de dérivabilité d'une fonction réelle définie sur un espace de Hilbert réel.
Soit $f : H \to \mathbb{R}$. Soit $(x,h) \in H^2$.
La fonction f admet une *dérivée directionnelle* en x dans la direction h si

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x+th) - f(x))$$

existe dans $\mathbb{R}$. On note alors $D_x f(h)$ cette limite.

On dit que f est *dérivable* en x, pour x un élément de H, si

— f admet une dérivée directionnelle en x dans la direction h pour tout $h \in H$.

— $h \mapsto D_x f(h)$ est une forme linéaire continue.

(a) Démontrer que si f est dérivable en x, alors il existe un unique élément v_x de H tel que

$$\forall h \in H,\ D_x f(h) = \langle v_x | h\rangle$$

On note $f'(x)$ le vecteur v_x qu'on appellera *dérivée* de f en x.
On dit que f est *dérivable* si elle est dérivable en x, pout tout x dans H. Sa *dérivée*, notée f', est alors la fonction $(x \mapsto f'(x))$ définie sur H.

(b) Démontrer que si $f : H \to \mathbb{R}$ est convexe et dérivable alors

$$\forall (x,y) \in H^2,\ f(y) \geqslant f(x) + \langle f'(x) | y - x\rangle$$

(c) En déduire que si $f : H \to \mathbb{R}$ est convexe et dérivable, alors f est s.c.i..

(d) Soit x un élément de H tel que f est dérivable en x. Si f admet un minimum local en x, justifier que $f'(x) = 0$.

8. Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable sur H, vérifiant la condition :

$$\lim_{\|x\|_H \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|_H} = +\infty \tag{4}$$

Justifier que, pour tout y dans H, l'application $x \mapsto (\langle x|y\rangle - f(x))$ est majorée sur H.

Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable sur H, vérifiant la condition (4) de la question **8**. On définit

$$\begin{array}{rcl} f^* : H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \sup\limits_{x \in H}(\langle x|y\rangle - f(x)) \end{array}$$

La fonction f^* est appelée *transformée de Legendre de f*.

9. Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable sur H, vérifiant la condition (4) de la question **8**.

(a) Démontrer que f^* est convexe et s.c.i..

(b) Démontrer que

$$\forall (x, y) \in H^2,\ f(x) + f^*(y) \geqslant \langle x|y\rangle \tag{5}$$

(c) Démontrer qu'il y a égalité dans (5) si et seulement si

$$y = f'(x)$$

(d) En déduire que, f^{**}, définie comme la transformée de Legendre de f^*, est bien définie, et que $f^{**} = f$.

Partie III

Dans cette partie, on va s'intéresser à l'existence d'un minimum pour une fonction convexe sur un espace de Hilbert réel, ainsi qu'à l'existence d'un vecteur unitaire « normal » en chaque point du bord d'un convexe fermé. On pourra utiliser dans cette partie, sans les démontrer, les théorèmes suivants :

théorème 1 (Banach-Alaoglu)**.** *Soit H un espace de Hilbert réel et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de H.*
Alors il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et un élément x de H tels que

$$\forall y \in H,\ \langle x_{\varphi(n)}|y\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle x|y\rangle$$

théorème 2 (Projection sur un convexe fermé)**.** *Soit H un espace de Hilbert réel et C une partie de H, convexe, fermée et non vide.*
Alors pour tout x dans H, il existe un unique $p(x)$ dans C tel que

$$\inf_{y\in C} \|x-y\|_H = \|x-p(x)\|_H$$

Le vecteur $p(x)$ est alors caractérisé par

$$p(x) \in C \text{ et } \forall y \in C,\ \langle x-p(x)|y-p(x)\rangle \leqslant 0$$

Soit H un espace de Hilbert réel et soit $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, s.c.i. telle que

$$\lim_{\|x\|_H\to+\infty} f(x) = +\infty$$

L'objectif de la question **10** ci-dessous est de démontrer que f admet un minimum global sur H.

On pose $m = \inf\limits_{y\in H} f(y)$ dans $[-\infty, +\infty[$.

10. (a) Démontrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H telle que

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$$

puis que (x_n) est bornée.

(b) En déduire qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et un élément z_0 de H tels que

$$\forall y \in H,\ \langle x_{\varphi(n)}|y\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle z_0|y\rangle$$

(c) Pour $\alpha > m$, on pose $C_\alpha = \{x \in H,\ f(x) \leqslant \alpha\}$. Justifier que C_α est une partie de H convexe, fermée et non vide. En déduire, en appliquant le théorème de projection sur un convexe fermé, que

$$f(z_0) = m$$

Autrement dit, f atteint un minimum global sur H en z_0.

(d) Démontrer que si f est strictement convexe, alors f admet un minimum global en un unique point.

On rappelle que la fonction f est *strictement convexe* si

$$\forall (x,y) \in H^2,\ \forall \lambda \in]0,1[\,,\ x \neq y \Rightarrow\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

11. Soit C une partie convexe, fermée, et d'intérieur non vide, d'un espace de Hilbert réel H. On désigne par $\overset{\circ}{C}$ l'intérieur de C. Soit x un élément de C qui n'est pas dans l'intérieur de C. Démontrer l'existence d'un vecteur a de H, tel que $\|a\|_H = 1$ et

$$\forall y \in C\,,\ \langle a|y-x\rangle \leqslant 0$$

Indication : On pourra démontrer qu'il existe une suite d'éléments de $H\backslash C$ qui converge vers x.

Partie IV

On considère H un espace de Hilbert réel, A dans $\mathcal{L}(H)$ un endomorphisme continu de H, antisymétrique, c'est-à-dire tel que :

$$\forall (u,v) \in H^2,\ \langle A(u)|v\rangle = -\langle u|A(v)\rangle.$$

Soit $\phi : H \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable (cf. **7**) et strictement convexe (cf. **10**d).
On suppose également que ϕ vérifie (4). On cherche à déterminer l'ensemble des vecteurs u de H solutions du problème suivant :

$$\phi'(u) = A(u) \tag{6}$$

12. On définit

$$\begin{array}{rcl} I : H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \phi(u) + \phi^*(A(u)) \end{array}$$

Démontrer que $I \geqslant 0$. Pour u dans H, démontrer que u vérifie (6) si et seulement si $I(u) = 0$.

13. Démontrer l'existence d'un unique minimum pour I. En déduire que le problème (6) possède au plus une solution.

14. On pose

$$\begin{array}{rcl} L : H^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \phi(u) + \phi^*(A(u)+v) \end{array}$$

(a) Démontrer que, pour tout $(u,v) \in H^2$,

$$(f,g) \in H^2 \mapsto \langle u|f\rangle + \langle v|g\rangle - L(f,g)$$

est majorée.

(b) En déduire que

$$\forall (u,v) \in H^2,\ L^*(u,v) = L(v,u)$$

où L^* est la transformée de Legendre de L, c'est-à-dire :

$$\forall (u,v) \in H^2,\ L^*(u,v) = \sup_{(f,g)\in H^2} \left(\langle u|f\rangle + \langle v|g\rangle - L(f,g)\right)$$

15. On définit la fonction $h : H \to \mathbb{R}$ par

$$\forall v \in H,\ h(v) = \inf_{u\in H} L(u,v)$$

(a) Démontrer que h est bien définie et convexe sur H.

(b) Démontrer que h^* est bien définie, convexe et s.c.i. sur H, et que h^* vérifie la condition (4).

(c) Démontrer que h est bornée sur toute boule fermée. En déduire que h est continue sur H.

(d) On pose $K = \{v \in H,\ \forall w \in H,\ \langle v|w\rangle \leqslant h(w) - h(0)\}$. Montrer que

$$\forall u \in H,\ h^*(u) + h(0) = 0 \Leftrightarrow u \in K$$

(e) En déduire à l'aide de la question **11** que $h^{**}(0) = h(0)$ puis que

$$\inf_{u\in H} L(u,0) = \sup_{v\in H} -L(v,0)$$

et enfin que le problème (6) possède une unique solution.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie. Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

AGRÉGATION SPÉCIAL DOCTEUR
MATHÉMATIQUES

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAD	1300A	101	0723

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 0136 – D'après documents fournis