

**SESSION 2025**

---

**AGRÉGATION  
CONCOURS EXTERNE**

**Section : PHYSIQUE-CHIMIE  
Option : CHIMIE**

**COMPOSITION DE PHYSIQUE**

Durée : 5 heures

---

*Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.*

*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier. Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire**

**Tournez la page S.V.P.**

A

## INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1500B	102	0385





# Autour des matériaux piézoélectriques

Certains matériaux possèdent la propriété suivante : lorsque l'on applique une action mécanique (flexion, traction, torsion, cisaillement) à l'un de ces matériaux, il se produit une polarisation électrique en son sein et des charges électriques apparaissent à sa surface engendrant une différence de potentiel entre ses faces. C'est l'effet piézoélectrique direct. Ces mêmes matériaux possèdent également la propriété inverse : si l'on soumet deux faces du matériau à une différence de potentiel, le matériau se déforme sous l'action de contraintes internes. C'est l'effet piézoélectrique indirect.

Le sujet est constitué de cinq parties indépendantes les unes des autres. Il est néanmoins conseillé de les aborder dans l'ordre de présentation. Dans la première partie, on s'intéresse à une utilisation optique d'une forme particulière de quartz, premier matériau dont on a découvert les propriétés piézoélectriques. Dans la deuxième partie, on étudie un allume-gaz, dispositif domestique mettant en œuvre l'effet piézoélectrique. Dans la troisième partie, on s'intéresse à l'émission et la réception d'ondes ultrasonores à l'aide de matériaux piézoélectriques. Dans la quatrième partie, on étudie le fonctionnement d'un oscillateur à quartz. Enfin, dans la cinquième et dernière partie, on modélise le comportement des matériaux piézoélectriques en se rapportant à des systèmes simples (condensateur, chaîne de ressorts).

Un document-réponse est à rendre avec la copie. Il comporte des figures qui doivent être soigneusement complétées et annotées. Les figures de l'énoncé du sujet sont indexées par des nombres tandis que les figures du document-réponse sont indexées par des lettres minuscules.

Les notations et valeurs numériques sont introduites tout au long du sujet lorsque cela est nécessaire. Un même symbole peut être utilisé pour représenter des grandeurs différentes selon la partie du sujet dans laquelle il se trouve.

Des questions considérées comme relevant d'un socle fondamental de connaissances et de compétences sont repérées par une étoile (★).

Le ou la candidat(e) attachera une grande importance à la clarté, la précision et la concision des réponses qui devront être justifiées avec soin.

Si au cours de l'épreuve, un ou une candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur ou une imprécision dans l'énoncé, il ou elle le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il ou elle est amené(e) à prendre.

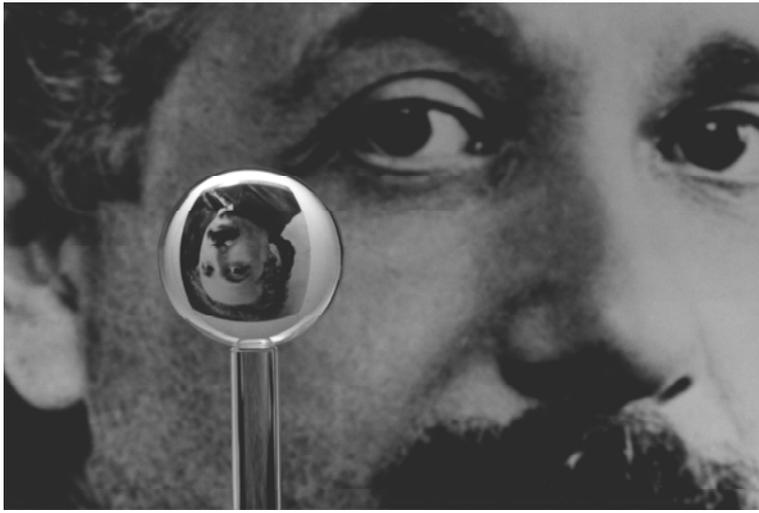
## Plan du sujet

<b>I Une application du quartz fondu</b>	<b>2</b>
<b>II Une utilisation domestique de l'effet piézoélectrique</b>	<b>3</b>
<b>III Effet piézoélectrique et ultrasons</b>	<b>5</b>
III.1 Équation d'onde . . . . .	5
III.2 Propagation en régime libre . . . . .	6
III.3 Propagation en régime sinusoïdal forcé . . . . .	6
III.4 Propagation de salves . . . . .	9
<b>IV Oscillateur à quartz</b>	<b>12</b>
<b>V Relations électro-mécaniques d'un matériau piézoélectrique</b>	<b>15</b>
V.1 Étude d'un condensateur plan . . . . .	15
V.2 Polarisation d'un milieu piézoélectrique . . . . .	18

## I Une application du quartz fondu

Le quartz, de formule  $\text{SiO}_2$ , est le premier matériau dont le caractère piézoélectrique a été découvert par Jacques et Pierre Curie dans les années 1880. Le quartz fondu présente quelques avantages : il possède un indice optique de 1,46 dans le visible, il est très peu dispersif et il est transparent dans le domaine ultra-violet.

L'une des sphères les plus « parfaites et homogènes » ayant jamais été fabriquées a été réalisée en quartz fondu afin de l'utiliser au cours de l'expérience *Gravity Probe 2* dont l'objectif est de vérifier l'une des conséquences de la théorie de la relativité générale. La figure 1 est une photo de communication prise par la NASA (*National Aeronautics and Space Administration*, agence gouvernementale états-unienne en charge de l'expérience, en collaboration avec l'université de Stanford). Elle montre la sphère utilisée dans l'expérience placée devant une photo éclairée d'Albert Einstein. La sphère se comporte alors comme un système optique.



**Figure 1** – Une sphère « parfaite », réalisée en quartz fondu pour l'expérience *Gravity Probe 2*, placée dans l'air devant une photographie d'Albert Einstein. La sphère est posée sur un tube en verre. Source : NASA.

**Q1.** (★) Définir les notions d'image réelle et d'image virtuelle. Dans le cas de la figure 1, préciser si l'image de la photographie d'Albert Einstein à travers la sphère de quartz est de nature réelle ou virtuelle.

La figure a du document-réponse (à rendre avec la copie) présente, dans un plan en coupe, la sphère en quartz fondu, d'indice optique  $n = 1,46$ , ainsi que la marche à travers le système optique d'un rayon de lumière issu d'un point-objet lumineux A. La sphère est placée dans l'air d'indice optique assimilé à celui du vide. On précise que A n'appartient pas à la photographie d'Albert Einstein.

**Q2.** (★) À l'aide des lois de Snell-Descartes sur la réfraction, justifier :

- la raison pour laquelle il est possible d'utiliser un schéma dans un plan en coupe pour représenter la marche d'un rayon de lumière à travers le système optique ;
- la raison pour laquelle le rayon de lumière issu de A et passant par S n'est pas dévié par le système optique.

Dans la question Q3, on suppose que la sphère est un système optique rigoureusement stigmatique.

**Q3.** (★) Définir le stigmatisme rigoureux d'un système optique pour un point-objet A et son image A'. Préciser sur la figure a la position de l'image A' de A par la sphère en utilisant les rayons de lumière issus de A et passant, d'une part, par S et, d'autre part, par  $I_1$ .

**Q4.** (★) Sur la figure a, compléter la marche, à travers le système optique, du rayon de lumière issu de A passant par  $I_1$  et  $I_2$ . On pourra, si nécessaire, utiliser le rapporteur fourni dans la figure 23. Indiquer si ce tracé est compatible avec le caractère rigoureusement stigmatique du système optique postulé dans la question Q3.

**Q5.** (★) Définir les conditions de l'approximation de Gauss.

## II Une utilisation domestique de l'effet piézoélectrique

Un allume-gaz est un objet domestique permettant de créer facilement une flamme visant ensuite à allumer un feu de type barbecue ou à « démarrer » une plaque de cuisson au gaz. De nombreux modèles d'allume-gaz mettent en jeu l'effet piézoélectrique. Le YouTuber de vulgarisation scientifique anglais Steve Mould a réalisé une vidéo expliquant son principe de fonctionnement. Le document 1 en présente une transcription abrégée (et traduite) ainsi qu'un certain nombre d'images issues de la vidéo.

### Document 1 — Fonctionnement d'un allume-gaz



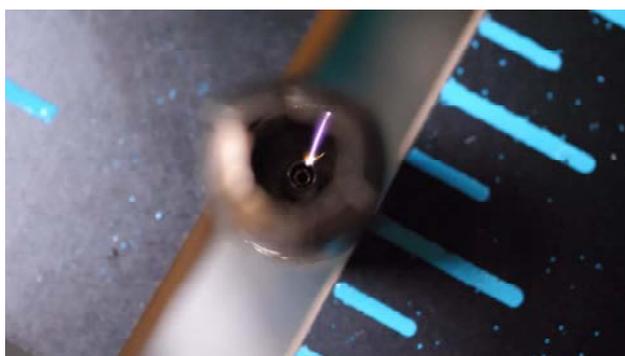
Capture d'écran n° 1.



Capture d'écran n° 2.



Capture d'écran n° 3.



Capture d'écran n° 4.

Lorsque l'on appuie sur la gâchette d'un allume-gaz, on remarque que cela demande un effort non négligeable. [...] Et il y a une raison à cela. Lorsque l'on appuie sur la gâchette, cela comprime un ressort assez rigide [...]. Accroché à l'une des extrémités de ce ressort se trouve un petit marteau. [...] Lorsque le ressort est relâché, [...] le marteau frappe un type spécial de cristal appelé cristal piézoélectrique. Et lorsque l'on frappe ce type de cristal, cela engendre une différence de potentiel électrique entre deux faces du cristal. [...] Deux fils conducteurs, reliés aux faces du cristal, permettent de retrouver cette différence de potentiel à l'extrémité de l'allume-gaz. Les deux fils ne sont pas en contact : un espace est ménagé entre les deux fils dénudés. Mais la tension que l'on engendre lorsque l'on appuie sur le cristal piézoélectrique est si élevée que l'air devient conducteur, produisant une étincelle [(voir la capture d'écran n° 4)]. Si on libère un gaz inflammable, l'étincelle enflammera le gaz.

Source : Piezoelectricity - why hitting crystals makes electricity, Steve Mould, <https://youtu.be/wcJXA8IqYl8>

Le réservoir d'un allume-gaz contient du butane à l'état d'équilibre liquide-vapeur, sous une pression supérieure à la pression atmosphérique. La figure b du document-réponse (à rendre avec la copie) présente l'évolution de la pression  $p$  du butane pur en fonction du volume massique  $v$  pour quelques courbes isothermes et isotitres. On rappelle que  $0\text{ °C} = 273,15\text{ K}$ .

- Q6. (★)** Sur la figure b du document-réponse, identifier les zones où le butane se trouve à l'état liquide, à l'état de gaz et à l'état d'équilibre liquide-gaz. Nommer la courbe  $\mathcal{C}$  tracée en pointillés. Nommer l'état dans lequel se trouve le butane lorsque sa température est supérieure à  $151,85\text{ °C}$ .

On note  $R$  la constante des gaz parfaits et  $M_b = 58\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  la masse molaire du butane.

- Q7. (★)** Énoncer les hypothèses du modèle du gaz parfait et citer l'équation d'état des gaz parfaits. Sur la figure b du document-réponse, localiser la portion de l'isotherme à 515 K où le butane est assimilable à un gaz parfait en justifiant votre réponse à l'aide de l'équation d'état.

L'allume-gaz est utilisé à 32 °C. Le réservoir contenant le butane est assimilé à un parallélépipède rectangle de dimensions 4 cm × 1 cm × 1 cm. Il contient initialement 70 % en masse de liquide.

- Q8.** Sur la figure b du document-réponse, positionner le point, noté A, représentant l'état du butane dans le réservoir. En déduire la pression dans le réservoir ainsi que la masse de butane présente dans le réservoir.

On suppose que le réservoir est indilatable.

- Q9.** Sur la figure b du document-réponse, indiquer comment se déplace le point représentant l'état du butane lorsque la température extérieure augmente, au moyen d'une flèche correctement positionnée et orientée. Préciser l'évolution de la composition du mélange liquide-gaz lors de cette augmentation de température.

L'énergie minimale d'inflammation (EMI) est l'énergie minimale engendrée par une étincelle permettant d'enflammer un gaz. L'EMI du butane vaut 0,25 mJ.

- Q10.** En mettant en œuvre une démarche de type résolution de problème, estimer la valeur de la constante de raideur du ressort utilisé dans l'allume-gaz présenté dans la vidéo.

### III Effet piézoélectrique et ultrasons

On s'intéresse dans cette partie à la propagation, à l'émission et à la réception d'ondes acoustiques à l'aide de matériaux piézoélectriques.

On se place au sein d'un fluide immobile dans le référentiel supposé galiléen de l'observateur. On note  $\mu_0$  la masse volumique du fluide et  $p_0$  la pression en son sein, supposées uniformes et stationnaires. On se place dans un modèle à géométrie cartésienne unidimensionnelle dans le repère cartésien orthonormé direct  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  : les champs ne dépendent que de la date  $t$  et de l'abscisse  $x$  repérant la position d'un point  $M$  de l'espace le long d'un axe  $(O, \vec{e}_x)$ . Le fluide est perturbé par la présence d'une onde acoustique, ce qui modifie sa masse volumique, que l'on note  $\mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(M, t)$  et la pression en son sein, que l'on note  $p(M, t) = p_0 + p_1(M, t)$ . Le champ eulérien de vitesse est alors non nul et est noté  $\vec{v}(M, t) = \vec{v}_1(x, t)$ . On se place dans le cadre de l'approximation acoustique. Les seules forces prises en compte sont les forces de pression au sein du fluide.

#### III.1 Équation d'onde

**Q11.** (★) Définir l'approximation acoustique.

L'équation locale de transport de la masse s'écrit  $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$ .

**Q12.** (★) Obtenir une relation approchée entre  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  et  $\text{div} \vec{v}_1$  dans le cadre de l'approximation acoustique.

**Q13.** (★) Définir la notion de particule de fluide.

L'accélération lagrangienne d'une particule de fluide centrée en  $M$ , notée  $\vec{a}_M(t)$ , s'écrit en fonction du champ de vitesse eulérien :

$$\vec{a}_M(t) = \frac{\partial \vec{v}(M, t)}{\partial t} + [\vec{v}(M, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}] \vec{v}(M, t).$$

**Q14.** (★) Établir la relation approchée  $\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p_1$  en appliquant la deuxième loi de Newton à une particule de fluide dans le cadre de l'approximation acoustique. En déduire la direction de  $\vec{v}_1$ .

On fait l'hypothèse que l'évolution du fluide est isentropique. On introduit son coefficient de compressibilité isentropique défini par  $\chi_s = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s$ , où  $s$  est l'entropie massique du fluide. Le développement limité de  $\mu$  en tant que fonction de  $p$  et de  $s$ , au voisinage de  $p_0$  à l'ordre 1 en  $p_1$  s'écrit :

$$\mu(p_0 + p_1, s) = \mu(p_0, s) + p_1 \left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s (p_0, s).$$

**Q15.** (★) Démontrer la relation approchée  $\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$  dans le cadre de l'approximation acoustique.

On rappelle la définition de l'opérateur laplacien :  $\Delta \bullet = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \bullet)$ .

**Q16.** (★) Déduire des relations établies aux questions Q12, Q14 et Q15 que  $p_1$  vérifie une équation de d'Alembert de la forme  $c^2 \Delta p_1 = \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$ , où  $c = \frac{1}{\sqrt{\chi_s \mu_0}}$  est la célérité de l'onde. Vérifier l'homogénéité de l'expression de  $c$ .

**Q17.** (★) Citer l'identité thermodynamique relative à l'énergie interne pour un corps pur monphasé. Montrer alors qu'un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de Laplace :  $\frac{p}{\mu^\gamma}$  est constant le long de la transformation, où  $\gamma$  est l'indice adiabatique du gaz supposé constant.

On note  $R$  la constante des gaz parfaits et on donne  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**Q18.** (★) Dans le cas où le fluide est un gaz modélisé par un gaz parfait, établir l'expression de  $c$  en fonction de  $R$ , de  $\gamma$ , de la température du fluide notée  $T$  et de la masse molaire du gaz notée  $M$ . Calculer la valeur de  $c$  pour l'air à  $27,0^\circ \text{C}$  (on prendra  $M = 29,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $\gamma = 1,40$  pour l'air).

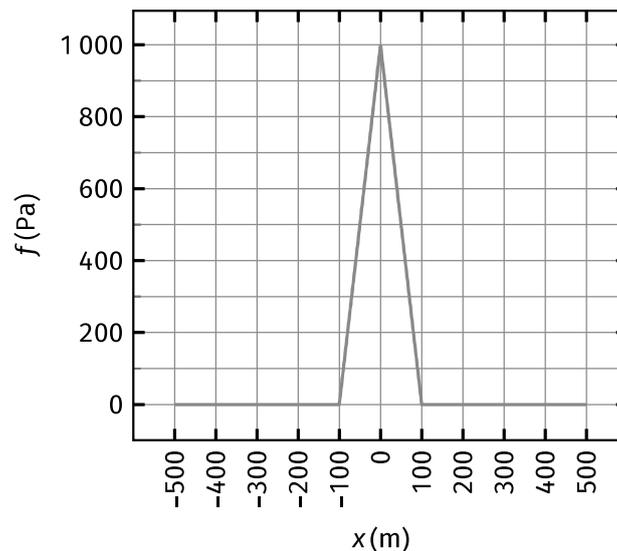
### III.2 Propagation en régime libre

Les solutions de l'équation de d'Alembert pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  s'écrivent :

$$p_1(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{\xi=x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi,$$

où  $f(x) = p_1(x, 0)$  et  $g(x) = \frac{\partial p_1}{\partial t}(x, 0)$  sont les conditions initiales supposées connues à l'instant de date  $t = 0$ . Dans cette sous-section, on prend  $c = 3 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q19.** (★) Préciser la signification physique des termes  $x + ct$  et  $x - ct$  dans l'expression de  $p_1(x, t)$ .



**Figure 2** – Évolution spatiale du champ de surpression initial  $p_1(x, 0)$  à utiliser pour compléter la figure c du document-réponse.

On choisit des conditions initiales pour lesquelles  $g(x) = 0$ . Ainsi, pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  :

$$p_1(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)].$$

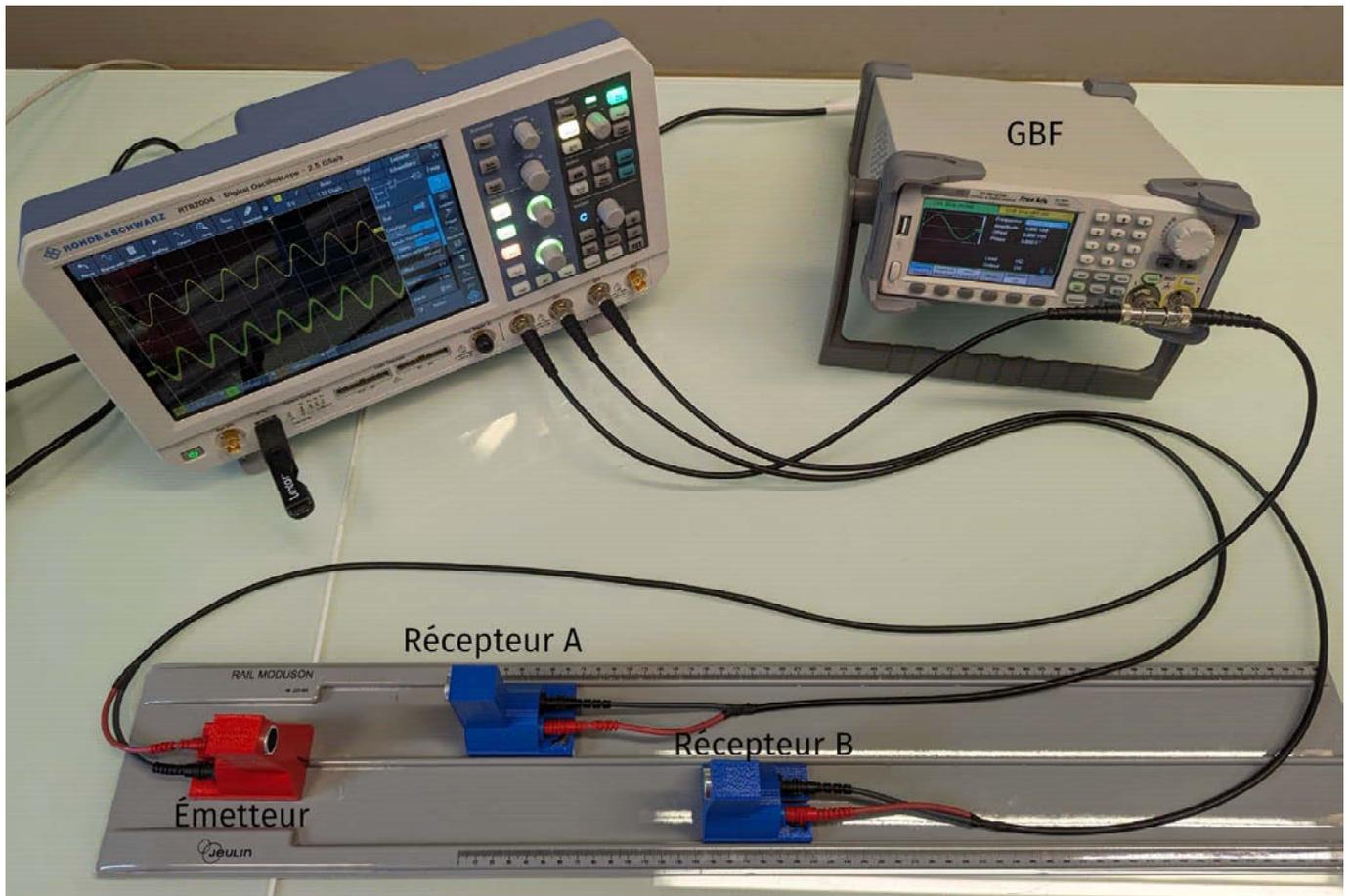
Le champ de surpression initial  $p_1(x, 0) = f(x)$  est représenté dans le graphe de la figure 2.

**Q20.** Représenter sur la figure c du document-réponse (à rendre avec la copie) l'évolution de  $p_1$  en fonction de  $x$  à la date  $t = 1 \text{ s}$ .

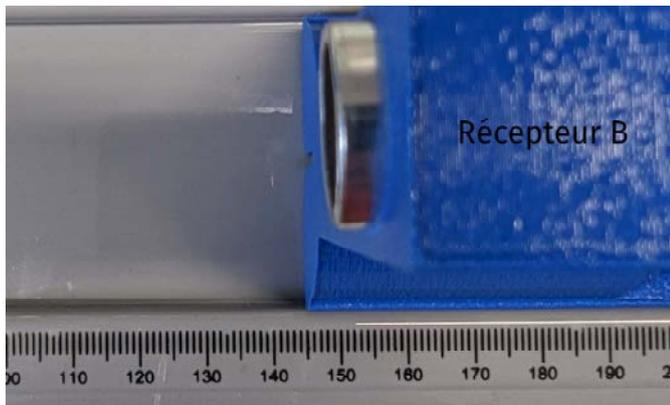
### III.3 Propagation en régime sinusoïdal forcé

On s'intéresse au montage photographié dans la figure 3. Un générateur basse fréquence (GBF) délivre une tension sinusoïdale de fréquence  $f$  voisine de 40 kHz. Il alimente un matériau piézoélectrique qui vibre alors à la même fréquence et émet une onde ultrasonore qui se propage dans la direction et le sens de  $\vec{e}_x$ . Deux matériaux piézoélectriques sont placés sur le trajet de l'onde : placés dans le champ de surpression de l'onde, une tension apparaît à leurs bornes. Ces tensions sont visualisées sur un oscilloscope : la tension délivrée à l'émetteur est visualisée sur la voie 1 et les deux autres sur les voies 2 (récepteur A) et 3 (récepteur B). On visualise les tensions sur les voies 2 et 3 pour deux écarts relatifs différents entre les récepteurs A et B (voir les figures 4 et 5). Les positions des deux récepteurs sont mesurées à l'aide d'une règle graduée en millimètres.

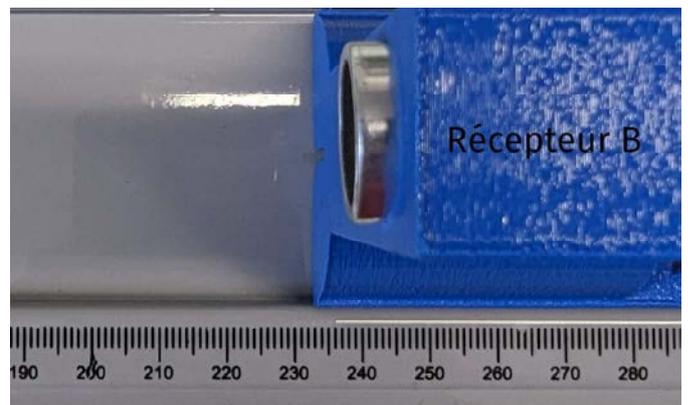
**Q21.** (★) À l'aide des photographies des figures 4 et 5, mesurer la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde. Citer l'estimation de type B de l'incertitude-type pour une mesure effectuée à l'aide d'un instrument gradué. Citer la relation permettant d'obtenir l'incertitude-type d'une différence. En déduire l'incertitude-type  $u(\lambda)$  de  $\lambda$ .



**Figure 3** – Montage utilisant un émetteur et deux récepteurs permettant de mesurer la célérité du ultrasons dans l'air.



**Figure 4** – Le récepteur A est à la graduation 0 mm. L'abscisse du récepteur B est mesurable sur la photo ci-dessus. Les deux tensions visualisées sur les voies 2 et 3 sont en phase.



**Figure 5** – Le récepteur A est toujours à la graduation 0 mm. Le récepteur B a été déplacé et sa nouvelle abscisse est mesurable sur la photo ci-dessus. Les deux tensions visualisées sur les voies 2 et 3 sont en phase. Entre la position du récepteur B de la figure 4 et celle-ci, il a été observé dix fois successivement que les courbes des voies 2 et 3 étaient en phase.

On mesure par ailleurs la fréquence  $f$ . On obtient  $f = 39,988$  kHz avec une incertitude-type  $u(f) = 5$  Hz. L'expérience a été réalisée à  $27,0$  °C.

**Q22.** (★) En déduire une mesure de la célérité  $c$  des ultrasons dans l'air ainsi que l'incertitude-type  $u(c)$  associée. Conclure quantitativement sur la compatibilité entre cette mesure et la valeur de la célérité obtenue par le modèle du gaz parfait à la question Q18. On utilisera le critère de l'écart normalisé.

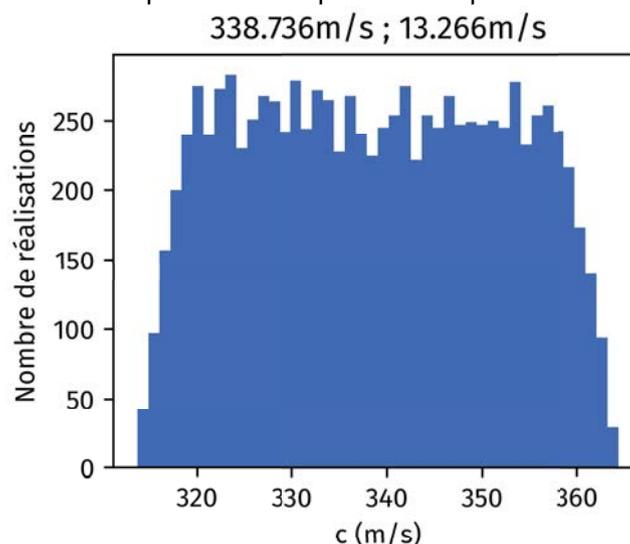
Dans une expérience analogue à celle décrite précédemment mais mettant en jeu, cette fois, des ondes sonores, on trouve  $\lambda = 0,77$  m avec  $u(\lambda) = 0,03$  m. On a mesuré par ailleurs la fréquence  $f$  de l'onde : on obtient  $f = 440$  Hz avec une incertitude-type  $u(f) = 2$  Hz. On cherche à utiliser une méthode de Monte-Carlo afin de déterminer une mesure de  $c$  et son incertitude-type  $u(c)$ . Le script Python utilisé est reproduit dans le listing 1 suivant :



### Listing 1

```
1 import numpy as np
2 from numpy.random import uniform
3 from matplotlib import pyplot as plt
4
5  $\lambda = 0.77$  # m
6  $u_\lambda = 0.03$  # m
7  $f = 440$  # Hz
8  $u_f = 2$  # Hz
9
10 N = 10000 # Nombre de tirages aléatoires à réaliser
11  $\lambda_{MC} = \text{uniform}(\lambda - \text{np.sqrt}(3) * u_\lambda, \lambda + \text{np.sqrt}(3) * u_\lambda, N)$  # Simulation des valeurs de  $\lambda$ 
12  $f_{MC} = \text{uniform}(f - \text{np.sqrt}(3) * u_f, f + \text{np.sqrt}(3) * u_f, N)$  # Simulation des valeurs de  $f$ 
13
14  $c_{MC} =$  # À compléter
15
16 # Analyse statistique des résultats de la simulation de Monte-Carlo
17  $c_{avg} = \text{np.average}(c_{MC})$  # Valeur moyenne de  $c$ 
18  $c_{std} = \text{np.std}(c_{MC}, \text{ddof} = 1)$  # Écart-type de  $c$ 
19
20 # Affichage de la simulation
21  $\text{plt.hist}(c_{MC}, \text{bins} = \text{'rice'})$ 
22  $\text{plt.xlabel}(\text{'Nombre de réalisations'})$ 
23  $\text{plt.ylabel}(\text{'c (m/s)'})$ 
24  $\text{plt.title}(\text{'{:3.3f}'}.format(c_{avg}) + \text{'m/s ; ' + '{:3.3f}'}.format(c_{std}) + \text{'m/s'})$ 
25  $\text{plt.show}()$ 
```

La figure qu'il affiche lorsqu'il est complété et interprété est reproduite dans la figure 6.



**Figure 6** – Figure affichée par le script Python reproduit dans le listing 1 lorsqu'il est complété et interprété.

Q23. (★) Compléter la ligne 14 du listing 1. Décrire la méthode utilisée pour calculer les valeurs de  $c$  et de son incertitude-type  $u(c)$ . Écrire le résultat du mesurage de  $c$ .

### III.4 Propagation de salves

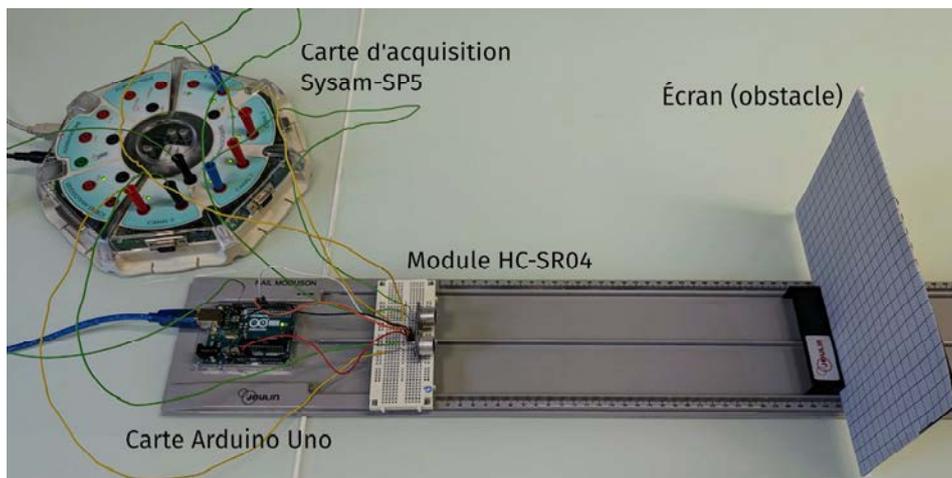


Figure 7 – Montage utilisant un microcontrôleur Arduino et un module HC-SR04 et permettant de mesurer la distance entre le module et un obstacle.

On s'intéresse désormais au montage photographié dans la figure 7. Il repose sur une utilisation classique du module de détection ultrasonore HC-SR04 couplé à un microcontrôleur Arduino. Il permet de mesurer la distance qui sépare le module d'un obstacle. Le code Arduino nécessaire à la commande et à l'exploitation du module HC-SR04 est reproduit dans le listing 2 suivant :



#### Listing 2

```
1 #define TRIG 8 // Entrée Trig du HC-SR04 sur la broche D8
2 #define ECHO 7 // Sortie Echo du HC-SR04 sur la broche D7
3
4 // Déclaration des variables
5 long Duree; // Durée mesurée (en µs)
6 long Distance; // Distance mesurée (en cm)
7
8 // Initialisation
9 void setup(){
10     pinMode(TRIG, OUTPUT); // Broche Trig en mode sortie (pour l'arduino)
11     pinMode(ECHO, INPUT); // Broche Echo en mode entrée (pour l'arduino)
12     Serial.begin(115200); // Initialisation du port série pour l'utilisation du moniteur série
13 }
14
15 // Boucle principale
16 void loop(){
17     // ***Début de la phase de mesure de distance***
18     // Pour commencer la mesure, il faut envoyer un signal logique 1 sur l'entrée Trig du HC-SR04
19     // pendant 10µs
20
21     digitalWrite(TRIG, LOW); // On initialise l'état logique de Trig à 0 pendant 2µs par sécurité
22     delayMicroseconds(2);
23
24     digitalWrite(TRIG, HIGH); // On passe l'état logique de Trig à 1 pendant 10µs
25     delayMicroseconds(10);
26
27     digitalWrite(TRIG, LOW); // On passe l'état logique de Trig à 0
28
29     Duree = pulseIn(ECHO, HIGH); // On mesure la durée pendant laquelle Echo est à l'état logique 1
30     // Par construction, cette durée est la durée nécessaire à l'onde pour se propager de l'émetteur
31     // vers l'obstacle puis, après réflexion, de l'obstacle vers le récepteur
32     // pulseIn renvoie une durée en µs
```

```

33 // ***Fin de la phase de mesure de distance***
34
35 // On en déduit la distance à laquelle l'obstacle se situe
36 Distance = // À compléter
37
38 // Affichage via le port série de la distance mesurée
39 Serial.print("Distance mesurée : ");
40 Serial.print(Distance);
41 Serial.println(" cm");
42
43 // On procède à une nouvelle mesure après une attente de 1000ms
44 delay(1000);
45 }

```



**Figure 8** – Module HC-SR04.

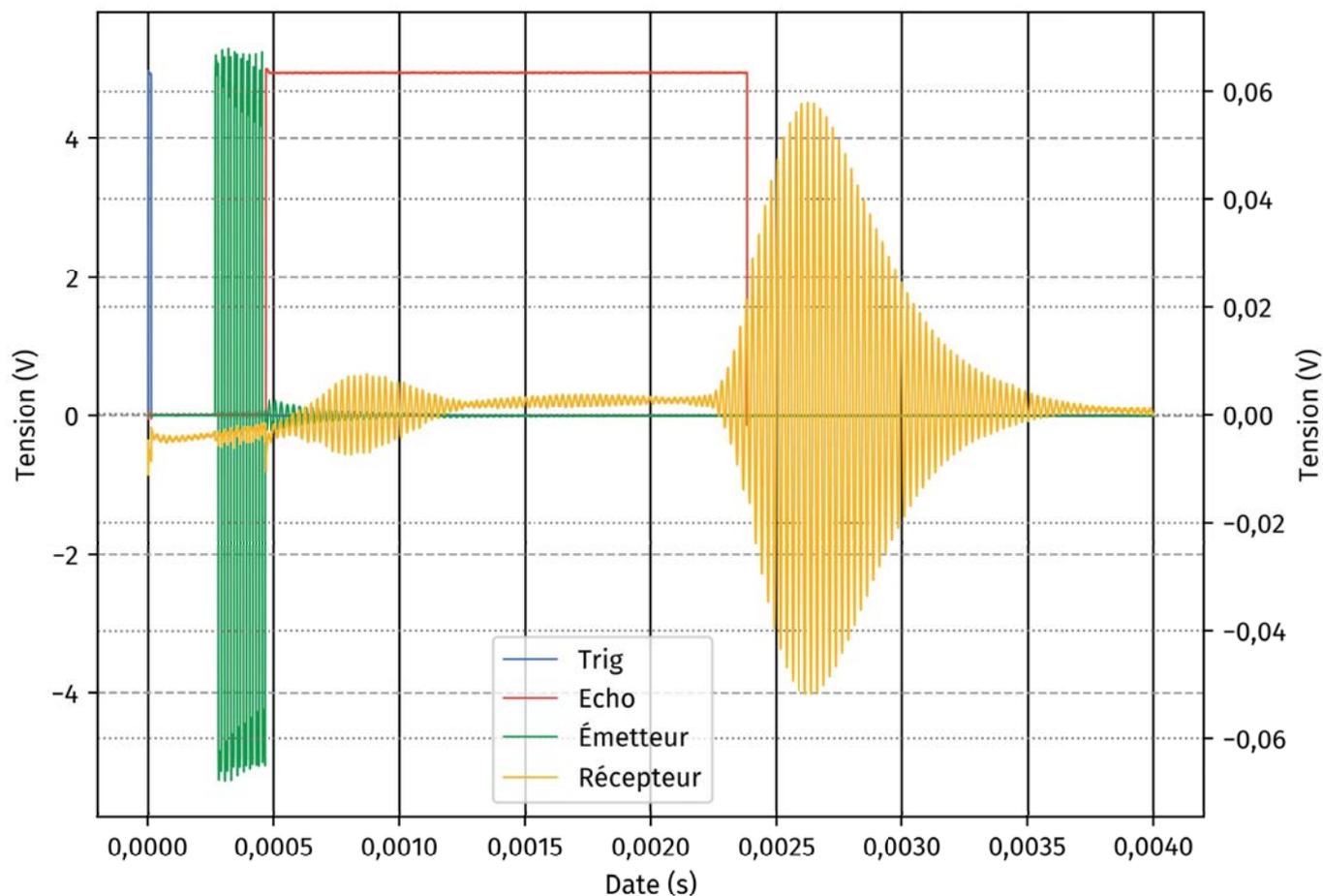
Le module HC-SR04 est équipé, entre autres, de deux matériaux piézoélectriques, l'un jouant le rôle d'émetteur (T) d'ultrasons, l'autre de récepteur (R) d'ultrasons (voir la figure 8). Il possède quatre broches : une correspondant à la masse, une correspondant à un potentiel de 5V nécessaire à son alimentation et deux autres appelées « Trig » et « Echo ». Le fonctionnement standard du module est le suivant : si le potentiel de la broche « Trig » est porté à 5V pendant 10  $\mu$ s, la mesure de distance est déclenchée. Au bout d'une certaine durée, de l'ordre de quelques centaines de microsecondes, un signal crête-symétrique d'amplitude 5V est délivré à l'émetteur piézoélectrique pendant une durée de l'ordre de quelques centaines de microsecondes. À la fin de cette séquence, le potentiel de la broche « Echo » est porté à 5V jusqu'à ce que la tension aux bornes du récepteur piézoélectrique dépasse un certain seuil, de l'ordre d'une dizaine de millivolts. Le potentiel de la broche « Echo » redevient alors nul.

**Q24.** L'expérience se déroule à 27 °C. En utilisant le résultat numérique de la question Q18, compléter la ligne 36 du listing 2 afin d'obtenir une mesure de la distance, exprimée en centimètres, entre l'émetteur et l'obstacle.

Dans l'expérience, on a légèrement modifié le module HC-SR04 afin de pouvoir mesurer la tension aux bornes de l'émetteur et du récepteur piézoélectriques. Le dispositif d'acquisition (une carte Sysam-SP5 commandée par le logiciel Latis-Pro) permet de réaliser  $N = 40\,000$  échantillons sur la durée d'acquisition  $T_a = 4$  ms. Les signaux acquis lors de l'expérience sont les suivants : les potentiels des broches « Trig » et « Echo » du module HC-SR04 ainsi que les tensions aux bornes de l'émetteur et du récepteur piézoélectriques. Les signaux obtenus sont représentés dans la figure 9.

**Q25.** Préciser la valeur de la tension aux bornes du récepteur à partir de laquelle le module HC-SR04 considère qu'il détecte le début de l'écho de la salve émise. Estimer l'erreur qui découle de ce seuil sur la mesure de durée et en déduire une estimation de l'erreur systématique sur la mesure de distance associée à ce seuil.

**Q26.** Proposer une interprétation au fait que l'amplitude de la tension aux bornes de l'émetteur est bien plus élevée que celle de la tension aux bornes du récepteur.



**Figure 9** – Évolution temporelle des potentiels des broches « Trig » et « Echo » du module HC-SR04 ainsi que des tensions aux bornes de l'émetteur et du récepteur piézoélectrique. La valeur de la tension aux bornes du récepteur est significativement plus petite que les autres grandeurs mesurées. Afin de pouvoir représenter les quatre grandeurs sur un même graphe, on a utilisé deux échelles différentes pour l'axe des ordonnées : l'échelle de droite se rapporte à la tension aux bornes du récepteur et l'échelle de gauche se rapport aux trois autres grandeurs.

## IV Oscillateur à quartz

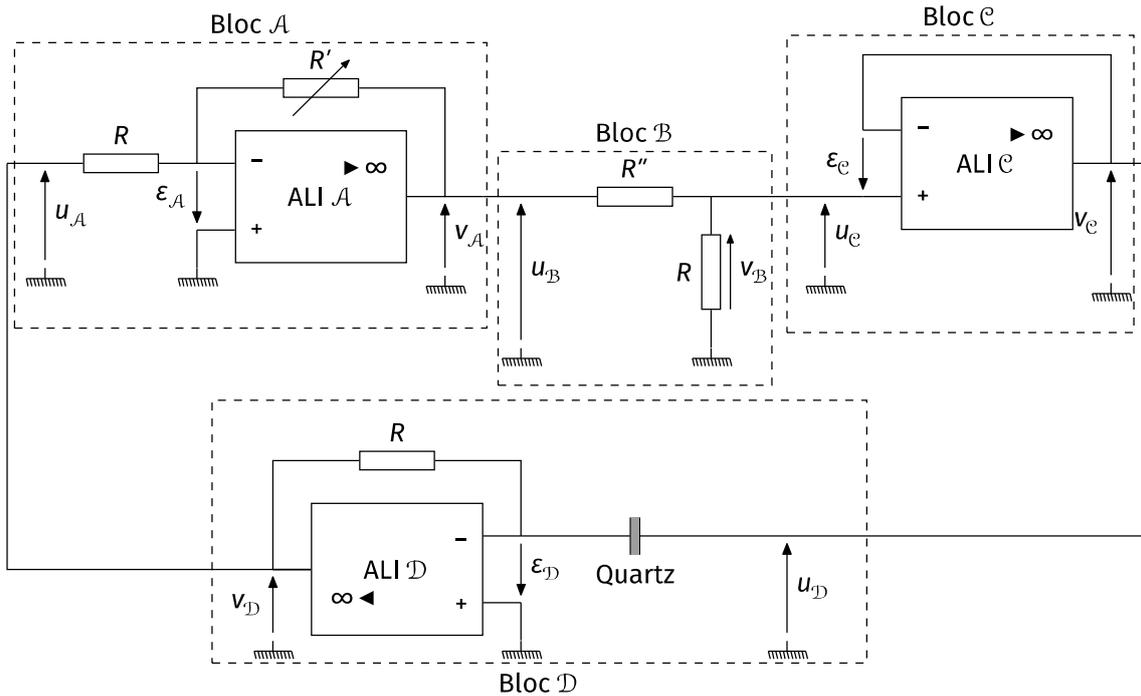


Figure 10 – Schéma d'un oscillateur à quartz.

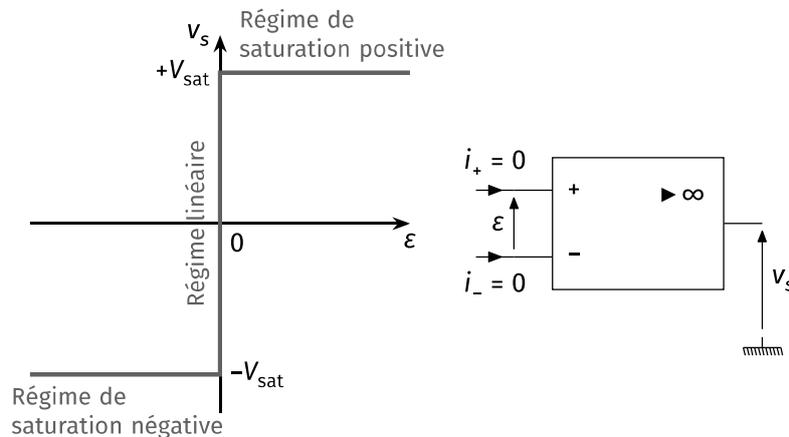


Figure 11 – Caractéristique de transfert d'un ALI idéal fonctionnant dans la limite de gain infini.

On s'intéresse au montage schématisé dans la figure 10 permettant de réaliser un oscillateur à quartz. Il est constitué de trois amplificateurs linéaires intégrés (ALI), de type TL081, que l'on suppose idéaux et fonctionnant dans la limite de gain infini (voir la figure 11). Ils sont alimentés par une source (non représentée sur le schéma) délivrant un potentiel symétrique  $\pm V_{cc} = \pm 15\text{V}$ . On note  $V_{sat}$  leur potentiel de saturation. On admet que les ALI C et D fonctionnent toujours en régime linéaire. Le montage est complété par des conducteurs ohmiques de résistances  $R = 10\text{ k}\Omega$ ,  $R'' = 100\text{ k}\Omega$  et  $R'$ , le conducteur ohmique de résistance  $R'$  étant un potentiomètre, ce qui permet d'ajuster la valeur de  $R'$  entre  $0\ \Omega$  et  $470\text{ k}\Omega$ . Le montage utilise enfin un quartz piézoélectrique. Les tensions en entrée de chaque bloc sont notées  $u$  avec le nom du bloc en indice. Les tensions en sortie de chaque bloc sont notées  $v$  avec le nom du bloc en indice.

Le bloc A est un montage amplificateur inverseur. En régime linéaire, on a  $v_A = -\frac{R'}{R}u_A$ .

**Q27.** On s'intéresse au fonctionnement du bloc A en régime linéaire et en régime de saturation de l'ALI A.

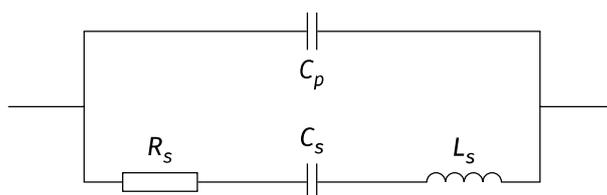
Représenter graphiquement l'évolution de  $v_{\mathcal{A}}$  en fonction de  $u_{\mathcal{A}}$  en faisant apparaître les grandeurs pertinentes exprimées en fonction de  $R$ ,  $R'$  et/ou  $V_{\text{sat}}$ .

- Q28.** (★) Énoncer le théorème du diviseur de tension (on introduira les notations nécessaires sur un schéma).
- Q29.** (★) Exprimer  $v_{\mathcal{B}}$  en fonction de  $u_{\mathcal{B}}$ ,  $R$  et  $R''$  lorsque le bloc  $\mathcal{B}$  est en sortie ouverte.
- Q30.** (★) Nommer le montage représenté dans le bloc  $\mathcal{C}$ . Préciser son intérêt et exprimer  $v_{\mathcal{C}}$  en fonction de  $u_{\mathcal{B}}$ ,  $R$  et  $R''$ .
- Q31.** Exprimer  $v_{\mathcal{C}}$  en fonction de  $u_{\mathcal{A}}$ ,  $R$ ,  $R'$ ,  $R''$  et/ou  $V_{\text{sat}}$  en distinguant les cas selon que l'ALI  $\mathcal{A}$  fonctionne en régime linéaire ou en régime de saturation.

On note  $j$  le nombre complexe de partie imaginaire positive tel que  $j^2 = -1$ . En régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ , on convient d'associer à toute grandeur sinusoïdale  $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi_s)$  deux grandeurs complexes :

- la première, appelée amplitude complexe associée à  $S$ , notée  $\underline{S}$  et définie par  $\underline{S} = S e^{j\varphi_s}$ ;
- la seconde, appelée grandeur sinusoïdale complexe associée à  $s$ , notée  $\underline{s(t)}$  et définie par  $\underline{s(t)} = S e^{j(\omega t + \varphi_s)} = \underline{S} e^{j\omega t}$ .

À l'exception de  $j$ , les grandeurs complexes sont soulignées.



**Figure 12** – Dipôle modélisant le comportement électrocinétique d'un quartz.

Le comportement électrocinétique d'un quartz peut être modélisé par le dipôle représenté dans la figure 12.

- Q32.** (★) En régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ , exprimer l'impédance équivalente  $\underline{Z}$  du quartz en fonction de  $R_s$ ,  $L_s$ ,  $C_s$ ,  $C_p$  et  $\omega$ . On exprimera  $\underline{Z}$  sous la forme d'un rapport de deux polynômes en  $j\omega$ .

Dans le cadre du fonctionnement du montage, on admet qu'il est possible d'approcher l'expression de  $\underline{Z}$  par  $\underline{Z} = \frac{1 + jR_s C_s \omega + L_s C_s (j\omega)^2}{jC_s \omega}$ . En outre, la fonction de transfert harmonique  $\underline{H}_{\mathcal{D}}(j\omega) = \frac{V_{\mathcal{D}}}{U_{\mathcal{D}}}$  du bloc  $\mathcal{D}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{H}_{\mathcal{D}}(j\omega) = \frac{H_0 \frac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$$

où  $\omega_0$  est la pulsation propre du bloc  $\mathcal{D}$  et  $Q$  son facteur de qualité.

- Q33.** (★) Préciser la nature du filtre réalisé par le bloc  $\mathcal{D}$ . Définir  $H_0$ . Exprimer  $H_0$ ,  $Q$  et  $\omega_0$  en fonction de  $R$ ,  $R_s$ ,  $C_s$  et/ou  $L_s$ .

On isole temporairement le bloc  $\mathcal{D}$  du reste du montage de la figure 10. On le soumet à une tension  $u_{\mathcal{D}}$  sinusoïdale, d'amplitude constante  $U_{\mathcal{D}} = 0,20\text{V}$  et de fréquence  $f$  variable. On mesure l'amplitude  $V_{\mathcal{D}}$  de la tension  $v_{\mathcal{D}}$  pour différentes valeurs de  $f$ . On obtient la courbe reproduite dans la figure d du document-réponse (à rendre avec la copie).

**Q34.** (★) À l'aide de la figure d, déterminer graphiquement les valeurs numériques de  $\omega_0$ ,  $|H_0|$  et  $Q$ . On annotera soigneusement la figure et on explicitera la démarche suivie. Commenter la valeur de  $Q$ .

**Q35.** En partant de l'expression de la fonction de transfert harmonique  $\underline{H_D}$ , obtenir une équation différentielle vérifiée par la fonction  $t \mapsto v_D(t)$  et faisant intervenir  $u_D$ ,  $H_0$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ .

L'ALI  $\mathcal{A}$  peut fonctionner en régime linéaire ou en régime de saturation. On note  $K = \frac{V_e}{u_{\mathcal{A}}}$  lorsque l'ALI  $\mathcal{A}$  fonctionne en régime linéaire et on montre que  $K$  est négatif. Selon le régime de fonctionnement de l'ALI  $\mathcal{A}$ ,  $v_D$  vérifie l'une des deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_D}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}(1 - KH_0) \frac{dv_D}{dt} + \omega_0^2 v_D = 0 & \text{si l'ALI } \mathcal{A} \text{ fonctionne en régime linéaire,} \\ \frac{d^2 v_D}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dv_D}{dt} + \omega_0^2 v_D = 0 & \text{si l'ALI } \mathcal{A} \text{ fonctionne en régime de saturation.} \end{cases}$$

**Q36.** Expliciter la condition sur  $K$  et  $H_0$  pour laquelle il est possible de faire naître des oscillations de  $v_D$  lorsque l'ALI  $\mathcal{A}$  fonctionne en régime linéaire. Justifier l'utilisation d'un potentiomètre dans le montage.

Dans la suite, on suppose cette condition vérifiée. La figure e du document-réponse (à rendre avec la copie) présente une capture d'écran d'oscilloscope réalisée lorsque les oscillations de  $v_D$  sont établies.

**Q37.** (★) À l'aide de la figure e du document-réponse, mesurer la valeur de  $V_{sat}$  ainsi que la fréquence des oscillations.

**Q38.** Annoter la figure e du document-réponse en mettant en évidence les régimes de fonctionnement de l'ALI  $\mathcal{A}$ . Discuter alors du terme « oscillation quasi sinusoïdales » utilisé pour qualifier l'évolution temporelle de la tension  $v_D$  (on pourra s'appuyer sur les équations différentielles vérifiées par  $v_D$ ).

## V Relations électro-mécaniques d'un matériau piézoélectrique

Dans cette partie, on cherche à établir, à l'aide de modèles simples, les relations décrivant les effets piézoélectriques direct et indirect.

### V.1 Étude d'un condensateur plan

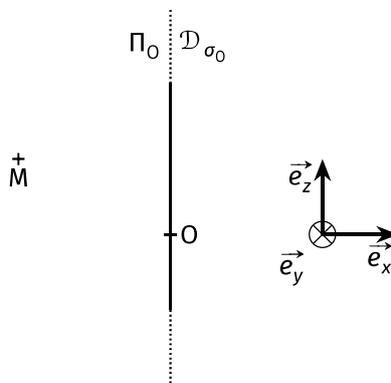
Dans un premier temps, on se propose d'établir quelques propriétés des condensateurs. Ce sont, en effet, des systèmes simples qui présentent un comportement électrique voisin de celui des matériaux piézoélectriques.

On rappelle le théorème de Green-Ostrograski pour un champ vectoriel  $\vec{X}$  :

$$\iiint_{P \in \mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{X}(P) d\tau_P = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{X}(M) \cdot \overrightarrow{dS}_M^{\text{ext}},$$

où  $\mathcal{V}$  est le volume délimité par la surface fermée  $\mathcal{S}$ ,  $d\tau_P$  est le volume élémentaire autour d'un point  $P$  de  $\mathcal{V}$  et  $\overrightarrow{dS}_M^{\text{ext}}$  est le vecteur surface élémentaire autour d'un point  $M$  de  $\mathcal{S}$  orienté vers l'extérieur de  $\mathcal{S}$ .

**Q39.** (★) Établir le théorème de Gauss à partir de l'équation de Maxwell-Gauss.



**Figure 13** – Schématisation, dans un plan en coupe, de la distribution  $\mathcal{D}_{\sigma_0}$  constituée par un plan  $\Pi_0$  uniformément chargé.

On se place en régime stationnaire dans le vide à l'exception d'un plan infini  $\Pi_0$  chargé, de densité surfacique de charge uniforme notée  $\sigma_0$  (voir la figure 13). On note  $\mathcal{D}_{\sigma_0}$  cette distribution de charge. On introduit le repère cartésien orthonormé direct  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  de telle sorte que  $\Pi_0 = (O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On repère un point  $M$  de l'espace à l'aide de ses coordonnées cartésiennes notées  $(x_M, y_M, z_M)$ .

**Q40.** (★) En utilisant des arguments précis et concis de symétries et d'invariances de la distribution  $\mathcal{D}_{\sigma_0}$ , montrer que le champ électrique  $\vec{E}_{\mathcal{D}_{\sigma_0}}(M)$  engendré par  $\mathcal{D}_{\sigma_0}$  en un point  $M$  de l'espace s'écrit sous la forme  $\vec{E}_{\mathcal{D}_{\sigma_0}}(M) = E_{\mathcal{D}_{\sigma_0}}(x_M)\vec{e}_x$ .

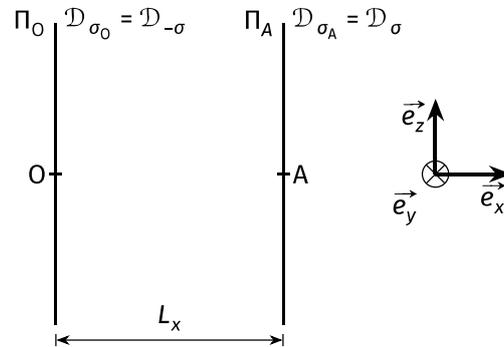
**Q41.** (★) Définir ce que l'on entend par « plan d'anti-symétrie » d'une distribution de charge. Discuter de l'existence d'un plan d'anti-symétrie pour la distribution  $\mathcal{D}_{\sigma_0}$ .

Le champ électrostatique est un champ vectoriel polaire. Une conséquence de cette propriété est que, si  $\mathcal{S}_\Pi$  est une symétrie de plan  $\Pi$ , alors :

$$\mathcal{S}_\Pi(\vec{E}_{\mathcal{D}}(M)) = \vec{E}_{\mathcal{S}_\Pi(\mathcal{D})}(\mathcal{S}_\Pi(M))$$

où  $\mathcal{S}_\Pi(\vec{E}_{\mathcal{D}}(M))$  est le symétrique du vecteur  $\vec{E}_{\mathcal{D}}(M)$  par rapport au plan  $\Pi$ ,  $\vec{E}_{\mathcal{S}_\Pi(\mathcal{D})}$  est le champ électrostatique engendré par le symétrique de la distribution  $\mathcal{D}$  par rapport au plan  $\Pi$  et où  $\mathcal{S}_\Pi(M)$  est le symétrique du point  $M$  par rapport au plan  $\Pi$ .

- Q42.** En exploitant la relation précédente traduisant le caractère polaire du champ électrostatique, montrer que la fonction  $x_M \mapsto E_{\mathcal{D}_{\sigma_0}}(x_M)$  est une fonction impaire de  $x_M$ . On pourra s'intéresser à la symétrie de plan  $\Pi_0$ .
- Q43.** (★) En appliquant le théorème de Gauss, établir l'expression de  $E_{\mathcal{D}_{\sigma_0}}(x_M)$  pour un point M n'appartenant pas au plan  $\Pi_0$ .



**Figure 14** – Schématisation, dans un plan en coupe, du condensateur plan constitué par deux armatures planes assimilées aux plans  $\Pi_0$  et  $\Pi_A$ .

On s'intéresse désormais à un condensateur plan modélisé par deux armatures planes conductrices, dont on néglige l'épaisseur, placées dans le vide de matière et séparées d'une distance  $L_x$ . On note  $S$  l'aire commune aux deux armatures. On néglige les effets de bords si bien que les armatures sont assimilables à deux plans infinis uniformément chargés, notés respectivement  $\Pi_0$  et  $\Pi_A$ . On choisit le repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  de telle sorte que  $\Pi_0 = (O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et  $\Pi_A = (A, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ,  $A$  étant de coordonnées  $(L_x, 0, 0)$ . On note  $\sigma_0$  et  $\sigma_A$  les densités surfaciques de charge respectives des armatures  $\Pi_0$  et  $\Pi_A$ . Dans un condensateur, les armatures sont en influence électrostatique totale, ce qui implique que leurs armatures ont des charges opposées. Dans la suite, on pose  $\sigma_A = \sigma = \frac{q}{S}$ . On aura donc  $\sigma_0 = -\sigma$  et les charges des armatures  $\Pi_0$  et  $\Pi_A$  seront respectivement notées  $-q$  et  $q$ . On note  $\vec{E}_0(M)$  et  $\vec{E}_A(M)$  les champs électrostatiques engendrés respectivement par les armatures  $\Pi_0$  et  $\Pi_A$  en un point  $M$  de l'espace. Comme démontré dans la question Q40, les champs s'écrivent  $\vec{E}_0(M) = E_0(x_M)\vec{e}_x$  et  $\vec{E}_A(M) = E_A(x_M)\vec{e}_x$ . On note  $\vec{E}(M) = E(x_M)\vec{e}_x$  le champ total engendré par le condensateur.

- Q44.** (★) Justifier la possibilité d'utiliser le principe de superposition dans le cadre du modèle utilisé. Représenter, au sein d'un même système d'axes, les évolutions de  $E_0$ ,  $E_A$  et  $E$  en fonction de  $x_M$ .

Le champ électrostatique dans l'espace inter-armature s'écrit donc  $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_x$ .

- Q45.** (★) Citer la définition du potentiel électrostatique  $V$ . Citer la loi de Kirchhoff qui découle du fait que le champ électrostatique est à circulation conservative. Indiquer comment cette loi est modifiée en régime variable en présence d'un champ magnétique.
- Q46.** (★) Exprimer la circulation de  $\vec{E}$  le long d'un segment  $\mathcal{C}$  allant du point  $O$  au point  $A$ , orienté de  $O$  vers  $A$ . En déduire la différence de potentiel  $v = V_A - V_O$  entre le potentiel  $V_A$  de l'armature  $\Pi_A$  et le potentiel  $V_O$  de l'armature  $\Pi_0$ .

- Q47.** (★) Définir la capacité  $C$  du condensateur. Établir son expression en fonction de  $S$ ,  $L_x$  et  $\epsilon_0$ .

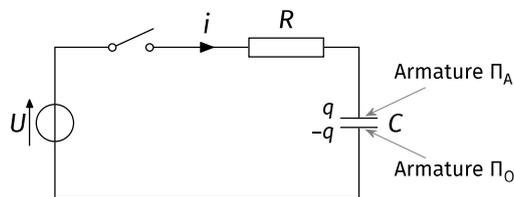
Le champ électrique stocke de l'énergie sous forme électrique. Un élément de volume  $d\tau_M$ , centré au point  $M$ , contient une énergie électrique  $d\mathcal{E}_{e,M} = u_e(M)d\tau_M$ , où  $u_e(M) = \frac{\epsilon_0 E^2(M)}{2}$  est la densité volumique d'énergie électrique au point  $M$ .

- Q48.** (★) Déterminer alors l'expression de l'énergie électrique  $\mathcal{E}_e$  stockée dans le condensateur en fonction de  $C$  et de  $v$ .

On suppose désormais qu'un matériau diélectrique solide, de permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r$ , est placé entre les deux armatures du condensateur, dans l'espace compris entre  $x = 0$  et  $x = L_x$ . En présence d'un champ électrique, un matériau diélectrique se polarise localement. Cela se traduit en associant, à chaque volume mésoscopique de diélectrique centré en  $M$ , un vecteur moment dipolaire électrique  $d\vec{p}_M = \vec{P}(M) d\tau_M$ , où  $\vec{P}(M) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}(M)$ . On admet que les résultats précédents restent valables à condition de remplacer, dans les expressions trouvées, la constante  $\epsilon_0$  par le produit  $\epsilon_0\epsilon_r$ .

**Q49.** Citer les trois façons d'augmenter la capacité d'un condensateur plan à diélectrique et commenter leur faisabilité. Citer les ordres de grandeur de capacités que l'on peut trouver dans un laboratoire d'enseignement d'un lycée.

On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS). Le condensateur est relié à une source idéale de tension, de force électromotrice  $U$  positive et stationnaire, en série avec un conducteur ohmique de résistance  $R$  et un interrupteur (voir le schéma de la figure 15). Le condensateur est initialement déchargé. On ferme l'interrupteur à l'instant de date  $t = 0$ . On note  $\delta q$  la charge qui passe à travers une section de conducteur pendant un intervalle de durée élémentaire  $dt$ , cette charge étant comptée positivement si elle se déplace dans le sens de l'intensité  $i$  et négativement dans le cas contraire.



**Figure 15** – Schéma du circuit mettant en œuvre le condensateur de capacité  $C$ .

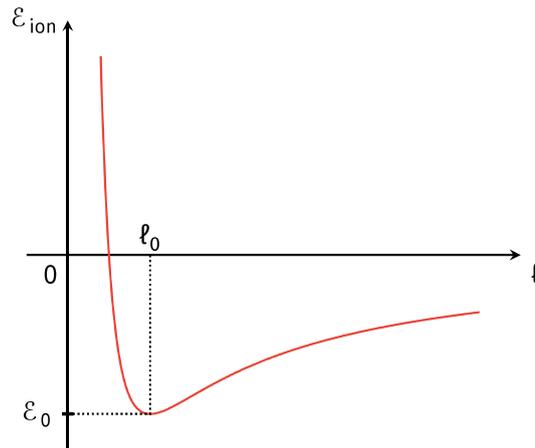
**Q50.** (★) Définir l'intensité  $i$  en faisant intervenir  $\delta q$ .

**Q51.** (★) En réalisant un bilan de charge électrique sur l'armature  $\Pi_A$  du condensateur, justifier le fait que  $i = \frac{dq}{dt}$ , où  $dq$  est la variation de la charge de l'armature  $\Pi_A$  pendant la durée  $dt$ .

**Q52.** (★) Établir l'équation différentielle vérifiée par  $i$  pour  $t > 0$  et la résoudre (on justifiera soigneusement la détermination des conditions initiales). Représenter graphiquement l'évolution temporelle de  $i$ . Mettre en évidence le comportement en  $t = 0$ , le régime transitoire, le régime établi ainsi que le temps caractéristique  $\tau$  associé.

**Q53.** Décrire le mouvement des charges positives et négatives présentes initialement sur l'armature métallique  $\Pi_A$  en exploitant l'expression de  $i(t)$ , obtenue à la question Q52, pour  $t > 0$ , ainsi que la définition de  $i$  donnée dans la question Q50.

## V.2 Polarisation d'un milieu piézoélectrique

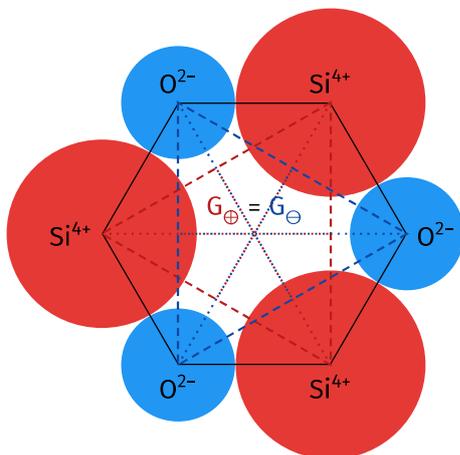


**Figure 16** – Évolution de l'énergie potentielle  $\varepsilon_{ion}$  d'interaction entre deux ions, de charges de signes opposés, en fonction de la distance  $\ell$  qui les sépare.

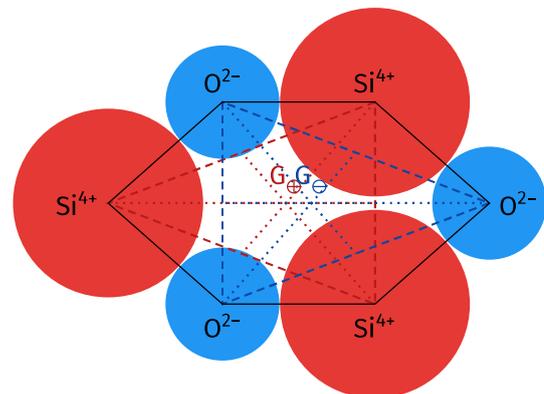
On se propose d'obtenir une expression de la polarisation au sein d'un milieu piézoélectrique et de voir comment elle diffère de celle d'un matériau diélectrique ne présentant pas de propriétés piézoélectriques.

On considère d'abord un solide ionique constitué d'un seul type de cation et d'un seul type d'anion. L'évolution de l'énergie potentielle  $\varepsilon_{ion}$  d'interaction entre deux ions en fonction de la distance  $\ell$  qui les sépare est donnée dans la figure 16.

**Q54.** (★) Justifier qu'il est possible de modéliser l'interaction entre deux ions, de charges de signes opposés, par une force de type « force de rappel d'un ressort » lorsque la distance  $\ell$  qui les sépare est voisine de  $\ell_0$ . Préciser les expressions de la longueur à vide du ressort et de sa constante de raideur en fonction de  $\ell_0$ , de  $\varepsilon_0$  et/ou des dérivées de  $\varepsilon_{ion}$  évaluées en  $\ell_0$ .



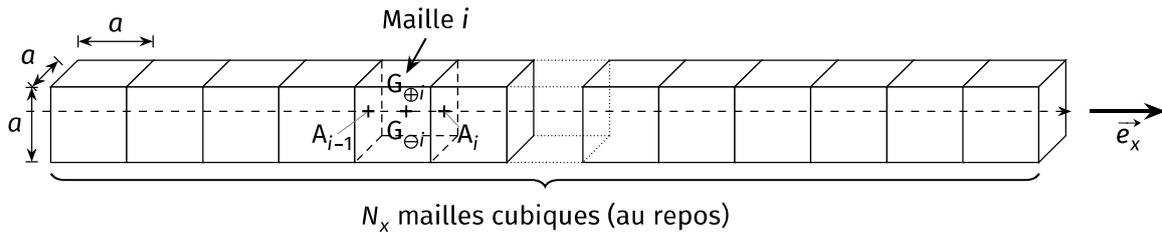
**Figure 17** – Schéma d'une maille au repos : les barycentres  $G_{\oplus}$  et  $G_{\ominus}$  sont confondus.



**Figure 18** – Schéma d'une maille déformée : les barycentres  $G_{\oplus}$  et  $G_{\ominus}$  ne sont plus confondus.

On assimile ici un matériau piézoélectrique à un solide ionique déformable, diélectrique, localement neutre jusqu'à l'échelle de la maille cristalline. Tous les solides ioniques ne présentent néanmoins pas de propriétés piézoélectriques. Si l'on reprend l'exemple du quartz, sa structure cristalline est constituée par des ions silicium  $Si^{4+}$  et des ions oxyde  $O^{2-}$ . Lorsque le matériau ne subit aucune contrainte, le barycentre des cations  $G_{\oplus}$  d'une maille est confondu avec le barycentre des anions  $G_{\ominus}$  de la même maille (voir la figure 17). Lorsque le matériau est déformé, les deux barycentres se déplacent et ne sont plus confondus (voir la figure 18).

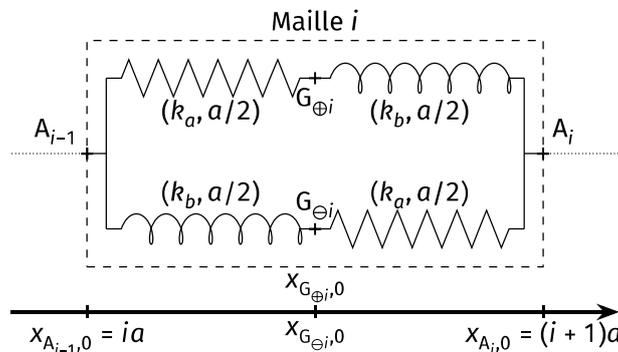
On se propose d'étudier un modèle microscopique simple, unidimensionnel, permettant de lier le déplacement des barycentres en présence d'une contrainte à l'apparition d'une polarisation, de nature piézoélectrique, venant s'ajouter à la polarisation habituelle rencontrée pour un diélectrique.



**Figure 19** – Échantillon macroscopique de matériau piézoélectrique modélisé par  $N_x$  mailles cubiques (au repos) d'arête  $a$ .

Dans le modèle unidimensionnel microscopique que l'on adopte, l'échantillon macroscopique de matériau piézoélectrique est constitué de  $N_x$  mailles cubiques d'arête  $a$ , avec  $N_x \gg 1$  (voir la figure 19). Le comportement d'une maille cubique, indexée par la lettre  $i$  ( $i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket$ ), peut être étudié en considérant les positions de quatre points : le barycentre  $G_{\oplus i}$  des cations de la maille, portant une charge  $+\delta$ , le barycentre  $G_{\ominus i}$  des anions de la maille, portant une charge  $-\delta$ , ainsi que les points  $A_{i-1}$  et  $A_i$  respectivement à la frontière avec la maille précédente et avec la maille suivante. Ces quatre points peuvent se déplacer sur un axe de direction  $\vec{e}_x$ . Les interactions entre ces points sont modélisées par des forces de type « force de rappel d'un ressort », comme montré dans la question Q54, toutes portées par la direction  $\vec{e}_x$  :

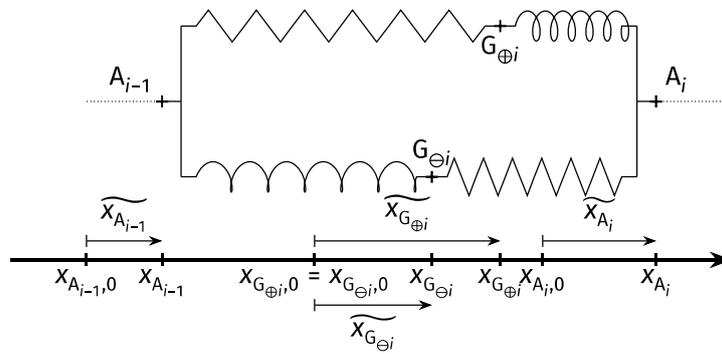
- le point  $G_{\oplus i}$  est lié à  $A_{i-1}$  par un ressort de raideur  $k_a$  et de longueur à vide  $a/2$  ;
- le point  $G_{\oplus i}$  est lié à  $A_i$  par un ressort de raideur  $k_b$  et de longueur à vide  $a/2$  ;
- le point  $G_{\ominus i}$  est lié à  $A_{i-1}$  par un ressort de raideur  $k_b$  et de longueur à vide  $a/2$  ;
- le point  $G_{\ominus i}$  est lié à  $A_i$  par un ressort de raideur  $k_a$  et de longueur à vide  $a/2$ .



**Figure 20** – Modélisation des interactions entre les points  $G_{\oplus i}$ ,  $G_{\ominus i}$ ,  $A_{i-1}$  et  $A_i$  : maille au repos et abscisses au repos. Afin de rendre la figure lisible, les points  $G_{\oplus i}$  et  $G_{\ominus i}$  ont été décalés verticalement. En réalité, les quatre points  $G_{\oplus i}$ ,  $G_{\ominus i}$ ,  $A_{i-1}$  et  $A_i$  sont alignés horizontalement.

En l'absence de champ électrique et lorsque la maille n'est pas déformée (maille au repos), les abscisses des points  $A_{i-1}$  et  $A_i$  sont respectivement  $x_{A_{i-1},0} = ia$  et  $x_{A_i,0} = (i + 1)a$  (voir la figure 20). On note  $x_{G_{\oplus i},0}$  et  $x_{G_{\ominus i},0}$  les abscisses respectives de  $G_{\oplus i}$  et  $G_{\ominus i}$  dans la maille au repos. On ne prend pas en compte l'agitation thermique.

**Q55.** Montrer que ce modèle est compatible avec le fait que les barycentres sont confondus lorsque la maille est au repos et que  $x_{G_{\oplus i},0} = x_{G_{\ominus i},0} = \left(i + \frac{1}{2}\right)a$ .



**Figure 21** – Déformation de la maille sous l'action d'une contrainte et d'un champ électrique  $\vec{E} = E\vec{e}_x$  : écarts aux abscisses de repos.

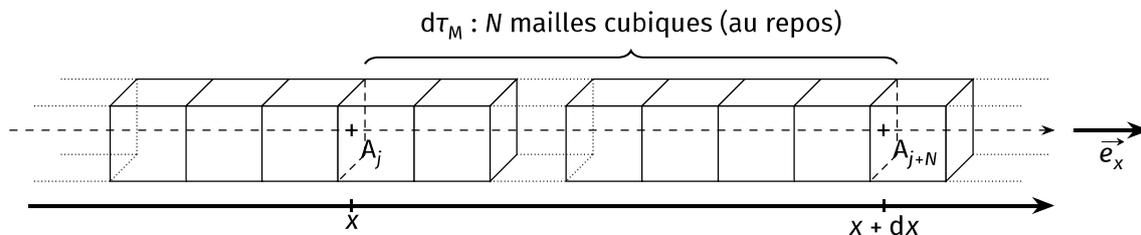
En présence d'une contrainte et d'un champ électrique  $\vec{E} = E\vec{e}_x$  uniforme et stationnaire, la maille se déforme dans la direction de  $\vec{e}_x$ . Une fois l'équilibre mécanique atteint, les abscisses des points  $G_{\oplus i}$ ,  $G_{\ominus i}$ ,  $A_{j-1}$  et  $A_j$  ne correspondent plus à celles de la maille au repos (voir la figure 21). On note à l'aide d'un « tilde » l'écart entre l'abscisse du point et son abscisse pour la maille au repos. Par exemple, pour le point  $G_{\oplus i}$ , l'écart s'écrit  $\widetilde{x}_{G_{\oplus i}} = x_{G_{\oplus i}} - x_{G_{\oplus i,0}}$ . On montre et on admet que la résultante des actions des ressorts qui s'exercent respectivement sur  $G_{\oplus i}$  et  $G_{\ominus i}$  s'écrivent alors :

$$\vec{f}_{\rightarrow G_{\oplus i}} = [-(k_a + k_b)\widetilde{x}_{G_{\oplus i}} + k_a\widetilde{x}_{A_{j-1}} + k_b\widetilde{x}_{A_j}] \vec{e}_x \text{ et } \vec{f}_{\rightarrow G_{\ominus i}} = [-(k_a + k_b)\widetilde{x}_{G_{\ominus i}} + k_a\widetilde{x}_{A_j} + k_b\widetilde{x}_{A_{j-1}}] \vec{e}_x.$$

**Q56.** À l'équilibre mécanique, exprimer  $\widetilde{x}_{G_{\oplus i}}$  et  $\widetilde{x}_{G_{\ominus i}}$  en fonction de  $\delta$ ,  $E$ ,  $k_a$ ,  $k_b$ ,  $\widetilde{x}_{A_{j-1}}$  et  $\widetilde{x}_{A_j}$ .

**Q57.** Définir le moment dipolaire électrique  $\vec{p}_i$  de la maille  $i$  et montrer que :

$$\vec{p}_i = \left[ \frac{2\delta^2 E}{k_a + k_b} + \frac{\delta(k_b - k_a)}{k_a + k_b} (\widetilde{x}_{A_j} - \widetilde{x}_{A_{j-1}}) \right] \vec{e}_x.$$



**Figure 22** – Volume mésoscopique  $d\tau_M$ , compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , constitué par  $N$  mailles cubiques (au repos).

On cherche à lier la description microscopique que nous venons de réaliser à une description mésoscopique du cristal piézoélectrique. On considère un volume mésoscopique  $d\tau_M$  de matériau compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  au repos (voir la figure 22), englobant les  $N$  mailles comprises entre les points  $A_j$  en  $x$  et  $A_{j+N}$  en  $x + dx$  (au repos).

**Q58.** (★) Énoncer le critère quantitatif que doit vérifier  $N$  pour que  $d\tau_M$  soit de taille mésoscopique dans la direction de  $\vec{e}_x$ . Ce critère prendra la forme d'une inégalité forte.

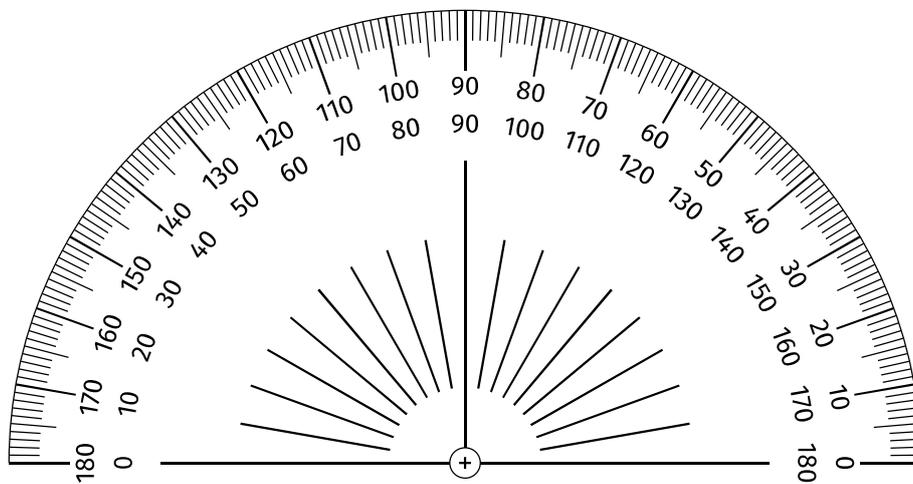
L'abscisse d'un point  $M_{\text{repos}}$  du matériau au repos est notée  $x$ . Lorsque l'on déforme le cristal, ce point se déplace jusqu'à une position repérée par un point  $M$ . On définit le champ d'élongation longitudinal  $\vec{u}(M_{\text{repos}})$  par :

$$\vec{u}(M_{\text{repos}}) = \overrightarrow{M_{\text{repos}}M} = u(x)\vec{e}_x.$$

**Q59.** Définir le moment dipolaire électrique total  $\vec{dp}_M$  du volume mésoscopique  $d\tau_M$  en utilisant le moment dipolaire électrique d'une maille obtenu à la question Q57. En déduire l'expression de  $\vec{dp}_M$  en fonction de  $\delta$ ,  $E$ ,  $k_a$ ,  $k_b$ ,  $N$ ,  $u(x)$  et  $u(x + dx)$ .

**Q60.** Exprimer finalement, au premier ordre en  $dx$ , la densité volumique de moment dipolaire électrique  $\vec{P}(M)$  en  $M$  définie par  $\vec{P}(M) = \frac{d\vec{p}_M}{d\tau_M}$ .

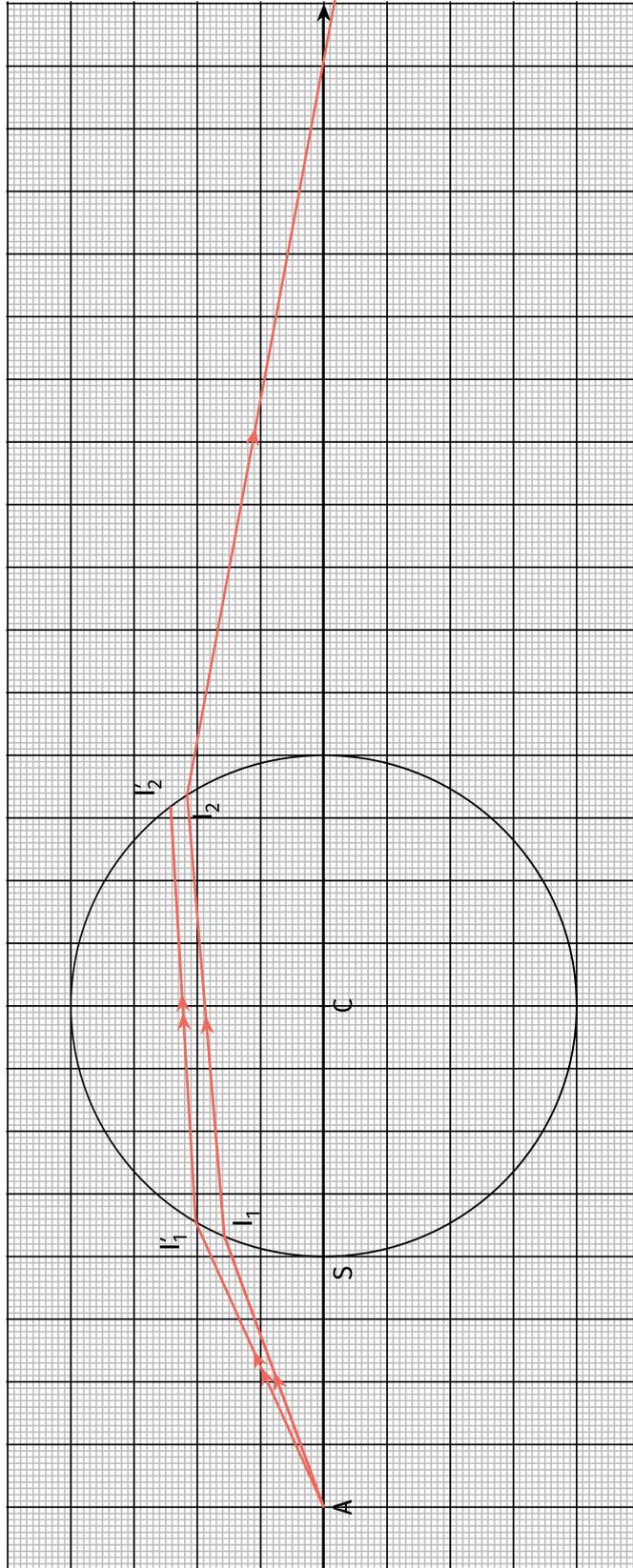
$\vec{P}(M)$  est la somme de deux termes. Le premier est proportionnel à  $E$  et est présent dans tout matériau diélectrique. Le second est proportionnel à  $(k_b - k_a)\frac{du}{dx}$  et est caractéristique de l'effet piézoélectrique. Muni de cette expression, il est possible d'étudier le comportement électrique d'un piézoélectrique en utilisant les résultats établis pour un condensateur à diélectrique.



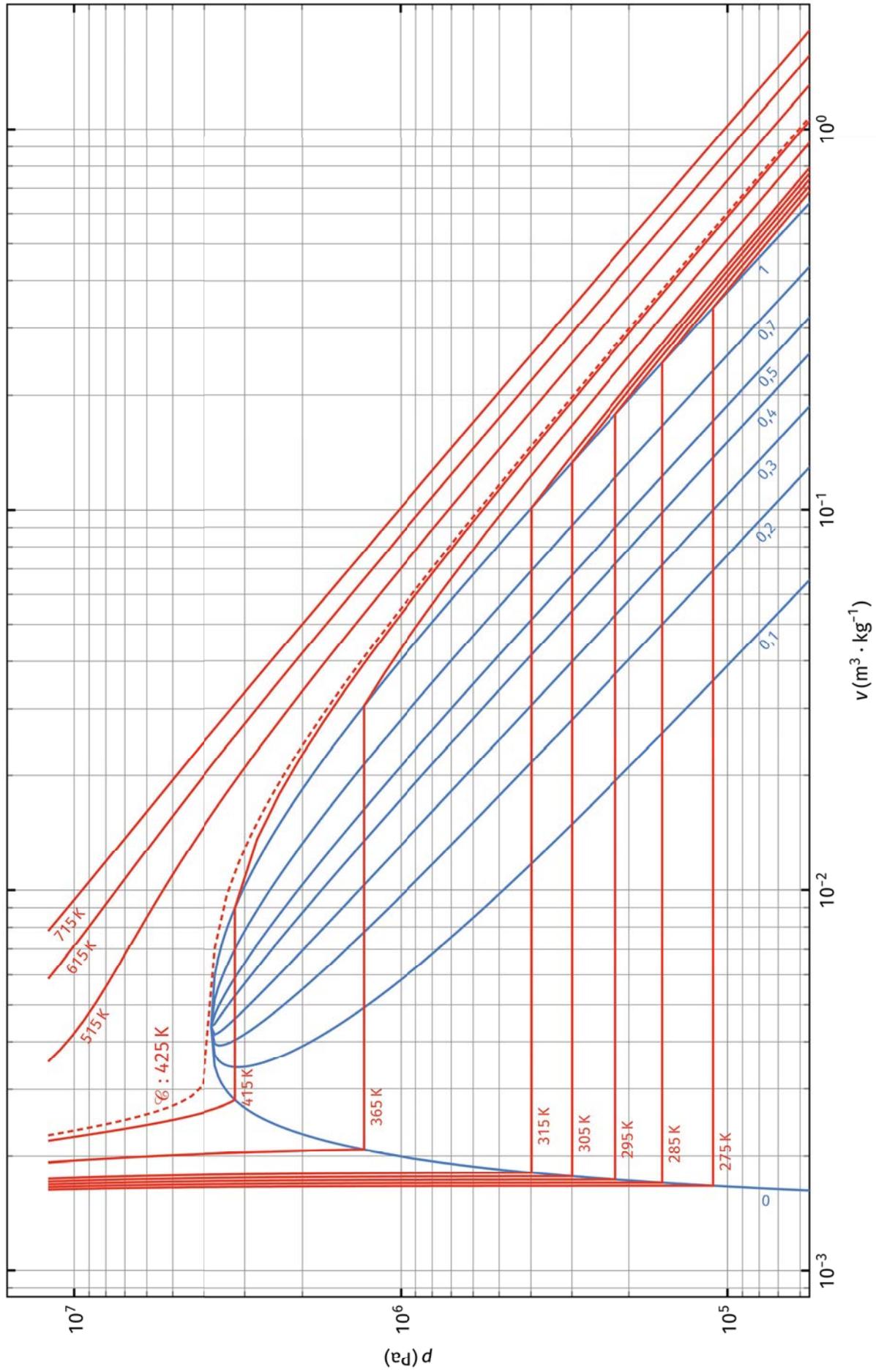
**Figure 23** – Rapporteur « de secours » à découper.



**NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE**



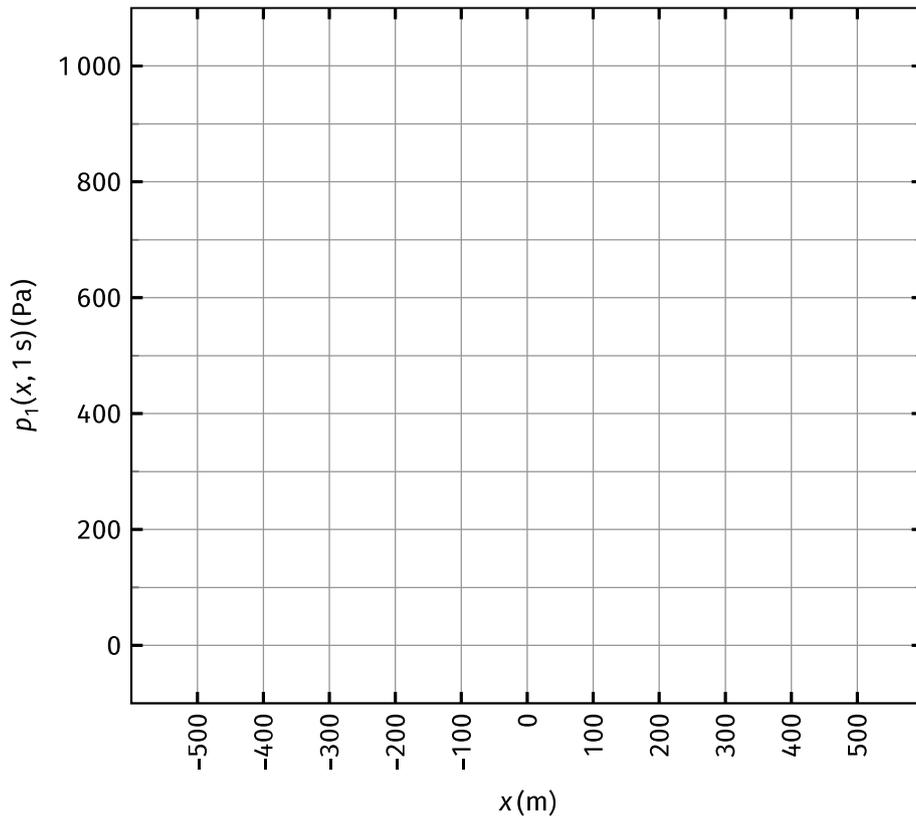
**Figure a** – Représentation, dans un plan en coupe, de la sphère en quartz fondu, de centre C, d'indice optique  $n = 1,46$ , et de la marche d'un rayon de lumière, issu d'un point-objet lumineux A, à travers le système optique, passant successivement par les points  $I_1$  et  $I_2$ . La marche du deuxième rayon de lumière issu de A et passant par  $I'_1$  et  $I'_2$  est à compléter soigneusement.



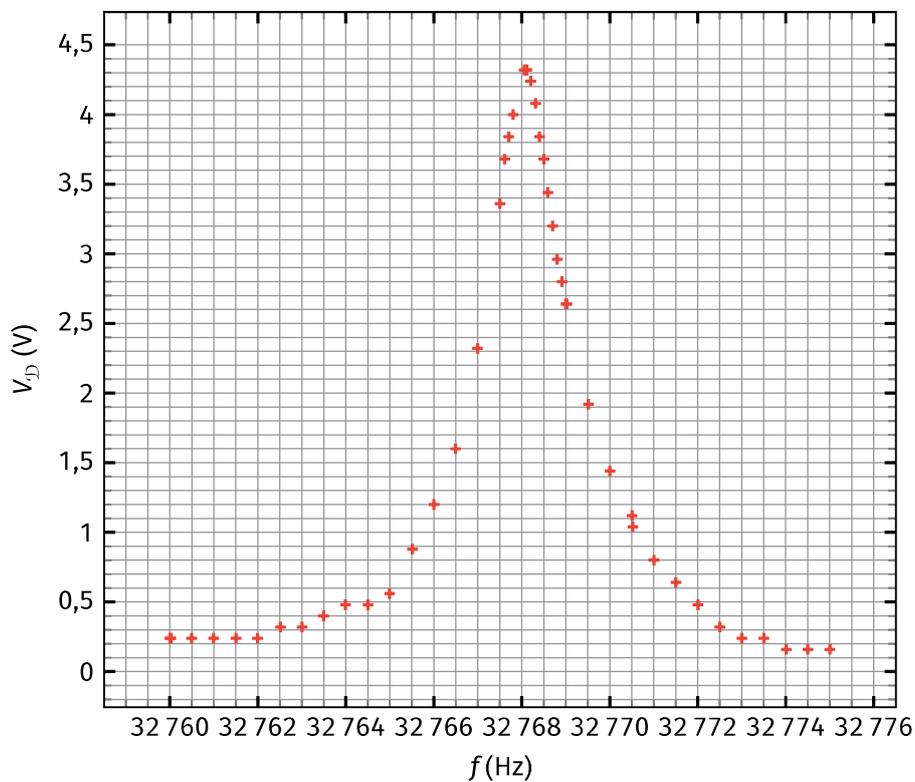
**Figure b** – Diagramme  $p - v$  du butane. Les courbes isothermes sont représentées en rouge. Les courbes isotitres sont représentées en bleu.



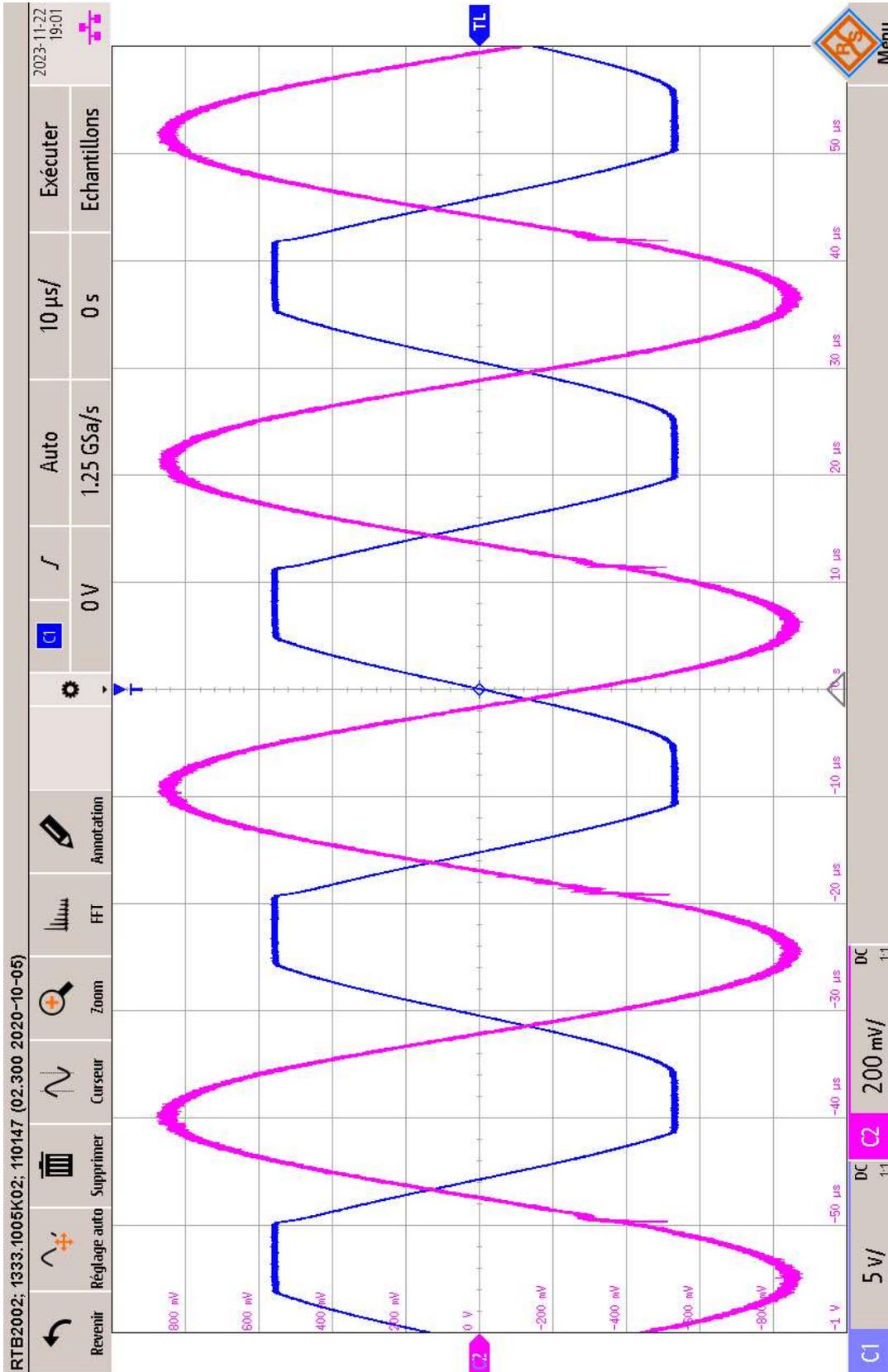
**NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE**



**Figure c** – Évolution spatiale (à compléter) du champ de surpression  $p_1(x, t)$  à la date  $t = 1$  s pour le champ de surpression initial représenté dans la figure 2.



**Figure d** – Évolution de l'amplitude  $V_D$  de la tension  $v_D$  en fonction de la fréquence  $f$  de la tension sinusoïdale  $u_D$ . Résultats expérimentaux tirés de l'article *Du réveil à la montre à quartz*, André Deiber, Olivier Kempf et Laurent Markiewicz, BUP n° 799, Vol 91, Décembre 1997, pp.2023–2050.



**Figure e** – Capture d'écran d'oscilloscope réalisée lorsque les oscillations de  $v_A$  sur la voie C1 et  $v_D$  sur la voie C2.