

SESSION 2025

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

**Section : PHYSIQUE-CHIMIE
Option : PHYSIQUE**

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1500A	101	0385

Physique du sang

Cette composition traite de différents phénomènes associés à la physique du sang.

La première partie s'intéresse en particulier aux modèles d'écoulement du sang. La deuxième partie étudie les mesures d'écoulement sanguin par effet Doppler tandis que la troisième partie explore la mécanique des globules rouges par pression de radiation.

Les différentes parties sont indépendantes les unes des autres.

Données :

Viscosité dynamique moyenne du sang : $\eta = 4,8 \times 10^{-3}$ Pa.s

Masse volumique moyenne du sang : $\rho = 1,07 \times 10^3$ kg.m⁻³

Débit cardiaque moyen en sortie du cœur (aorte) : $Q_{\text{cœur}} = 5$ L.min⁻¹

Vitesse du son dans le corps humain : $c_s = 1,540 \times 10^3$ m.s⁻¹

Pression mesurée en mm de mercure (mmHg) : 760 mmHg = 1013 hPa

Tension de surface d'un globule rouge : $\gamma_{GR} = 5 \times 10^{-5}$ N.m⁻¹

Rayon typique d'un globule rouge : $R = 3$ μm

Indice de réfraction d'un globule rouge : $n_{GR} = n_1 = 1,38$

Vitesse de propagation de la lumière dans le vide : $c = 3 \times 10^8$ m.s⁻¹

Écart normalisé :

Soit deux grandeurs x_1 et x_2 assorties d'incertitudes type $u(x_1)$, $u(x_2)$, on définit l'écart normalisé (appelé aussi Z-score) entre ces grandeurs par :

$$z_{\text{score}} = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u_1(x_1)^2 + u_2(x_2)^2}}$$

Définition du niveau d'intensité sonore - décibel acoustique :

L en Décibel (dB) :

$$L = 10 \log \frac{I}{I_{\text{ref}}}$$

avec I intensité sonore en W.m⁻² et $I_{\text{ref}} = 10^{-12}$ W.m⁻² intensité sonore de référence.

Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques

- $\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$
- $\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
- $\text{div}(f\vec{a}) = f \text{div } \vec{a} + \vec{\text{grad}} f \cdot \vec{a}$

Théorème de Green Ostrogradski :

Pour un champ de vecteurs \vec{a} quelconque :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{dS}$$

avec S une surface englobant un volume V , orientée vers l'extérieur.

Formules de trigonométrie :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$$

$$\cos(a) \times \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

Dans le système circulatoire, le sang enrichi en dioxygène quitte le cœur via une série d'artères, puis d'artérioles de diamètre plus petit, qui deviennent ensuite des vaisseaux capillaires. Le sang appauvri retourne au cœur par des veinules, puis par des veines. La microcirculation artérioles-capillaires-veinules constitue l'essentiel du système vasculaire.

Le sang circule continuellement dans les vaisseaux sanguins grâce à la pompe cardiaque, et peut être en écoulement laminaire (physiologique) ou turbulent (par exemple si un obstacle comme un caillot ou une sténose est présent).

1 Modèles d'écoulement du sang

1.1 Écoulement d'un fluide newtonien dans un cylindre

1.1.1 Préliminaires

On se propose dans cette partie d'établir l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement laminaire incompressible à géométrie cylindrique pour un fluide quelconque, newtonien ou non, soumis à des contraintes de cisaillement σ .

On note $\vec{j} = \rho\vec{v}$ le champ de vecteur de densité de courant de masse, où \vec{v} est le champ de vitesse et ρ est la masse volumique.

Q 1. En effectuant un bilan de masse sur un volume de contrôle V de fluide fixe délimité par la surface S pendant un temps dt , montrer que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad (1)$$

Q 2. Retrouver alors l'équation de la conservation de la masse, donnée par l'équation (2).

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (2)$$

Donner la signification de la notation $\frac{D}{Dt}$.

Dans le cas d'un écoulement incompressible simplifier la relation (2). En déduire, en justifiant, une propriété vérifiée par le flux du champ de vitesses.

Le problème de l'écoulement dans un vaisseau sanguin peut se ramener schématiquement à l'écoulement unidirectionnel d'un fluide visqueux dans un cylindre de longueur L et de rayon R (longueur et rayon du vaisseau).

On suppose cet écoulement homogène et incompressible. Par ailleurs, **on néglige l'influence de la pesanteur** et on fait l'hypothèse d'un champ de vitesse s'exprimant en coordonnées cylindriques sous la forme : $\vec{v} = v_z(r, \theta, z)\vec{u}_z$.

On suppose que le sang est poussé vers les z croissants par un gradient de pression négatif (voir figure 1). On appelle respectivement P_1 et P_2 la pression du sang à l'entrée du cylindre et à la sortie.

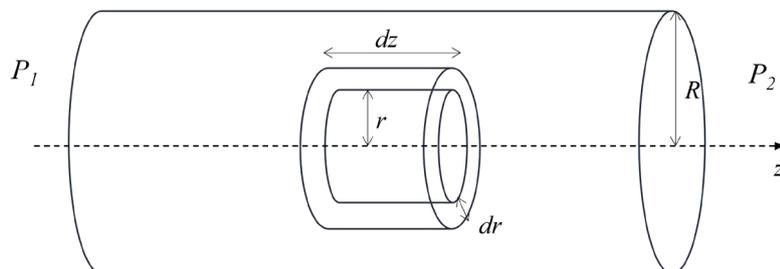


FIGURE 1 – Modélisation du vaisseau sanguin avec $P_1 > P_2$, et schéma d'une particule de fluide

Q 3. Commenter l'hypothèse faite sur le champ de vitesse et montrer que v_z ne dépend que de r .

On considère la particule de fluide figure 1 comprise entre le cylindre d'axe z de longueur dz et de rayon r et le cylindre de même axe, de même longueur et de rayon $r + dr$.

On admet que la force de cisaillement $d\vec{F}$ qu'exerce une couche de fluide de surface élémentaire dS sur une couche de fluide située plus proche de l'axe s'écrit : $d\vec{F} = \sigma dS \vec{u}_z$, où σ est la contrainte de cisaillement.

Q 4. Exprimer la force de cisaillement exercée par le reste du fluide sur la particule de fluide (en considérant les surfaces en r et $r + dr$).

En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la particule de fluide, obtenir l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}}P + \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma r)}{\partial r} \vec{u}_z \quad (3)$$

1.1.2 Ecoulement de Poiseuille dans l'hypothèse d'un fluide newtonien

Dans cette partie on considère le sang comme un fluide newtonien. Dans ce cas, la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse. Pour l'écoulement cylindrique considéré, cela implique $\sigma = \eta \frac{dv_z}{dr}$ où η est la viscosité dynamique du sang, supposée uniforme et constante.

Q 5. On rappelle l'expression du nombre de Reynolds \mathcal{R}_E d'un écoulement cylindrique en fonction des grandeurs caractéristiques de l'écoulement, en prenant $2R$ comme longueur caractéristique et U comme vitesse caractéristique :

$$\mathcal{R}_E = \frac{2R\rho U}{\eta} \quad (4)$$

Préciser la signification physique du nombre de Reynolds. Dans le cadre d'un écoulement dans une conduite, préciser le type d'écoulement observé selon la valeur numérique du nombre de Reynolds, en ordre de grandeur.

Q 6. Simplifier l'équation (3) en supposant l'écoulement stationnaire, laminaire, homogène et incompressible puis établir l'évolution de la pression en fonction de z , P_1 , $\Delta P = P_1 - P_2$ et L .

Montrer que la loi de vitesse $v_z(r)$ vérifie l'équation (5) :

$$v_z(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L}(r^2 - R^2) \quad (5)$$

Q 7. Tracer le profil de vitesse $v_z(r)$.

Q 8. Définir le débit volumique Q_v transporté par le fluide. Montrer que ce débit vérifie la loi de Poiseuille donnée par l'équation (6) :

$$Q_v = \pi R^4 \frac{\Delta P}{8\eta L} \quad (6)$$

On peut établir une analogie entre l'écoulement de type Poiseuille dans une conduite cylindrique soumise à une différence de pression ΔP entre l'entrée et la sortie et la loi d'Ohm utilisée en électricité, ΔP étant analogue à la tension u et Q_v à l'intensité i .

Q 9. Définir la résistance hydraulique R_h de la conduite en précisant son unité. Exprimer R_h en fonction de η , L et R .

Commenter la variation de la perte de charge (diminution de pression liée à l'écoulement) avec le rayon du cylindre en comparant avec l'analogie en électricité.

1.1.3 Vérification expérimentale de la loi de Poiseuille

On peut vérifier expérimentalement la loi de Poiseuille avec un liquide comme de l'eau, avec par exemple le montage schématisé figure 2 (voir BUP 1994 volume 8).

L'alimentation en eau s'effectue par un réservoir monté sur une glissière maintenue par un système vis-écrou qui permet de faire varier la hauteur H , mesurée par un mètre gradué en cm. On suppose le diamètre du réservoir assez grand pour que le niveau du liquide reste constant pendant l'expérience.

Le débit est mesuré à l'aide d'une éprouvette graduée en mL et d'un chronomètre précis à la seconde.

On dispose d'un tube capillaire cylindrique de longueur $L = 1,80$ m et de rayon $R = 0,50$ mm enroulé et fixé sur une planche horizontale surélevée permettant de placer l'éprouvette en sortie du tuyau à la hauteur de la planche. Le rayon de courbure de l'enroulement est choisi suffisamment important pour que le modèle abordé dans la partie précédente soit valable, ainsi que pour éviter toutes pertes de charge incontrôlées.

Tous les autres tuyaux de raccordement ont un diamètre supérieur ou égal à 12 mm.

On appelle ρ_{eau} la masse volumique de l'eau et on cherche à déterminer sa viscosité dynamique η_{eau} . On suppose que l'on travaille à 25°C à pression ambiante et on prend $\rho_{\text{eau}}(25^\circ\text{C}) = 997,13 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

La valeur de référence publiée de la viscosité dynamique de l'eau est : $\eta_{\text{eau, référence}}(25^\circ\text{C}) = 8,91 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ avec une incertitude type $u(\eta_{\text{eau, référence}}) = 0,20 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

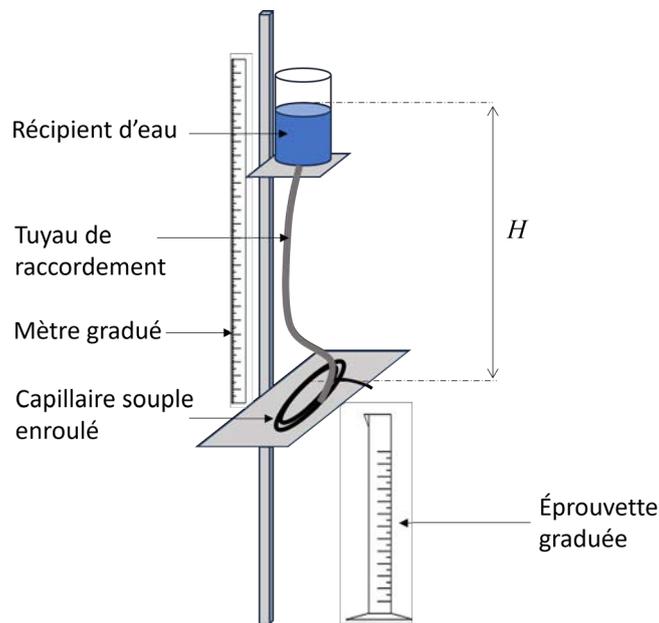


FIGURE 2 – Montage présenté dans le BUP 1994 volume 8

Q 10. Justifier que l'on peut négliger les pertes de charges dans les tuyaux de raccordement par rapport aux pertes de charge dans le capillaire.

Quelle pourrait-être l'origine des pertes de charges incontrôlées que le choix d'un grand rayon de courbure d'enroulement vise à limiter ?

Exprimer la différence de pression ΔP entre l'entrée et l'extrémité du capillaire enroulé en fonction des données, puis en déduire l'expression du débit volumique Q_v en fonction des données.

On choisit de mesurer le volume d'eau V_0 récupéré dans l'éprouvette pour une durée $t_0 = 270$ s, pour différentes hauteur H . On obtient alors les valeurs suivantes :

Hauteur H (cm)	30	40	50	60	70
Volume V_0 (mL)	12,5	17,0	21,0	25,0	29,5

On se propose alors d'utiliser un programme écrit en langage Python pour modéliser les résultats obtenus par une fonction affine $Q_v = A \times H$ et ainsi vérifier la validité du modèle de l'écoulement de Poiseuille, déterminer la valeur de A ainsi que son incertitude type, afin d'obtenir une mesure expérimentale de la viscosité dynamique de l'eau associée à son incertitude type.

On fournit le code du programme Python utilisé en annexe 1. Le graphique obtenu est donné dans la figure 3. Les données affichées par l'ordinateur sont présentées sur la figure 4.

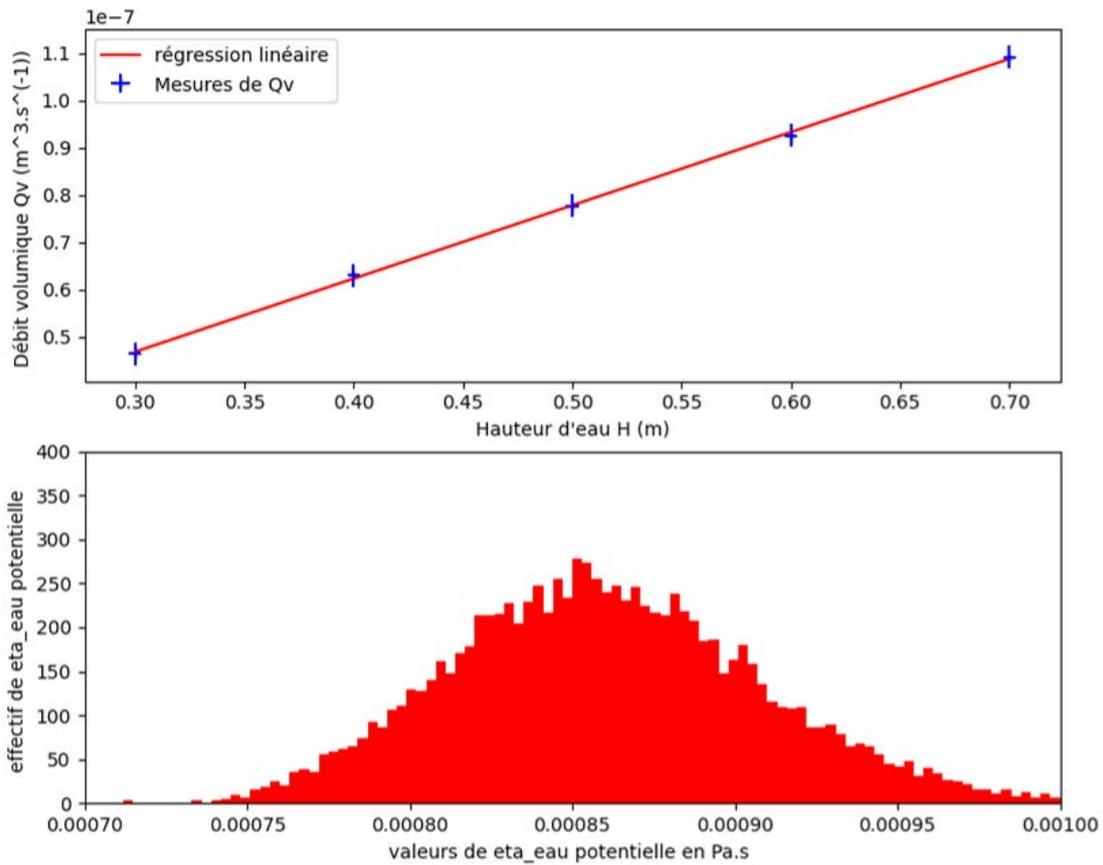


FIGURE 3 – Régression linéaire $Q_v(H)$ des résultats de l'expérience et histogramme des valeurs possibles de viscosité dynamique η mesurée expérimentalement.

Coefficient directeur $A = 1.550722348692588\text{e-}07 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $u(A) = 7.77327849386914\text{e-}09 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
 Ordonnée à l'origine $O = 3.1725836641087085\text{e-}10 \text{ m}^3/\text{s}$ et $u(O) = 4.056510839522545\text{e-}09 \text{ m}^3/\text{s}$
 $\eta_{\text{eau, expérimentale}} = 0.0008608733561925844 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ et $u(\eta_{\text{eau expérimentale}}) = 4.829497784826028\text{e-}05 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

FIGURE 4 – Valeurs numériques affichées dans la console

Q 11. Quel est le type d'évaluation d'incertitude (A ou B) choisi dans le programme Python de l'annexe 1 (lignes 20 à 25) pour les différentes grandeurs expérimentales? Commenter les expressions d'incertitudes types choisies pour R , H et Q_v .

Q 12. Dans le programme, identifier la fonction permettant d'obtenir les paramètres de la modélisation de la relation Q_v en fonction de H par régression linéaire.

Discuter, en argumentant, la validité du modèle d'écoulement de Poiseuille.
Proposer une valeur de A et son incertitude.

Q 13. Expliquer sommairement l'objectif et la méthode, dite de Monte Carlo présentée de la ligne 45 à 53. Compléter la ligne 51.

Expliquer comment le programme calcule une valeur de $\eta_{\text{eau, expérimentale}}$ et son incertitude $u(\eta_{\text{eau, expérimentale}})$ et préciser les lignes des commandes correspondantes.

Proposer une valeur numérique pour ces deux grandeurs. Aurait-on pu les déduire de l'histogramme des valeurs possibles de $\eta_{\text{eau potentielle}}$ et si oui comment ?

En comparant la valeur obtenue pour $\eta_{\text{eau, expérimentale}}$ avec la valeur de référence $\eta_{\text{eau, référence}}$ à 25°C , conclure sur la validité de l'expérience comme moyen expérimental de déterminer η_{eau} .

1.2 Hypothèse d'un écoulement newtonien du sang

La description hydrodynamique la plus simple assimile l'écoulement sanguin à celui d'un écoulement permanent et incompressible dans un réseau de conduites élastiques entre un réservoir à haute pression P_{ar} (pression artérielle moyenne) et un réservoir à basse pression P_{v} (pression veineuse moyenne). Dans le système circulatoire humain, l'aorte se ramifie en artères qui se divisent en artérioles. Les artérioles se ramifient ensuite en capillaires. Le trajet de retour du sang est réalisé via les veinules, veines et enfin veine cave, comme le présente la figure 5.

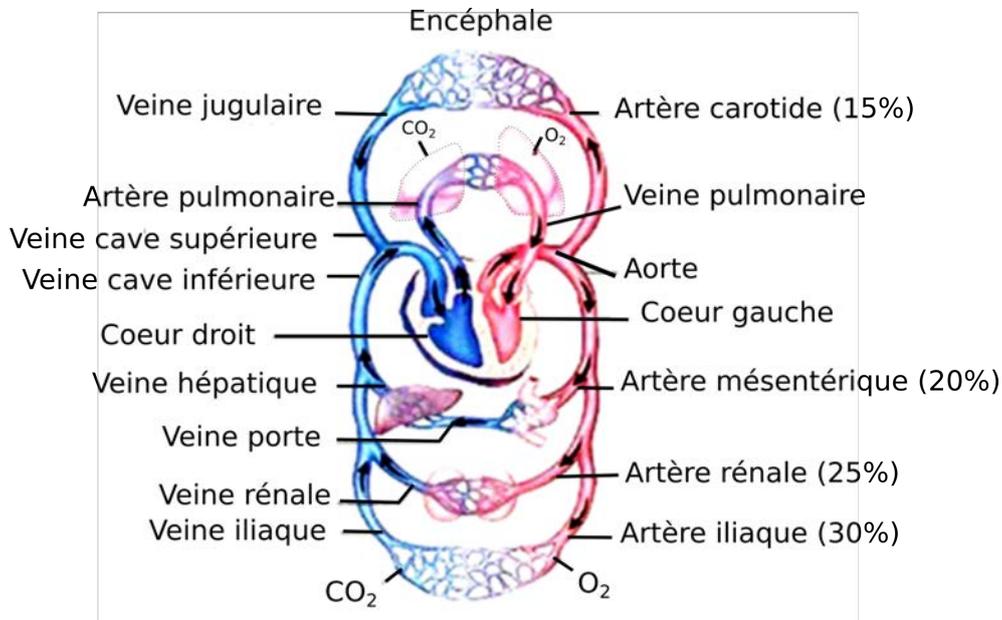


FIGURE 5 – Petite circulation entre le cœur droit et gauche et les poumons, et circulation systémique du sang (circuit irriguant tous les organes autres que les poumons.) Les fractions du débit volumique total $Q_{\text{cœur}}$ alimentant les grandes parties du circuit systémique sont indiqués en pourcentage. La fraction manquante est celle alimentant le muscle cardiaque.

Comme tout liquide visqueux s'écoulant dans un tube, le sang propulsé par le cœur dans le système circulatoire est soumis à une résistance hydraulique à l'écoulement. Cette résistance vasculaire est l'un des deux facteurs qui influencent la pression et le débit du courant sanguin, l'autre étant la compliance des vaisseaux sanguins (déformation élastique des artères avec la pression).

On considère un lit vasculaire (réseau microcirculatoire) simplifié du système d'irrigation d'un organe, voir figure 6, dans lequel le sang circule entre une artère et une veine par un ensemble de N_c capillaires identiques en parallèle. On supposera le modèle de Poiseuille vérifié pour tout l'écoulement.

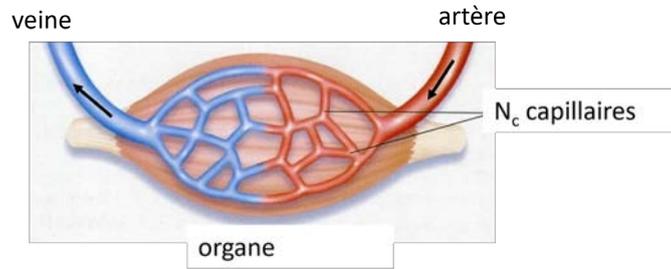


FIGURE 6 – Lit vasculaire simplifié d'un organe. Dans le modèle adopté, on considère qu'il existe N_c capillaires identiques en parallèle entre l'artère et la veine.

Modélisation du lit vasculaire d'un organe

Rayon d'un capillaire $R_c = 5,0 \mu\text{m}$
 Longueur d'un capillaire : $\ell_c = 1,0 \text{ cm}$
 Rayon de l'aorte $R_{ao} = 0,8 \text{ cm}$
 Rayon de l'artère $R_{ar} = 0,25 \text{ cm}$
 Rayon de la veine $R_v = 0,25 \text{ cm}$
 Débit volumique dans le coeur : $Q_{\text{coeur}} = 5 \text{ L}\cdot\text{min}^{-1}$
 Débit volumique dans l'aorte $Q_{ao} = Q_{\text{coeur}}$
 Débit volumique dans l'artère $Q_{ar} = 5\% \times Q_{\text{coeur}}$
 Pression dans l'artère : $P_{ar} = 12\,000 \text{ Pa}$
 Pression dans la veine : $P_v = 1\,330 \text{ Pa}$

Q 14. Dessiner le schéma électrocinétique équivalent du système simplifié du lit vasculaire.

Déterminer l'expression de la résistance hydraulique d'un capillaire R_{hc} , la résistance du réseau de capillaires R_h , et en déduire l'expression du nombre de capillaires N_c en fonction des données.

Déterminer également le débit volumique Q_c du sang dans les capillaires.

Effectuer les applications numériques. Commenter.

Q 15. On définit la vitesse débitante U du sang comme celle qu'aurait un écoulement uniforme (donc non visqueux) de même débit. Calculer numériquement la vitesse débitante du sang, U_{ar} dans l'artère (ou la veine) et U_c dans les capillaires. Calculer également la vitesse débitante du sang directement en sortie du coeur U_{ao} .

En utilisant l'expression fournie du nombre de Reynolds, équation (4), calculer la valeur numérique des nombres de Reynolds $\mathcal{R}_{E_{ar}}$ de l'écoulement dans l'artère, \mathcal{R}_{E_c} de l'écoulement dans un capillaire et $\mathcal{R}_{E_{ao}}$ de l'écoulement dans l'aorte, directement en sortie du coeur. Commenter.

Q 16. On donne la pression moyenne dans l'aorte $P_{ao} = 12,9 \text{ kPa}$ et dans la veine cave $P_{vc} = 800 \text{ Pa}$. Calculer numériquement la valeur de la résistance hydraulique R_{hcirc} correspondant à la circulation systémique du sang dans le corps humain.

1.3 Modèle du sang à écoulement périodique, effet Windkessel

Le modèle d'un écoulement permanent ne peut décrire complètement l'écoulement du sang dans le système vasculaire. En effet, le sang ne sort pas du coeur de façon continue mais périodiquement : le régime est pulsé ; il comprend deux phases, la diastole et la systole.

La systole débute à chaque battement cardiaque : le ventricule gauche propulse dans l'aorte le volume d'éjection systolique, de l'ordre de 80 mL. Pendant la diastole, aucun débit ne sort du coeur.

On note T la période cardiaque, t_0 la durée de la systole et t_1 celle de la diastole. Expérimentalement on constate $t_0 \approx \frac{T}{3}$. Le débit volumique délivré par le coeur pendant la systole est noté Q_{sys} . Le débit sanguin est présenté figure 7.

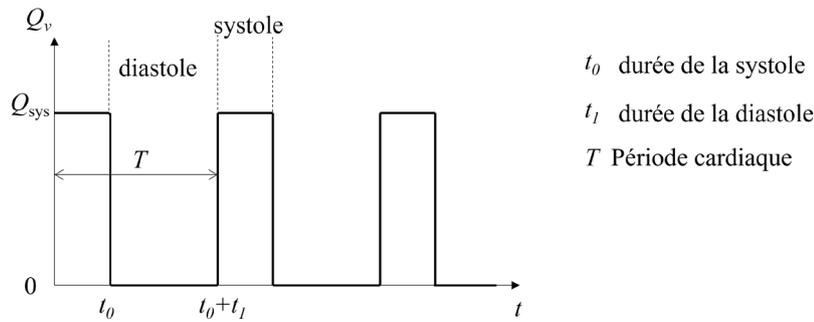


FIGURE 7 – Débit sanguin du cœur en fonction du temps

Pendant la systole, une partie du volume sanguin éjecté par le cœur s'écoule vers la périphérie de l'aorte (composante axiale), tandis qu'une large part (composante radiale) dilate transitoirement l'aorte, dont la paroi est riche en fibres élastiques. Cette dilatation permet le stockage provisoire d'un volume sanguin et d'une quantité d'énergie, sous forme élastique. Lorsque la force ventriculaire d'éjection disparaît, la diastole débute : volume sanguin et pression sont restitués sous forme d'une nouvelle composante axiale. L'énergie stockée pendant la systole est restituée pendant la diastole.

Du fait de l'élasticité de la paroi artérielle et de la résistance hydraulique de la circulation systémique, le débit cardiaque discontinu est transformé en débit artériolo-capillaire continu.

Ainsi lorsque l'on mesure la pression artérielle d'une personne on obtient 2 valeurs : la pression systolique est la pression maximale obtenue lors de la contraction du cœur, de l'ordre de 130 mmHg pour une personne en bonne santé et la pression diastolique, pression minimale obtenue pendant le relâchement du cœur, de l'ordre de 80 mmHg. Le médecin annonce alors une tension de 13-8.

On se propose dans cette partie d'expliquer ce résultat avec un modèle simple basé sur la théorie d'Otto Franck datant de 1899 nommé effet « Windkessel » (« chambre à air » en allemand).

Le modèle, présenté sur la figure 8, est constitué par une chambre d'accumulation élastique modélisant l'élasticité des artères, placée dans un conduit rigide comportant un clapet (valve cardiaque) en amont, et la résistance hydraulique R_{hcirc} de la circulation systémique en aval (principalement artérioles et capillaires). Cette résistance mène ensuite au système veineux de pression P_v supposée constante. La pression dans la chambre est appelée P_a et dépend du temps.

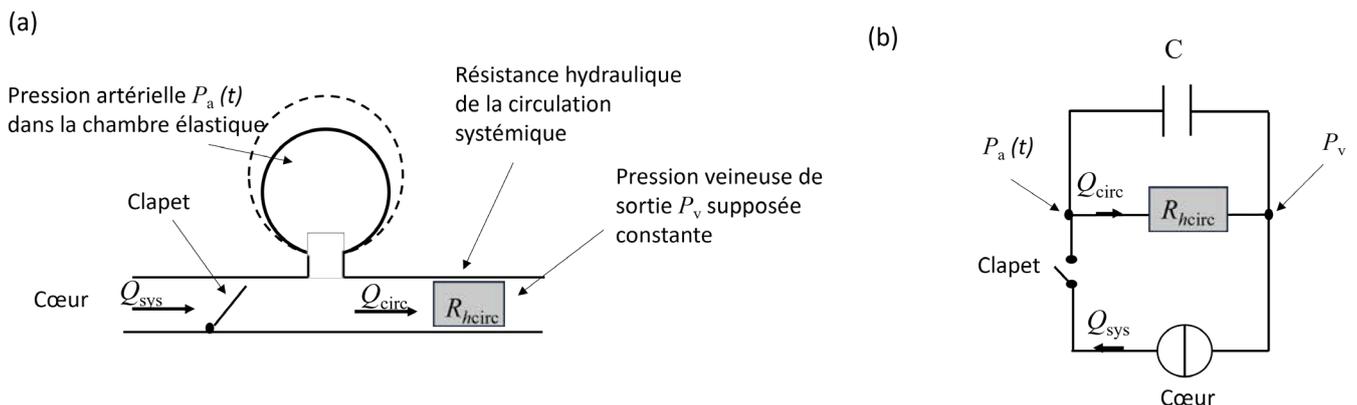


FIGURE 8 – (a) Modèle de Windkessel. (b) Analogie électrocinétique du modèle de Windkessel

L'écoulement dans la chambre est périodique de période T . Quand le clapet est ouvert (systole) le flux issu du ventricule s'accumule pour une partie dans la chambre élastique, s'échappe pour l'autre partie par la résistance hydraulique. Quand le clapet est fermé (diastole) le flux accumulé dans la chambre s'échappe à son tour par la résistance hydraulique. On appelle Q_{circ} le débit du sang dans le système circulatoire.

La capacité des artères à se déformer est caractérisée par une grandeur appelée compliance notée C supposée constante.

Pour une variation dV de volume de la chambre élastique, observée pour une variation dP de pression en son sein, la compliance a pour expression :

$$C = \frac{dV}{dP}$$

Q 17. Exprimer le débit Q_{sys} sanguin du coeur pendant la systole en fonction du débit moyen du coeur Q_{coeur} , t_0 et T .

Q 18. Justifier sommairement la modélisation électrique de l'effet Windkessel donnée sur la figure 8. On précisera en particulier la grandeur électrique analogue à la compliance du système artériel et celle analogue au débit cardiaque.

Q 19. On note $\Delta P(t) = P_a(t) - P_v$. On considère qu'à $t = 0$ le clapet s'ouvre (fermeture de l'interrupteur) et on pose Q_{circ1} le débit volumique au début de la systole dans le système circulatoire systémique. Donner l'équation différentielle vérifiée par Q_{circ} au cours de la systole et montrer que le débit à la fin de la systole vérifie :

$$Q_{\text{circ}}(t_0) = Q_{\text{circ0}} = Q_{\text{sys}} + (Q_{\text{circ1}} - Q_{\text{sys}}) e^{-\frac{t_0}{\tau}} \quad (7)$$

avec τ une constante à exprimer en fonction des données et dont on précisera l'unité.

De la même façon, en étudiant la phase diastolique et en admettant qu'à la fin de la diastole le débit est revenu à Q_{circ1} (continuité du débit) on peut montrer (admis) :

$$Q_{\text{circ1}} = Q_{\text{circ0}} e^{-\frac{t_1}{\tau}} \quad \text{et} \quad Q_{\text{circ0}} = Q_{\text{sys}} \frac{(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}})}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

Q 20. Pour une fréquence cardiaque moyenne de 70 battements par minutes, une résistance hydraulique $R_{h\text{circ}} = 1,5 \times 10^8 \text{ Pa.s.m}^{-3}$ et une compliance $C = 6 \text{ cm}^3.\text{kPa}^{-1}$, calculer numériquement t_0 , t_1 , τ ainsi que les valeurs extrêmes de Q_{circ} .

Dessiner l'évolution de Q_{circ} en fonction du temps. Conclure.

Q 21. En choisissant une pression de la veine $P_v = 800 \text{ Pa}$ (pression dans la veine cave), calculer numériquement les valeurs P_{a0} en fin de systole et P_{a1} en fin de diastole et comparer aux valeurs de pressions mesurées chez le médecin.

On peut montrer que ce modèle simplifié donne de bons résultats pendant la diastole, en revanche des écarts importants sont visibles pendant la systole, où l'écoulement peut devenir turbulent du fait du débit élevé.

2 Mesure d'écoulement sanguin par effet Doppler

2.1 Propagation des ondes acoustiques dans le corps humain

Dans cette partie, on considère un fluide parfait et on néglige l'influence de la pesanteur.

On se place dans le cadre de l'approximation acoustique : une onde sonore est vue comme une perturbation par rapport à l'état d'équilibre caractérisé par une pression uniforme P_0 , une masse volumique uniforme ρ et une vitesse particulière nulle. L'état du fluide est donc décrit par :

- la pression $p_1(M, t) = P_0 + p(M, t)$
- la masse volumique $\mu_1(M, t) = \rho + \mu(M, t)$
- \vec{v} la vitesse particulière du fluide

Les grandeurs $\frac{p}{P_0}$ et $\frac{\mu}{\rho}$ sont des infiniments petits du premier ordre.

On donne également le coefficient de compressibilité isentropique :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial p_1} \right)_S$$

On considère dans cette partie une onde sonore monochromatique se propageant à la vitesse c_s dans le milieu, dont on néglige la viscosité.

Q 22. Linéariser l'équation de la conservation de la masse (2), l'équation d'Euler (équation (3) dans laquelle $\eta = 0$) et l'expression de χ_S en justifiant soigneusement les termes négligés.

Donner **sans la démontrer** l'équation de d'Alembert vérifiée par la surpression p et obtenir l'expression de la célérité c_s en fonction de χ_s et ρ par un raisonnement dimensionnel.

Q 23. On considère une onde plane progressive monochromatique se propageant selon les x croissants. La surpression acoustique s'écrit, en notation complexe :

$$\underline{p}(x, t) = p_m e^{j(\omega t - kx)}$$

Obtenir la relation de dispersion reliant k à ω .

Exprimer la vitesse particulière complexe \underline{v} en fonction de \underline{p} .

On définit l'impédance acoustique dans le fluide par : $\underline{Z} = \frac{\underline{p}}{\underline{v}}$. Exprimer \underline{Z} , puis $Z = |\underline{Z}|$ en fonction de ρ et χ_S .

Q 24. On définit le champ de vecteur $\vec{\Pi} = p\vec{v}$. Donner son nom et son unité.

L'intensité sonore I est définie par la relation $I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$, où $\langle \rangle$ représente l'opération de moyenne temporelle. Exprimer l'intensité sonore en fonction de p_m , ρ et c_s .

On suppose que les résultats précédents décrivent correctement la propagation des ondes ultrasonores dans le corps humain.

Q 25. Le passage d'une onde ultrasonore dans le corps humain induit des surpressions qui peuvent être dommageables pour les tissus. On considère que les effets biologiques néfastes apparaissent pour une onde d'intensité supérieure à 1 W.cm^{-2} . En déduire l'expression de la surpression maximale utilisable lors d'une échographie et effectuer l'application numérique en prenant une masse volumique pour les tissus biologiques $\rho \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$. (En pratique en échographie Doppler standard on se limite à des intensités de 1 à 5 mW/cm².)

Q 26. Lors de leur propagation dans les tissus biologiques, les ultrasons subissent une atténuation de l'énergie acoustique, du fait de divers phénomènes dissipatifs. On peut montrer que l'intensité des ultrasons dans le corps humain suit une loi exponentielle de la forme : $I(x) = I_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$ où I_0 est l'intensité initiale de l'onde ultrasonore et δ est la longueur caractéristique de pénétration de l'onde ultrasonore. Pour les tissus mous, la longueur δ peut s'écrire : $\delta = \frac{\alpha}{f_0}$ avec f_0 en MHz et $\alpha \approx 2 \text{ cm.MHz}$.

Calculer l'atténuation en décibel de l'intensité sonore après 10 cm de tissus traversés à une fréquence de 3 MHz. Conclure.

Q 27. Quel phénomène limite la résolution spatiale de l'échographie ? Estimer la longueur caractéristique ℓ de résolution en fonction de la fréquence f_0 et de la célérité c_s de l'onde ultrasonore.

Pour l'échographie Doppler et $f_0 = 3$ MHz, calculer numériquement ℓ .

Du fait de la très petite taille des globules rouges ($\approx 6 \mu\text{m}$) devant la longueur d'onde ultrasonore, l'onde ultrasonore n'est pas réfléchiée par ceux-ci mais diffusée dans toutes les directions. L'intensité diffusée est proportionnelle au nombre de diffuseurs par unité de volume et suit une loi analogue à la loi de Rayleigh de la diffusion de la lumière :

$$I_{\text{diffusée}} \propto f_0^4$$

Q 28. Expliquer simplement en utilisant les réponses aux deux questions précédentes en quoi le choix de la fréquence ultrasonore lors du Doppler sanguin est essentiel (intensité du signal, profondeur de l'artère à explorer, résolution spatiale souhaitée).

2.2 Principe de l'échographie Doppler

L'application médicale de l'effet Doppler, découvert en 1843 par Johann Christian Doppler, est apparue dans les années 1960. Le principe d'une sonde Doppler est décrit sur la figure 9.

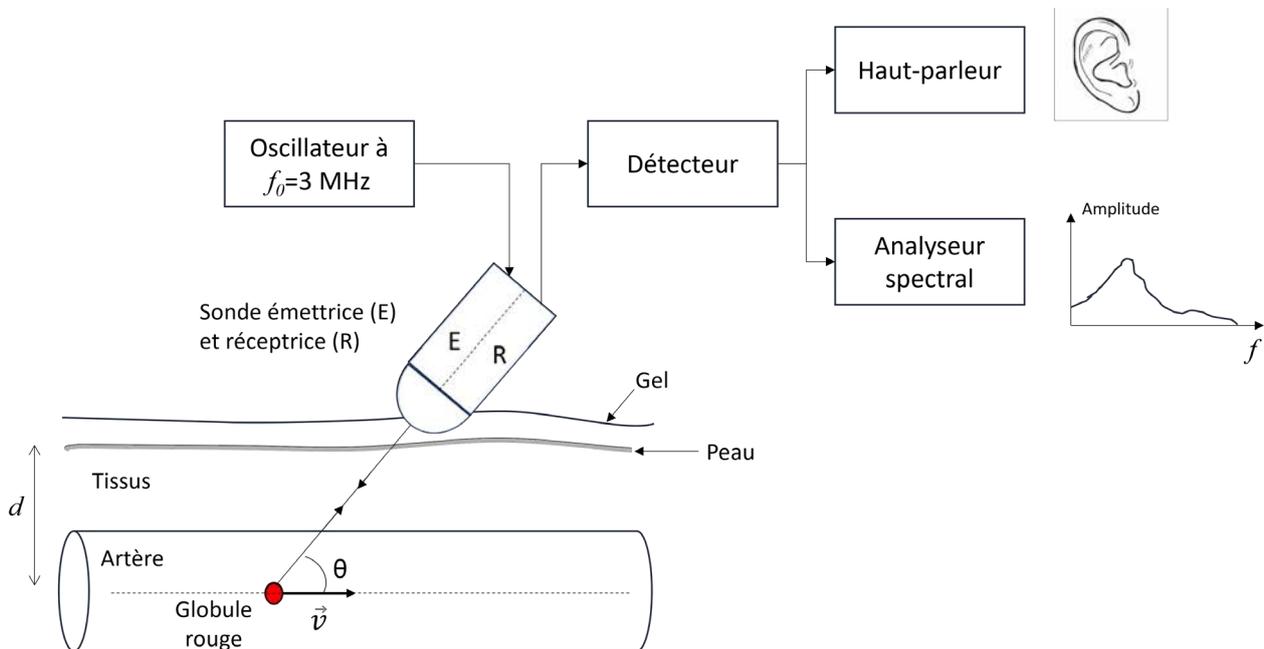


FIGURE 9 – Principe de l'échographie Doppler d'une artère (non à l'échelle)

Une sonde envoie un signal ultrasonore à une fréquence f_0 qui pénètre jusqu'à une profondeur d où se situe une artère ou un vaisseau sanguin. Les globules rouges diffusent cette onde dans toutes les directions. L'onde renvoyée en direction de la sonde est enregistrée puis analysée par un détecteur, ce qui permet d'obtenir le signal Doppler de fréquence f_D . Cette fréquence étant située dans le domaine audible, on peut directement guider l'exploration et analyser les perturbations du signal à l'oreille. On peut également choisir d'analyser le spectre du signal Doppler et obtenir ainsi directement la vitesse des globules rouges : on parle alors de vélocimétrie Doppler.

Q 29. On suppose qu'un globule rouge se mouvant à la vitesse v très inférieure à la vitesse des ultrasons c_s se déplace très peu pendant une période T_0 de l'onde ultrasonore par rapport à la distance d entre l'artère et la sonde. On appelle θ l'angle entre l'axe de l'artère et la direction de propagation de l'onde sonore (voir

figure 9). On appelle f_0 la fréquence émise par la sonde et f'_0 la fréquence reçue par la sonde. En schématisant simplement la situation montrer que la fréquence Doppler f_D définie par $f_D = f'_0 - f_0$ vérifie l'équation (8) :

$$f_D = \frac{2f_0 v \cos \theta}{c_s} \tag{8}$$

Dans quel cas obtient-on concrètement une fréquence Doppler négative ?

Vérifier que pour un globule rouge se déplaçant dans l'aorte à environ 30 cm/s la fréquence Doppler appartient bien au domaine audible avec $f_0 = 3$ MHz.

Q 30. Etablir la relation suivante liant l'incertitude relative sur la vitesse v à l'incertitude sur la mesure de l'angle :

$$\frac{u(v)}{v} = u(\theta) |\tan \theta|$$

On considère que la marge d'erreur acceptable pour le calcul des vitesses en vélocimétrie Doppler est de $\frac{u(v)}{v} \approx 15\%$. En supposant une incertitude sur la mesure de l'angle $u(\theta) = 10^\circ$, calculer l'angle maximal utilisable en échographie Doppler. Conclure sur la facilité ou non de respecter la marge d'erreur acceptable.

Dans le cas d'un Doppler sanguin pulsé la sonde émet un train d'impulsions ultrasonores de fréquence f_0 à une fréquence de répétition appelée PRF (Pulse Repetition Frequencies) (figure 10). Entre deux impulsions, le signal réfléchi est enregistré pendant une courte fenêtre d'écoute dont le choix détermine la profondeur d et le volume de l'écho analysé, et est envoyé vers le détecteur. Une moyenne sur une centaine d'impulsions est réalisée pour diminuer le bruit.

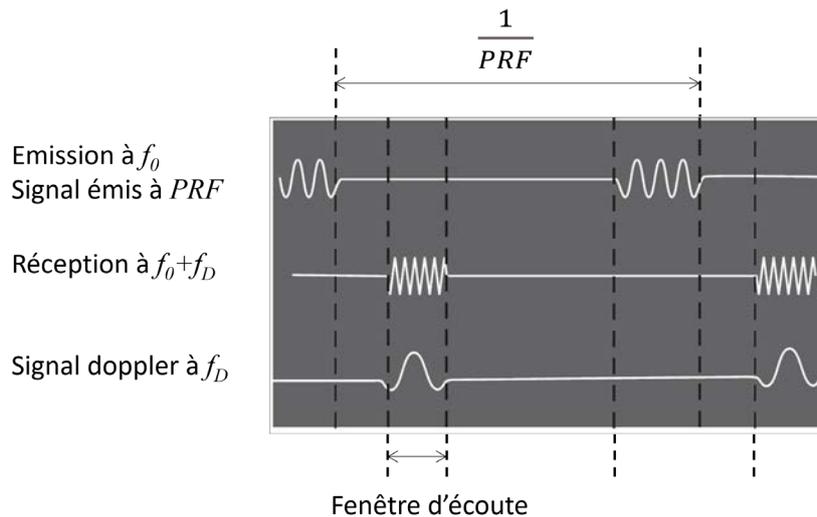


FIGURE 10 – Principe d'émission d'un Doppler pulsé

Par rapport à un Doppler continu où le repérage en profondeur n'est pas possible, l'utilisation d'un Doppler pulsé permet de bénéficier de la résolution spatiale et de focaliser l'examen sur le vaisseau à analyser situé à une profondeur $d < d_{\max}$, où d_{\max} vérifie :

$$PRF = \frac{c_s}{2d_{\max}} \tag{9}$$

Q 31. Justifier la relation (9).

Expliquer simplement comment le choix de la position de la fenêtre d'écoute par rapport à l'émission permet de choisir la profondeur de la zone analysée. Justifier la nécessité d'une "courte" fenêtre d'écoute.

Dans un Doppler pulsé il y a donc un délai $1/PRF$ entre deux émissions de faisceau ultrasonore. Par conséquent la PRF correspond à la fréquence d'échantillonnage (cadence de prise de vue) du signal reçu par

la sonde de la part d'un objet à la profondeur d . Le signal reçu comporte donc, la fréquence attendue $f_0 + f_D$, mais aussi d'autres fréquences comme $f_0 + PRF + f_D$ et $f_0 - PRF + f_D$, dues à cet échantillonnage.

Le détecteur utilisé pour analyser le signal reçu est schématisé sur la figure 11 : il comporte un amplificateur, un multiplieur et un filtre passe-bas.

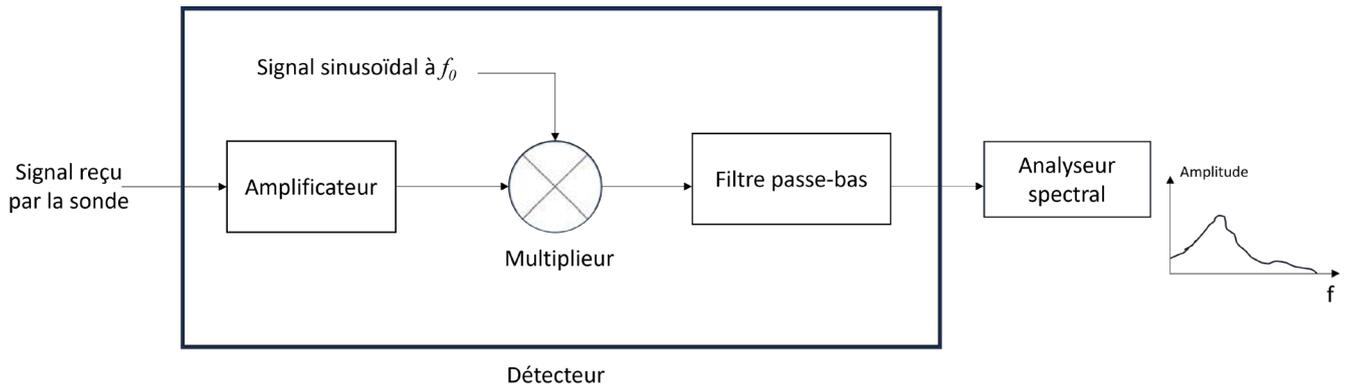


FIGURE 11 – Principe simplifié de l'analyse du signal Doppler

Q 32. En considérant que le signal reçu par la sonde comporte les fréquences $f_0 + f_D$, $f_0 + PRF + f_D$ et $f_0 - PRF + f_D$ et en faisant l'hypothèse $f_D < PRF$, quelles sont les fréquences contenues dans le signal en sortie du multiplieur ? Comment choisir la fréquence de coupure du filtre passe-bas afin de récupérer le signal Doppler utile ?

Q 33. Dans la mesure où les globules rouges n'ont pas tous la même vitesse, le signal Doppler a un spectre continu. Dessiner l'allure du spectre en sortie du multiplieur, en considérant f_D comme étant la fréquence Doppler maximale mesurée.

Expliquer en quoi le choix de la PRF est déterminant pour éviter le phénomène de repliement du spectre (aliasing). On donnera le critère retenu et on précisera son nom.

Dessiner l'allure du spectre du signal Doppler après le filtre.

2.3 Analyse d'un Doppler sanguin

Pour analyser l'ensemble des vitesses circulatoires dans un vaisseau sanguin, on utilise la transformation de Fourier rapide (FFT).

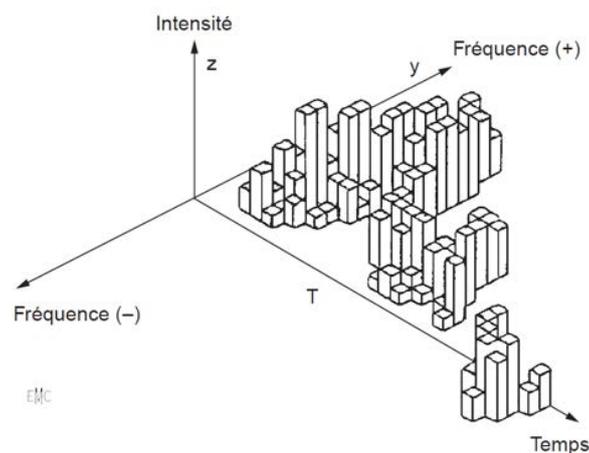


FIGURE 12 – Présentation en trois dimensions de l'analyse spectrale. Source : Grataloup-Oriez C et Charpentier A. Principes et techniques de l'échographie-Doppler. Encycl Méd Chir (Elsevier, Paris), Radiodiagnostic – Principes et techniques d'imagerie, 35-003-C- 10, 1999, 10 p

Les résultats obtenus sont présentés en 3 dimensions, voir figure 12 : en abscisse le temps, en ordonnée la fréquence (fréquence Doppler donc liée à la vitesse v du globule rouge), et pour chaque point, une brillance (c'est à dire une intensité) qui augmente avec la densité des globules rouges à l'origine de cette valeur de fréquence.

Durant l'échographie Doppler, l'appareil affiche directement la représentation $v(t)$ du signal Doppler (vitesse des globules rouges en fonction du temps); plus le nombre de globules rouges se déplaçant à la vitesse correspondante est élevé, plus le signal apparaît brillant (donc blanc).

La figure 13 présente une échographie classique d'un rein droit, couplée à un Doppler sanguin de l'artère rénale.

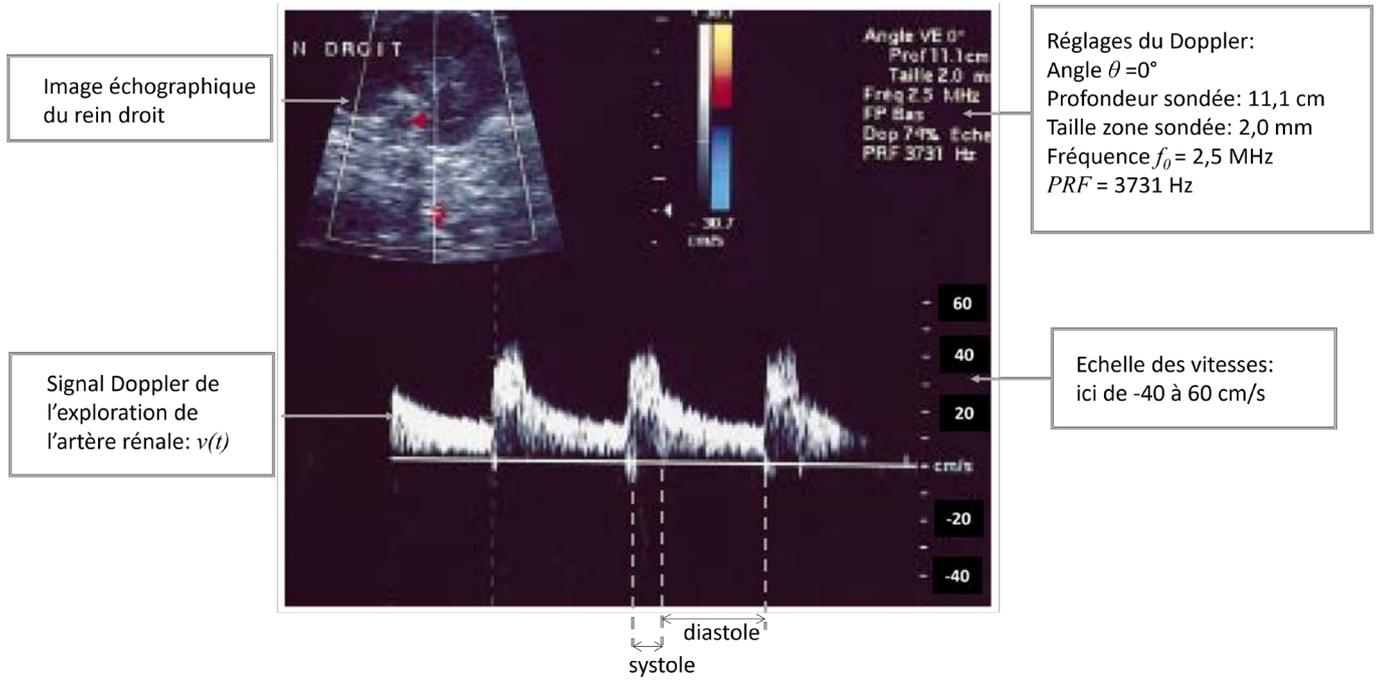


FIGURE 13 – Echographie du rein droit et Doppler de l'artère rénale, source : Grataloup-Oriez C et Charpentier A. Principes et techniques de l'échographie-Doppler. Encycl Méd Chir (Elsevier, Paris), Radiodiagnostic – Principes et techniques d'imagerie, 35-003-C- 10, 1999, 10 p

Q 34. Quelle est la profondeur maximale qu'il est possible de sonder avec la PRF précisée dans la figure 13? Est-ce cohérent avec la profondeur de l'artère étudiée?

La figure 14 présente les deux profils d'écoulements du sang rencontrés lors d'un battement cardiaque.

Sur la plupart des artères de large et moyen calibre, le débit volumique est très important au début de la systole. L'écoulement est turbulent et le profil d'écoulement est de type logarithmique donc quasi plat (la couche limite étant de très faible épaisseur) : tous les globules rouges se déplacent à la même vitesse. On observe donc sur le signal Doppler $v(t)$, pour un écoulement normal, une brillance regroupée sur l'enveloppe supérieure du pic systolique, et en dessous une zone sombre, voir figure 14.

Pendant la fin de la systole et l'ensemble de la diastole, l'écoulement est de type Poiseuille, le débit volumique étant alors plus faible. Les globules rouges étant uniformément répartis dans le vaisseau, on observe une répartition uniforme de la brillance sur toute la hauteur du signal Doppler $v(t)$, voir figure 14.

Q 35. Déterminer, à partir du signal Doppler $v(t)$ de la figure 13 et des données associées, la fréquence Doppler correspondant aux globules rouges les plus rapides pendant la systole et pendant la diastole.

Vérifier que la PRF choisie permet d'éviter le repliement du spectre.

Q 36. En vous aidant des explications de la figure 14 et en vous appuyant sur le signal Doppler $v(t)$ de la figure 13 proposer un spectre en fréquence du signal Doppler reçu pendant systole et diastole, avec une échelle en intensité arbitraire.

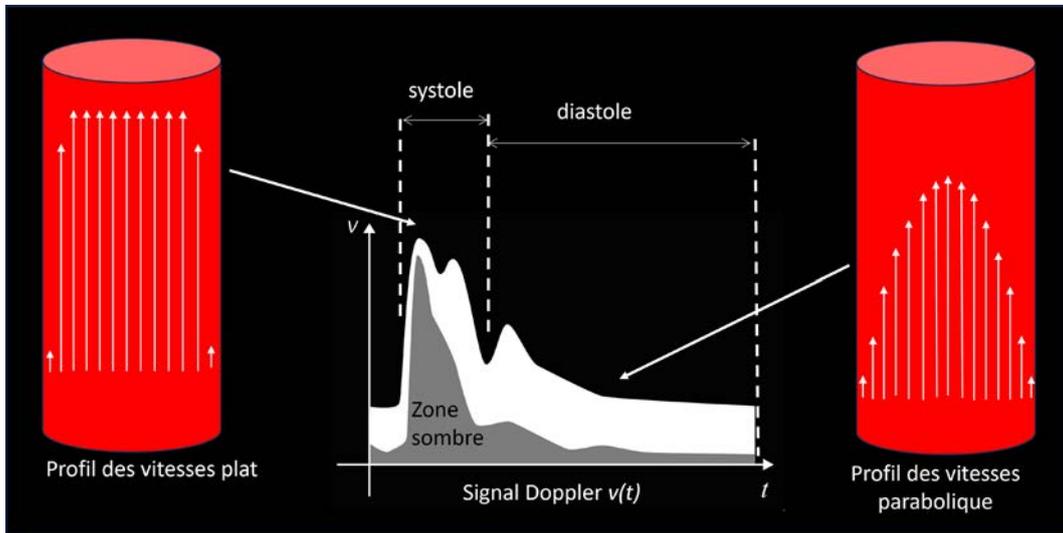


FIGURE 14 – Profil d'écoulement pendant la systole et la diastole et signal Doppler $v(t)$ associé. La zone sombre sous le pic de la systole (zone grise) montre que la quasi totalité des globules rouges ont une grande vitesse.

Une sténose est un rétrécissement de la section d'une artère du fait principalement de l'accumulation de graisse et calcium dans la paroi. Un Doppler sanguin permet de déterminer précisément le grade de la sténose (c'est à dire son degré d'avancement), de manière très rapide et non invasive.

On donne dans la figure 15 une représentation du signal Doppler classique $v(t)$ observé dans le cas d'un écoulement normal, et pour une sténose de grade I puis IV.

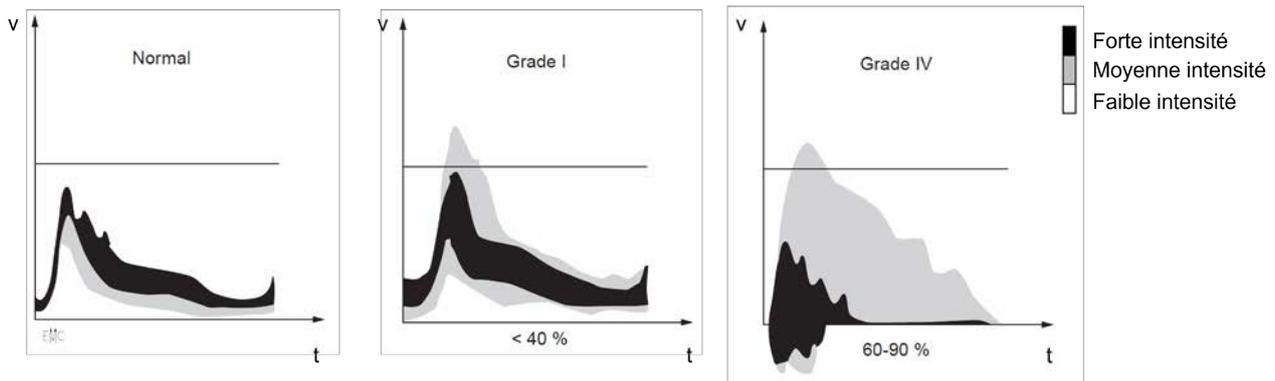


FIGURE 15 – Classification des spectres Doppler, selon le degré de sténose, exprimé en pourcentage de réduction de la surface de la lumière, d'après Dauszat M. Ultrasonographie vasculaire diagnostique. Théorie et pratique. Paris : Vigot, 1991.

Q 37. Quelles sont les principales modifications observées pour une sténose de grade I ?

Expliquer comment en analysant le signal Doppler un médecin peut déterminer rapidement la réduction en section du vaisseau. Comment pourrait-il repérer à l'oreille ce grade de sténose ?

Q 38. Quelles sont les principales modifications observées pour une sténose de grade IV ?

Donner une explication possible pour les fréquences négatives observées.

Comment un médecin repère-t'il à l'oreille ce grade de sténose ?

3 Etude de la mécanique des globules rouges

On s'intéresse dans cette partie à la déformation et à la mécanique d'un globule rouge unique. La déformabilité des globules rouges et leurs propriétés mécaniques sont très importantes pour la circulation sanguine. Plusieurs maladies ou infections sont connues pour affecter directement leur déformabilité ce qui peut engendrer des complications pour la circulation sanguine.

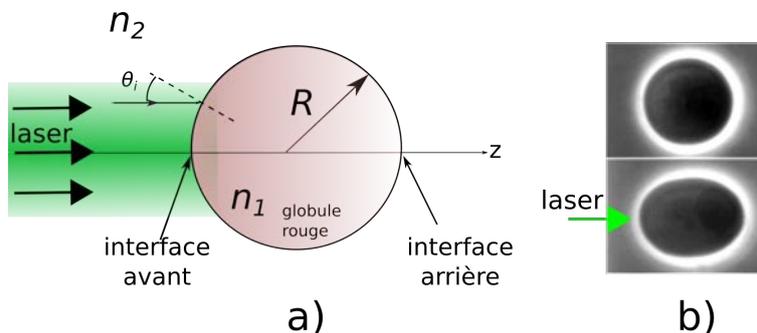


FIGURE 16 – a) Modélisation d'un globule rouge au repos par une sphère de tension superficielle γ_{GR} . b) Globule rouge déformé en ellipsoïde de révolution allongée avec les demi-axes M et $m < M$.

3.1 Modèle simplifié d'un globule rouge

Dans ce problème, on considère un globule rouge modélisé par une sphère déformable possédant une membrane constituée d'une bicouche de phospholipides. En première approximation, et par soucis de simplification, cette membrane peut être considérée comme une interface infiniment fine de coefficient de tension superficielle γ_{GR} (voir figure 16a). Le liquide contenu dans le globule rouge est considéré comme incompressible.

Q 39. Décrire une expérience mettant en jeu un phénomène associé à la tension superficielle. Proposer une définition du coefficient de tension superficielle et rappeler l'origine physique de ce coefficient.

On considère une goutte liquide sphérique de rayon R avec une interface dont le coefficient de tension superficielle est noté γ . La pression à l'intérieur de la sphère est notée P_1 et la pression à l'extérieur est notée P_2 . On note V le volume de la sphère.

Q 40. Préciser l'unité et la dimension du coefficient de tension superficielle. Rappeler l'expression de l'énergie associée au phénomène de tension superficielle pour ce système.

Q 41. A partir d'une transformation infinitésimale du rayon de la sphère, qui passe de R à $R + dR$, exprimer le travail des forces de pression et celui des forces de tension de surface. Montrer qu'il existe à l'équilibre une différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur. En déduire que pour un globule rouge modélisé par une sphère (figure 16a) de coefficient de tension superficielle γ_{GR} on a une différence de pression ΔP entre l'intérieur et l'extérieur : $\Delta P = \frac{2\gamma_{GR}}{R}$. Déterminer un ordre de grandeur de la différence de pression ΔP quand le globule rouge est sphérique au repos.

Q 42. On considère maintenant que le globule rouge se déforme légèrement (à cause d'un écoulement ou d'une force appliquée) et prend une forme d'ellipsoïde de révolution allongé avec les demi-axes majeur M et mineur m (figure 16b). Quelle est la relation entre les déformations élémentaires dm et dM ? On rappelle que le volume d'une ellipsoïde de révolution (appelée prolate) est donné par $V = \frac{4}{3}\pi m^2 M$.

Q 43. Pour de faibles déformations, on écrit $M = R(1 + \epsilon)$, et $m = R(1 - \epsilon')$ avec $\epsilon \ll 1$ et $\epsilon' \ll 1$. Quelle est la relation entre ϵ et ϵ' au premier ordre? En déduire l'expression de m en fonction de ϵ . On admet que la force que l'on doit appliquer axialement pour provoquer une déformation statique de M , vaut au premier ordre en ϵ : $\|\vec{F}_\gamma\| \approx 3\pi\gamma_{GR}.R.\epsilon$. Expliquer pourquoi on peut considérer qu'un globule rouge est élastique pour de petites déformations. Calculer l'ordre de grandeur de la force à appliquer pour déformer un globule rouge d'environ $\frac{M-R}{R} = 10\%$ selon l'axe majeur.

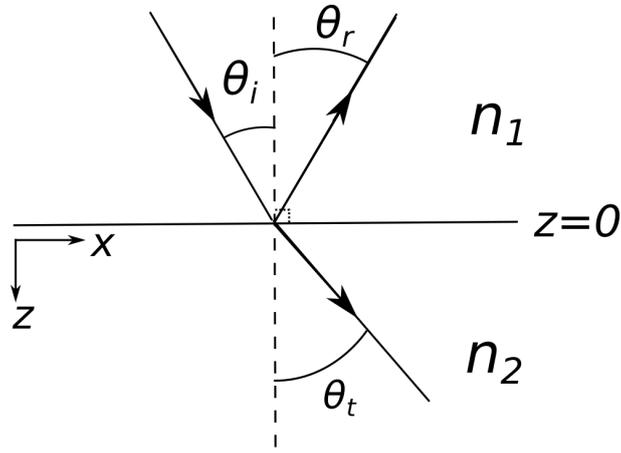


FIGURE 17 – Interface entre les milieux 1 et 2 (on suppose $n_1 > n_2$).

3.2 Pression de radiation : approche corpusculaire

Afin d'engendrer une déformation mécanique sur un globule rouge, on considère dans la suite des techniques optiques basées sur la pression de radiation optique engendrée par un laser continu. La membrane du globule rouge sépare l'intérieur du globule rouge (milieu 1) du milieu extérieur (milieu 2). Ces deux milieux peuvent être considérés comme diélectriques et transparents d'indices respectifs n_1 et n_2 tel que $n_1 > n_2$.

On souhaite déterminer l'expression de la pression de radiation s'exerçant sur l'interface par une approche corpusculaire traitant l'onde électromagnétique comme un ensemble de photons de même fréquence. On rappelle l'expression des coefficients (dits de Fresnel) de réflexion et de transmission en énergie (ou en intensité) (voir notations de la figure 17) dans le cadre d'une onde transverse électrique (TE) :

$$R(\theta_i, \theta_t) = \left(\frac{n_2 \cos \theta_t - n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_t + n_1 \cos \theta_i} \right)^2, \text{ et } T(\theta_i, \theta_t) = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta_i \cos \theta_t}{(n_2 \cos \theta_t + n_1 \cos \theta_i)^2}$$

avec θ_i l'angle du rayon incident, θ_r l'angle du rayon réfléchi et θ_t l'angle du rayon transmis.

Q 44. Rappeler l'expression de la quantité de mouvement d'un photon en fonction du vecteur d'onde k , puis en fonction de son énergie E , de l'indice du milieu n et de c la vitesse de propagation de la lumière dans le vide. L'énergie d'un photon dépend-elle du milieu dans lequel il se propage ?

Q 45. On considère un faisceau lumineux transportant N photons par unité de temps et de surface qui frappe l'interface **en incidence normale**. Déterminer la variation de quantité de mouvement par unité de temps, notée \vec{dp} due à la réflexion et la transmission des photons frappant une surface élémentaire dS d'interface. Exprimer ce résultat en fonction des coefficients de réflexion R et de transmission T et des indices de réfraction. En déduire l'expression de la force $d\vec{F}$ exercée sur l'élément de surface $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$ par le flux de photons sur l'interface dans le cas d'une incidence normale en fonction de N , E , c , des indices de réfraction et des coefficients R et T .

Q 46. Justifier qu'en incidence oblique θ_i (voir figure 17), la force totale de pression de radiation sur l'élément de surface dS est toujours selon la normale à l'interface.

On définit la pression de radiation P_{rad} comme étant la force par unité de surface exercée par le flux de photons sur l'interface selon $+\vec{u}_z$. On montre alors que la pression de radiation exercée sur l'interface par le laser se propageant d'un milieu 1 vers le milieu 2 dans le cas d'une incidence quelconque θ_i (voir figure 17), s'exprime par :

$$P_{\text{rad}}(\theta_i) = \frac{n_1 I}{c} \cos^2 \theta_i \left[1 + R(\theta_i, \theta_t) - \frac{n_2 \cdot \cos \theta_t}{n_1 \cdot \cos \theta_i} T(\theta_i, \theta_t) \right] \quad (10)$$

Q 47. Vérifier que cette expression est compatible avec les résultats de la question 45. Dans quel sens la force de pression de radiation est-elle orientée dans le cas considéré ($n_1 > n_2$) ? Indiquer sur un schéma dans quel sens se déformerait l'interface.

Q 48. Si les photons se propagent du milieu 2 vers le milieu 1, indiquer sur un schéma les différents rayons incident, réfléchi et transmis avec leurs angles respectifs. Quelle serait l'expression de la pression de radiation en incidence normale pour une propagation du milieu 2 vers le milieu 1 ? Indiquer sur un schéma dans quel sens est orientée la force de pression de radiation et dans quel sens se déformerait l'interface.

On considère un faisceau laser cylindrique d'intensité uniforme et se propageant du milieu d'indice n_1 vers le milieu d'indice n_2 , de puissance \mathcal{P} et de demi-largeur de faisceau w_0 . On considère le cas où le laser est focalisé sur l'interface plane en $z = 0$ avec un angle d'incidence θ_i .

Q 49. Déterminer l'expression de la pression de radiation $P_{rad}(\theta_i)$ en fonction de la puissance \mathcal{P} , de la demi-largeur du faisceau laser w_0 et des indices (n_1 et n_2), de c et de θ_i uniquement.

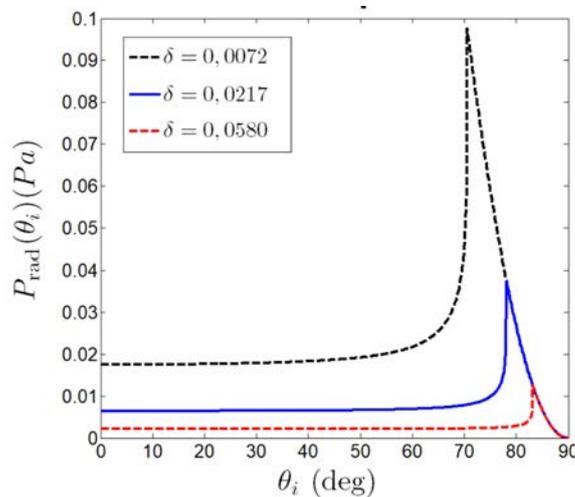


FIGURE 18 – Evolution de la pression radiation en fonction de l'angle d'incidence θ_i et du contraste d'indice $\delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$ en considérant n_1 fixé.

Q 50. Sur la figure 18, on a tracé la pression de radiation P_{rad} en $z = 0$ en fonction de l'angle d'incidence pour différents contrastes d'indice $\delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$ à n_1 fixé. Interpréter l'apparition d'un maximum dans les courbes de la figure 18. A quoi correspond l'angle noté θ^* pour lequel ce maximum est obtenu ? Comment varie la pression de radiation en fonction de θ_i pour $\theta_i > \theta^*$.

Q 51. Pour $\theta_i \rightarrow 0$, on montre que la pression de radiation pour un faisceau laser se propageant du milieu 1 vers le milieu 2 tend vers une valeur asymptotique à calculer en fonction de \mathcal{P} , w_0 , c , n_1 et n_2 . Faire une application numérique avec $\mathcal{P} = 500 \text{ mW}$, $w_0 = 10 \text{ }\mu\text{m}$, $n_1 = 1,38$ et $n_2 = 1,35$.

3.3 Déformation et rhéologie d'un globule rouge

On illumine un globule rouge de rayon R avec un laser cylindrique se propageant selon l'axe z , d'intensité uniforme I et de demi-largeur w_0 (figure 19a). On considère le cas où $w_0 \leq R$. Le globule rouge d'indice n_{GR} ($n_{GR} = n_1 = 1,38$) est entouré d'un milieu extérieur d'indice n_{ext} ($n_{ext} = n_2 = 1,35$).

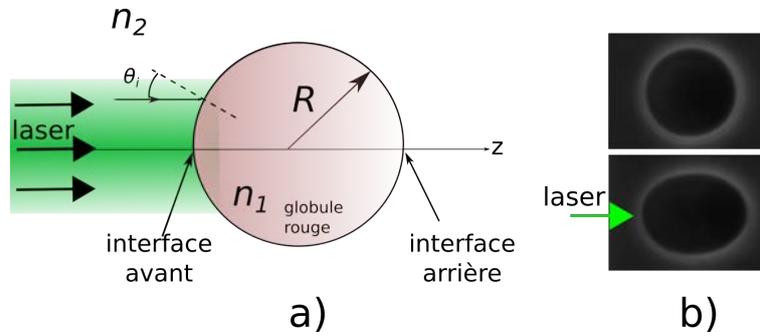


FIGURE 19 – a) Schéma du faisceau laser focalisé sur un globule rouge. b) Illustration d’une déformation par laser d’une membrane sphérique assimilable à un globule rouge (en haut : au repos ; en bas : sous irradiation laser).

On utilise un modèle optique de rayon lumineux. On repère l’angle d’incidence d’un rayon sur la sphère par l’angle θ_i (voir figure 19a).

Q 52. Représenter qualitativement la pression de radiation s’exerçant en chaque point de la surface sur l’interface avant et arrière. On pourra considérer différents cas. Représenter alors qualitativement la force totale due à la pression de radiation s’exerçant sur la face avant et sur la face arrière d’un globule rouge. Justifier à l’aide d’un schéma la forme prise par le globule rouge sur la figure 19b) lorsque celui-ci est éclairé par le laser.

Q 53. En considérant, en première approximation, que le faisceau laser est suffisamment mince pour avoir $\theta_i \ll 1$ pour tout le faisceau laser, calculer la force totale sur l’interface avant du globule rouge (figure 19a). En déduire, de même une expression de la force sur l’interface arrière.

Q 54. En utilisant les résultats de la partie 3.1, donner la relation qui relie notamment la tension superficielle du globule rouge γ_{GR} , la déformation $\epsilon = \frac{M-R}{R}$ et l’intensité du faisceau laser I , permettant ainsi de déterminer des propriétés mécaniques du globule rouge par laser.

Q 55. A partir des questions 53 et 54, calculer la force totale qui s’exerce sur le globule rouge. Expliquer alors pourquoi il est préférable d’utiliser deux faisceaux lasers afin d’avoir une position fixe pour le globule rouge. Proposer à l’aide d’un schéma une configuration utilisant deux faisceaux lasers.

Annexe 1 : Programme Python sur l'expérience de Poiseuille :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import random
4 import statistics
5
6
7 ## Données :
8
9 rho_eau= 997.13 # Masse volumique de l'eau à 25 degrés Celsius en kg.m(-3)
10 g=9.81 # Accélération de la pesanteur en m.s(-2)
11 L=1.80 # Longueur du tube en m
12 R=0.50*10(-3) # Rayon du tube en m
13 t0=270 # durée de l'expérience en s
14 H=np.array([30*10(-2),40*10(-2), 50*10(-2), 60*10(-2), 70*10(-2)]) # Valeurs de H en m
15 V0=np.array([12.5*10(-6),17*10(-6), 21*10(-6), 25*10(-6), 29.5*10(-6)]) # Valeurs de V0 en m3
16 Qv=V0/t0 # Calcul de Qv en m3/s
17
18 ## Evaluation d'incertitudes :
19
20 u_L=10(-2)/(12)(1/2) # Incertitude sur la longueur du tube en m
21 u_R=(0.505*10(-3)-0.495*10(-3))/(2*(3)(1/2)) # Incertitude sur le rayon du tube en m
22 u_t0= 1 # incertitude sur la durée de l'expérience en s
23 u_H=1*10(-2)/12(1/2) # incertitude sur la mesure de H en m
24 u_V0=((10(-6)/12(1/2))(2)+ (10(-6)/3(1/2))(2))(1/2) # incertitude sur la mesure de V0 en m3
25 u_Qv= Qv*((u_V0/V0)(2)+(u_t0/t0)(2))(1/2) # incertitude sur le calcul de Qv en m3/s
26
27 ## Simulation Monte Carlo pour la détermination de Qv=A*H:
28
29 n_simulation=10000
30
31 pente, ordonnee=np.zeros(n_simulation), np.zeros(n_simulation) # crée deux tableaux remplis de 0
32 for i in range(n_simulation):
33     Qv_simule=np.random.normal(Qv,u_Qv)
34     H_simule=np.random.normal(H,u_H)
35     modelisation=np.polyfit(H_simule, Qv_simule,1)
36     pente[i], ordonnee[i]=modelisation #remplit la case i du tableau avec les résultats de la simulation
37
38 A=np.mean(pente)
39 u_A=np.std(pente)
40 O=np.mean(ordonnee)
41 u_O=np.std(ordonnee)
42
43 regression=H*A+O
44
45 ## Simulation de Monte Carlo pour évaluer la viscosité dynamique eta et son incertitude type:
46
47 n_simulation=10000
48
49 Lt=np.random.normal(L,u_L,n_simulation) #crée un tableau de valeur random de L1
50 Rt=np.random.normal(R,u_R,n_simulation) #crée un tableau de valeur random de R1
51 A1=
52
53 eta_eau= 3.14*R1**4*rho_eau*g/(8*L1*A1) #calcul de la viscosité dynamique de l'eau
54
55 ## Affichage des résultats de la manipulation et de la régression linéaire
56
57 plt.subplot(2,1,1)
58 plt.errorbar(H,Qv,xerr=u_H,yerr=u_Qv,fmt='b+', label='Mesures de Qv')
59 plt.plot(H, regression, 'r', label='régression linéaire')
60 plt.xlabel("Hauteur d'eau H (m)")
61 plt.ylabel("Débit volumique Qv (m3.s(-1)) ")
62 plt.legend()
63
64 print(" coefficient directeur A = ", A,"m2.s(-1) et u(A)=", u_A,"m2.s(-1)" )
65 print(" ordonnée à l'origine O=", O,"m3/s et u(O)=", u_O,"m3/s")
66
67 ## Tracé de l'histogramme de la viscosité dynamique:
68
```

```

69 | nb_classes=100 #la hauteur de chaque classe est égale à l'effectif dans la classe
70 |
71 | plt.subplot(2,1,2)
72 | plt.hist(eta_eau, bins=nb_classes, range=(7*10**(-4),10*10**(-4)), color='red')
73 |
74 | plt.axis([7*10**(-4),10*10**(-4), 0,400])
75 | plt.xlabel("valeurs de eta_eau potentielle en Pa.s ")
76 | plt.ylabel("effectif de eta_eau potentielle ")
77 |
78 | ## Obtention de la viscosité dynamique et de son incertitude type:
79 |
80 | eta_eauexp=np.mean(eta_eau)
81 | u_etaeauexp=np.std(eta_eau)
82 | print("eta_eau, experimentale= ", eta_eauexp, "Pa.s et u(eta_eau experimentale)=", u_etaeauexp,"Pa.s")
83 |
84 |
85 | plt.show()

```