

**SESSION 2025**

---

**AGREGATION  
CONCOURS EXTERNE**

**Section : PHYSIQUE-CHIMIE  
Option : PHYSIQUE**

**PROBLÈME DE PHYSIQUE**

Durée : 6 heures

---

*Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.*

*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier. Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire**

**Tournez la page S.V.P.**

**A**

## INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1500A	103	0889





## Problème de physique

## Manipulation de macromolécules uniques

Dans les cellules vivantes, l'application de forces et couples mécaniques sur l'ADN, la longue molécule en double hélice, joue un rôle crucial dans divers processus biologiques. Par exemple, pendant la *transcription*, l'enzyme appelée *ARN-polymérase* doit accéder à l'information génétique codée dans la séquence d'ADN. Pour ce faire, l'enzyme doit séparer les deux brins de la double hélice, puis l'ADN doit glisser à travers l'ARN-polymérase lors de la transcription, ce qui nécessite une force de traction sur l'ADN. Il est donc important de comprendre comment des forces mécaniques agissent sur l'ADN pour décrire les mécanismes moléculaires qui régissent ces fonctions cellulaires vitales.

Les pinces magnétiques (*magnetic tweezers* en anglais) sont des instruments scientifiques permettant de manipuler des (longues) molécules individuelles, maintenues par leurs extrémités. Cette technique de pointe permet d'étudier l'élasticité et la flexibilité de l'ADN, en mettant en lumière sa réponse aux forces mécaniques rencontrées dans l'environnement cellulaire. Elle permet également d'étudier le repliement de l'ADN dans l'espace et ses changements de conformation. En appliquant des forces mécaniques contrôlées à la molécule d'ADN pendant qu'elle interagit avec des protéines spécifiques, les chercheurs peuvent aussi sonder la force et la stabilité de ces interactions.

Le plus souvent, une molécule d'ADN est attachée entre une surface en verre et une microbille magnétique (Figure 2). Cette dernière est manipulée grâce à un champ magnétique et observée par microscopie. Malgré la relative simplicité du dispositif, plusieurs astuces sont nécessaires afin de pouvoir obtenir des informations sur la macromolécule étudiée : en effet, celle-ci n'est pas visible au cours de l'expérience et son comportement doit être déduit de celui de la bille magnétique à laquelle elle est ancrée. Le positionnement de la microbille en 3D est réalisé avec une précision de quelques nanomètres. Des forces de quelques dixièmes à des dizaines de piconewtons sont mesurées simultanément.

Dans ce problème, nous étudierons en détail les différents aspects de cette technique expérimentale, ainsi que certains des résultats qu'elle a permis d'obtenir.

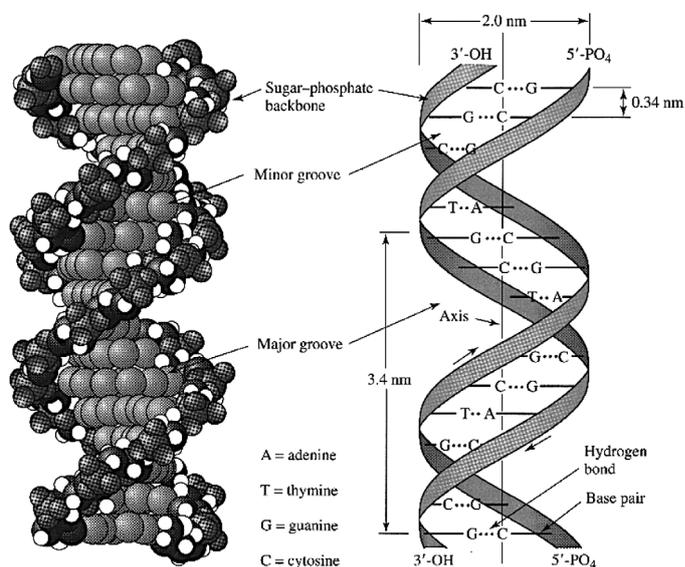


FIGURE 1 – Représentations atomistique et simplifiée de la double hélice d'ADN avec les dimensions principales. Adapté de "Biology" (Solomon/Martin/Berg/Villee, 1993).

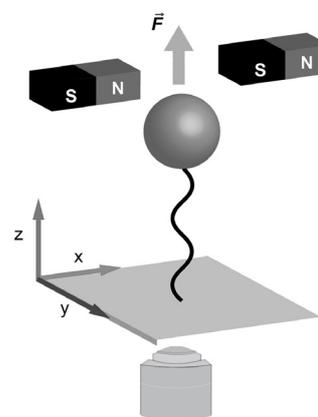


FIGURE 2 – Pinces magnétiques

## Constantes fondamentales

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

## Fonctions hyperboliques

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

## Transformée de Fourier

Définition de la transformée de Fourier  $X(\omega)$  de la fonction  $f(t)$  :

$$X(\omega) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Définition de la transformée de Fourier inverse de  $X(\omega)$  :

$$x(t) = TF^{-1}[X(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Transformée de Fourier et dérivation :

$$TF\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = i\omega TF[x(t)]$$

## Intégrales utiles

$$\int_{-1}^{+1} dx x^2 (1-x^2)^{1/2} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^A dx \int_0^A dx' e^{-|x-x'|} = 2 \int_0^A dx'' \int_{x''}^A dx e^{-x''}$$

## Formules physiques

### *Champ magnétique créé par un dipôle*

Champ magnétique créé en  $\vec{r}$  par un dipôle magnétique  $\vec{M}$  positionné à l'origine et indépendant du temps :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{M}}{r^5}$$

### *Définition du module de Young*

Le module de Young, aussi appelé module d'élasticité (longitudinale) ou module de traction est la constante qui relie la contrainte de traction (ou de compression) et la déformation de faible amplitude d'un matériau élastique isotrope. Il intervient dans la loi d'élasticité qu'on appelle loi de Hooke. Dans le cas d'une tige de longueur au repos  $L_0$  et de section  $A$  soumise à une force de traction  $f$ , on a :

$$\sigma = Y\varepsilon$$

où :

- $\sigma = f/A$  est la contrainte,
- $\varepsilon = (L - L_0)/L_0$  où  $L$  est la longueur sous contrainte  $\sigma$ ,
- $Y$  est le module de Young.

# A. Fonctionnement du dispositif

## A.1. Piégeage de la bille magnétique

Un dispositif de pinces magnétiques utilise des billes magnétiques de taille micrométrique qui peuvent être manipulées à l'aide d'un champ magnétique externe. La position des billes magnétiques est ensuite déterminée par un objectif microscopique équipé d'une caméra.

### A.1.1. Création du champ magnétique

Pour pouvoir agir mécaniquement sur les billes, on utilise deux aimants, qu'on assimile à deux dipôles magnétiques  $\vec{M}_1$  et  $\vec{M}_2$  colinéaires et de même sens.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle  $E_p$  d'un dipôle magnétique  $\vec{M}$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . Donner les expressions du moment  $\vec{\Gamma}$  et de la force  $\vec{F}$  subis par le dipôle magnétique  $\vec{M}$ , préciser dans quelles conditions la force est non nulle.

On considère la configuration de la Figure 2 et on définit un axe horizontal (vecteur unitaire  $\vec{e}_x$ ), colinéaire aux moments magnétiques des deux aimants, et un axe vertical, orienté vers le haut et identifié par le vecteur unitaire  $\vec{e}_z$ . L'origine de ce repère est le point  $O$  situé exactement à même distance des deux aimants et à hauteur de leur axe commun.

2. Réaliser un schéma de la géométrie du problème, incluant les dipôles  $\vec{M}_1$  et  $\vec{M}_2$ . Exprimer le champ magnétique  $\vec{B}$  au point  $O$  en fonction de la distance  $d$  entre les aimants.
3. On considère maintenant un point  $P$ , toujours à égale distance des aimants, mais situé à un niveau vertical différent, en position  $(0, z)$  par rapport au repère choisi. Déterminer l'expression du champ magnétique en  $P$  en fonction de  $d$  et  $z$ . Déterminer à quelle(s) distance(s)  $z$  de l'origine  $O$  le champ magnétique s'annule.

### A.1.2. Bille superparamagnétique

Qualitativement, les matériaux peuvent être décrits par leur réponse à un champ magnétique appliqué. Si un matériau est placé dans un champ magnétique, les moments magnétiques atomiques individuels du matériau contribuent à sa réponse globale au champ magnétique.

Dans la suite, on considèrera toujours un matériau magnétique linéaire, homogène et isotrope (LHI) vis-à-vis de ses propriétés magnétiques.

4. — Donner les définitions d'un matériau magnétique (i) linéaire, (ii) homogène, (iii) isotrope.  
— Écrire, dans un tel milieu, la relation entre le champ magnétique  $\vec{B}$  qui règne dans le matériau, l'excitation magnétique  $\vec{H}$  et l'aimantation  $\vec{M}$  du matériau. Préciser la définition de ces grandeurs et leurs unités usuelles.
5. — Définir la susceptibilité magnétique  $\chi_m$  et donner son expression approchée lorsque l'aimantation permanente du matériau est nulle et que les valeurs de  $M$  et  $H$  sont suffisamment faibles pour que l'on puisse se limiter au terme d'ordre 1 dans le développement limité de  $M$  en fonction de  $H$ .

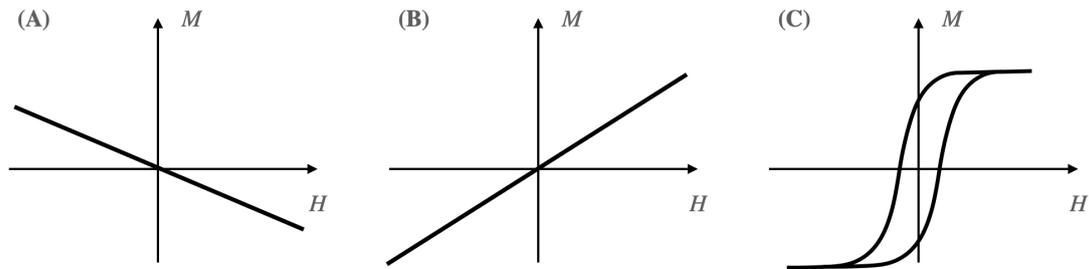


FIGURE 3 – Réponses magnétiques de différents matériaux.

— Montrer que, dans ces hypothèses, on peut écrire

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

et exprimer  $\mu$ , la perméabilité magnétique du matériau, en fonction de  $\chi_m$ , sa susceptibilité magnétique et de  $\mu_0$ .

On s'intéresse maintenant à la relation entre l'aimantation  $\vec{M}$  et le champ  $\vec{H}$ . Nous admettrons que  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ .

6. La Figure 3 montre les réponses magnétiques  $M(H)$  associées à différentes classes de matériaux magnétiques. Associer chacune des courbes (A), (B) et (C) avec une des classes de matériaux suivants en justifiant votre réponse par une description du comportement associé :
- matériaux ferromagnétiques (FM),
  - matériaux diamagnétiques (DM),
  - matériaux paramagnétiques (PM).

Les billes utilisées communément dans les pinces magnétiques, d'un diamètre de l'ordre du micromètre, ont la propriété d'être *superparamagnétiques*. Elles sont constituées d'une matrice poreuse en latex dans laquelle des nanoparticules ferromagnétiques ont été incorporées. Les nanoparticules sont si petites qu'elles constituent des domaines ferromagnétiques uniques.

Dans ce cas, et en l'absence d'un champ magnétique extérieur, la barrière d'énergie  $\Delta E$  nécessaire au retournement de l'aimantation peut être franchie grâce à l'agitation thermique. La barrière d'énergie  $\Delta E$  est proportionnelle au volume  $v$  des nanoparticules :

$$\Delta E = K v.$$

Le retournement étant activé thermiquement, on peut le décrire par une loi d'Arrhenius pour le temps caractéristique  $\tau$  de retournement entre les deux directions d'aimantation :

$$\tau = \tau_0 \exp(\Delta E/k_B T).$$

7. Expliquer pourquoi, si l'on observe, en champ extérieur magnétique nul, le comportement magnétique de la nanoparticule sur des temps de mesure  $\tau_{\text{mes}} \gg \tau$ , l'aimantation moyenne de la particule mesurée sera nulle, en champ extérieur nul : on est alors dans le régime *superparamagnétique*. Justifier la référence au paramagnétisme dans le nom de ce régime.
8. Dans le cas contraire,  $\tau_{\text{mes}} \ll \tau$ , l'aimantation mesurée a une valeur non nulle : la particule peut être assimilée à un moment magnétique fixe et elle est alors dite « *bloquée* ».
- Pour un  $\tau_{\text{mes}}$  donné, déterminer la température de blocage  $T_B$  correspondante et préciser dans quelles conditions la particule est bloquée.
9. On mesure par d'autres moyens  $K \simeq 350 \text{ kJ/m}^3$  et la valeur de  $\ln(\tau_{\text{mes}}/\tau_0) \simeq 20$ . On veut disposer de billes ayant un moment magnétique bloqué à température ambiante. Quelle doit être la taille des nanoparticules ?

### A.1.3. Force magnétique sur la bille

Lorsqu'un champ magnétique externe  $\vec{B}$  est appliqué à l'assemblage de nanoparticules superparamagnétiques réunies dans la bille micrométrique, leurs moments magnétiques ont tendance à s'aligner le long du champ appliqué, ce qui entraîne une aimantation résultante non nulle.

Pour une excitation pas trop intense, le moment magnétique induit  $\vec{m}(\vec{B})$  est proportionnel au champ magnétique :

$$\vec{m}(\vec{B}) = \alpha \vec{B} \quad (\vec{B} \text{ faible}) \quad (1)$$

où la constante  $\alpha$  est indépendante de  $\vec{B}$ , mais dépend du volume de la microbille et de sa perméabilité magnétique relative. Pour une excitation intense, le moment magnétique induit sature à une valeur dépendant du matériau,  $\vec{m}_{\text{sat}}$ .

10. En tenant compte des éléments discutés ci-dessus, tracer schématiquement la réponse magnétique d'une bille superparamagnétique et comparer avec les réponses décrites en Figure 3.
11. On considère une bille micrométrique superparamagnétique soumise à un champ magnétique  $\vec{B}$ . Si la valeur de  $\vec{B}$  est suffisamment élevée pour que l'aimantation de la bille arrive à sa valeur de saturation, on peut montrer que l'énergie potentielle de la bille s'écrit

$$E_p(B) = -\frac{1}{2} \vec{m}_{\text{sat}} \cdot \vec{B}.$$

- En déduire la force  $\vec{F}$  subie par la bille dans ces conditions.
- Dans une expérience typique, l'intensité du champ magnétique  $\vec{B}$  vaut environ 0,5 T au milieu des aimants et décroît jusqu'à zéro sur une distance d'environ 5 mm. Le moment magnétique  $\vec{m}_{\text{sat}}$  de la bille à saturation est de l'ordre de  $10^{-12}$  A · m<sup>2</sup>. Déterminer l'ordre de grandeur de la force agissant sur la bille.

*Remarque* : dans toute la suite du problème, on néglige le poids de la bille.

## A.2. Mesures de force

La détermination précédente de la force exercée par le champ magnétique sur les billes magnétiques n'est pas précise. Cependant, lorsque une molécule d'ADN est attachée entre la surface en verre mentionnée dans le préambule (Figure 2) et la bille, la force peut être calculée bien plus précisément à partir des fluctuations thermiques de la position de la bille dans le plan horizontal.

La Figure 4 illustre le système : la bille micrométrique est accrochée à une extrémité de la molécule d'ADN, dont l'autre extrémité est attachée, en bas, à la surface en verre. L'ADN fait avec la verticale un angle  $\beta$ . On choisit maintenant un repère cartésien dont l'origine  $O = (0, 0)$  coïncide avec le point d'ancrage de l'ADN sur la surface. L'axe vertical, aligné avec la force magnétique  $\vec{F}$  supposée uniforme, définit la direction  $\vec{e}_z$ . Un vecteur  $\vec{e}_x$  indiquera la direction horizontale.

### A.2.1. Modèle de pendule inversé

Dans toute la partie A, on considère l'ADN comme un fil sans masse, tendu et inextensible, de longueur  $L$ . Aussi, nous négligeons, pour le moment, les fluctuations thermiques.

On peut alors faire l'analogie avec un pendule inversé, car la force magnétique  $\vec{F}$  est verticale, uniforme et constante. Nous allons ici étudier la dynamique de ce pendule. La tension du « fil » modélisant l'ADN est notée  $\vec{F}_t$ .

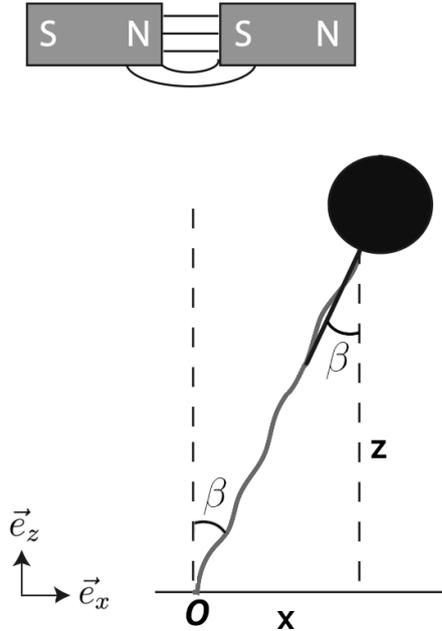


FIGURE 4 – Configuration typique en « pendule inversé », telle qu’observée à un instant donné au cours de l’expérience.

12. — Identifier et exprimer l’ensemble des forces agissant sur la bille, puis écrire les conditions d’équilibre mécanique du système en faisant référence à la configuration de la Figure 4.
  - Trouver la position d’équilibre de la bille (l’exprimer en fonction de l’angle  $\beta$ ) et la justifier par une démonstration.
13. Le vecteur unitaire normal à la trajectoire et dirigé du point de suspension du pendule vers la bille, sera noté  $\vec{e}_r$ . Le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté dans le sens trigonométrique, sera noté  $\vec{e}_\theta$ .
  - Écrire le principe fondamental de la dynamique pour la bille dans le repère identifié par ces vecteurs.
  - En déduire une équation différentielle pour l’angle  $\beta(t)$ , puis une expression pour la tension du fil  $\vec{F}_t$  en fonction de  $\beta$ ,  $\dot{\beta}$  et des paramètres du problème.
14. Toujours dans la configuration de la Figure 4 écrire l’énergie potentielle  $E_p$  du pendule inversé, son énergie cinétique  $E_c$  et son énergie mécanique  $E_m(\beta, \dot{\beta})$ . Expliquer pourquoi la tension de l’ADN  $\vec{F}_t$  ne travaille pas. En déduire une équation différentielle pour  $\beta$ . Comparer au résultat de la question 13.
15. Par un développement limité (dont on explicitera l’expression), simplifier l’équation obtenue dans le cadre de petits angles. Nommer l’équation obtenue.
16. Dans l’expérience réelle avec la molécule d’ADN, en présence de solvant et à température donnée, on peut observer l’angle  $\beta$  osciller autour de sa valeur d’équilibre. Énoncer et décrire le(s) phénomène(s) physique(s) qui permet(tent) d’expliquer cet effet.

### A.2.2. Fluctuations thermiques

On considère maintenant le système réel microscopique immergé dans un solvant, à la température  $T$ . L’ADN est toujours considéré comme un fil inextensible, sans masse, et tendu par l’action de la force magnétique. On supposera que le mouvement de la bille est situé dans le plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$  (voir Figure 4).

17. Effectuer un développement limité pour exprimer l'énergie potentielle  $E_p(\beta)$  du pendule inversé dans le cas de petites fluctuations,  $\beta \ll 1$ . En déduire une expression de cette énergie potentielle en fonction de la coordonnée  $x$  de la bille,  $E_p(x)$ , toujours dans le cas de petites fluctuations. Quelle est la nature de la force qui détermine le mouvement *horizontal* de la bille ?

La Figure 5 montre l'enregistrement expérimental de la position  $x$  de la bille au cours du temps, ainsi que l'histogramme correspondant  $\mathcal{P}(x)$ . C'est à partir de cette mesure qu'il est possible d'avoir une détermination précise de la force magnétique  $\vec{F}$  qui s'exerce sur la bille.

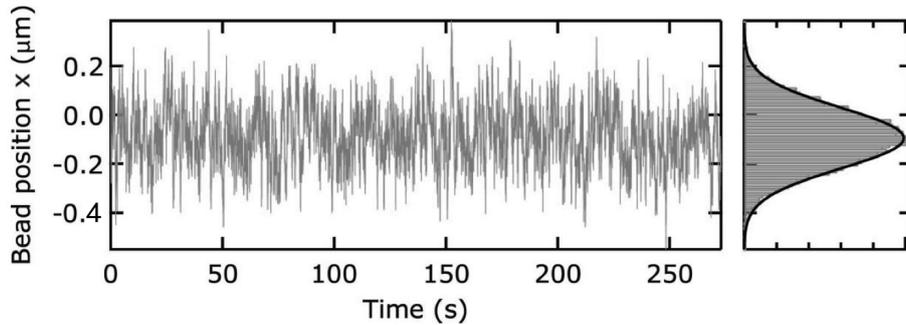


FIGURE 5 – Enregistrement expérimental de la position  $x$  de la bille au cours du temps. Le graphe de droite correspond à l'histogramme  $\mathcal{P}(x)$  des positions enregistrées dans cet intervalle de temps et ajusté par une fonction gaussienne (ligne noire).

18. On réalise une expérience de pinces magnétique sur une molécule d'ADN et on enregistre les données de la Figure 5. Expliquer comment il est possible, à partir des données de la figure, de déterminer l'intensité de la force magnétique  $\vec{F}$  qui s'exerce sur la bille. Montrer que l'intensité recherchée est donnée par

$$F = \frac{L k_B T}{\langle x^2 \rangle}$$

où  $\langle x^2 \rangle$  est la valeur quadratique moyenne de la position  $x$  (et, on le rappelle,  $T$  est la température et  $L$  la longueur de la molécule d'ADN).

19. En se basant sur les données de la Figure 5, donner un ordre de grandeur de la force magnétique  $F$  sur la bille lors de l'enregistrement. L'expérience est réalisée avec une molécule d'ADN de longueur  $L \simeq 16,5 \mu\text{m}$ .
20. Justifier le fait que l'histogramme des position  $\mathcal{P}(x)$  puisse être ajusté par une fonction gaussienne.

### A.2.3. Analyse de Fourier

Dans la pratique, la méthode d'estimation de la force à partir des fluctuations de la position  $x$  est limitée par les vibrations externes de l'instrument, qui doivent être éliminées. Pour un étalonnage plus précis, une analyse dans l'espace de Fourier est utilisée.

Une expression théorique de la transformée de Fourier  $X(\omega)$  de la position  $x(t)$  peut être obtenue en écrivant l'équation suivante pour le mouvement de la bille :

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\gamma \frac{dx(t)}{dt} - \frac{F}{L} x(t) + \xi(t), \quad (2)$$

où  $m$  est la masse de la bille,  $\gamma$  le coefficient de frottement visqueux du solvant et  $\xi(t)$  une force aléatoire qui représente l'effet du bruit thermique.

21. Décrire la signification de chaque terme de l'Équation 2.

Dans ce contexte, on peut négliger le terme  $m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ , car il est toujours très inférieur aux autres termes. L'équation du mouvement ainsi simplifiée peut être traitée grâce à une transformée de Fourier. On note  $X(\omega) = TF[x(t)]$  la transformée de Fourier de  $x(t)$  et  $\Xi(\omega) = TF[\xi(t)]$  celle de  $\xi(t)$ .

22. Écrire la transformée de Fourier de l'Équation 2, après l'avoir simplifiée. En déduire une expression pour  $X(\omega)$ .

23. On note  $\bar{X}(\omega)$  le complexe conjugué de  $X(\omega)$ . Exprimer  $S_{xx}(\omega) = \bar{X}(\omega)X(\omega) = |X(\omega)|^2$ , la densité spectrale de puissance associée aux fluctuations  $x(t)$ , en fonction de celle de la force stochastique,  $S_{\xi\xi}(\omega)$ .

Montrer que l'on peut écrire

$$S_{xx}(\omega) = \frac{A}{1 + (\omega/\omega_c)^2} S_{\xi\xi}(\omega) \quad (3)$$

avec  $S_{\xi\xi}(\omega) = |\Xi(\omega)|^2$ , où  $A$  et  $\omega_c$  sont deux constantes que l'on spécifiera.

24. En sachant que la force aléatoire  $\xi(t)$  peut être modélisée par un bruit blanc, sa densité spectrale de puissance a la forme suivante :

$$S_{\xi\xi}(\omega) = 2\gamma k_B T = \text{constante}. \quad (4)$$

Déduire des équations (3) et (4) l'expression de  $S_{xx}(\omega)$ .

La Figure 6 reproduit le spectre des fluctuations transverses d'une bille de  $1 \mu\text{m}$  de diamètre attachée à une molécule d'ADN de  $16,5 \mu\text{m}$  de long. L'ajustement est obtenu à l'aide de la fonction théorique déterminée à la question précédente. Le spectre est tracé en fonction de la fréquence  $f$ .

Les ajustements permettent de déterminer précisément la valeur de la force  $F$ .

25. Donner une estimation du coefficient  $\gamma$  en utilisant la relation (loi de Stokes)

$$\gamma = 6\pi\eta r$$

avec  $\eta = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  la viscosité de l'eau et  $r$  le rayon de la bille.

26. — Identifier et estimer la fréquence de coupure  $f_c = \omega_c/2\pi$  à partir du graphique de la Figure 6.  
 — En déduire une estimation de la force  $F$  qui s'applique sur la bille dans le cas de l'expérience de la Figure 6.  
 — Comparer ce résultat à l'ordre de grandeur de la force trouvée avec une méthode moins précise à la question 19.

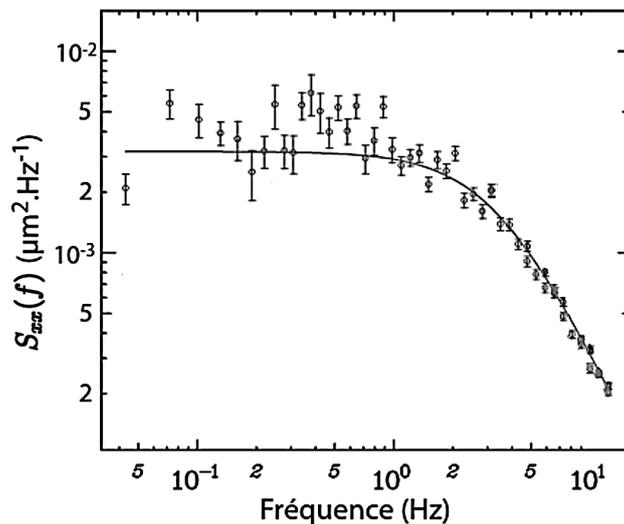


FIGURE 6 – Densité spectrale  $S_{xx}(f)$  obtenue dans une expérience avec une configuration donnée des aimants sur un système DNA-bille.

### A.3. Mesures de position

En plus de la force qui s'exerce sur la bille, le dispositif permet une mesure de la position de cette dernière.

L'échantillon est observé à l'aide d'un microscope inversé, une image CCD est traitée par un ordinateur qui commande les électro-aimants pour asservir la position des billes en temps réel.

Les positions  $x, y$  sont d'abord obtenues par corrélation en temps réel des images des billes. La position  $x, y$  est mesurée avec une précision de quelques nanomètres.

La position verticale  $z$ , c'est-à-dire la distance bille-plan, est obtenue, avec une résolution de 10 nm, en utilisant la variation des anneaux de diffraction qui entourent l'image de la bille lorsqu'elle se déplace verticalement. Le suivi le long de l'axe vertical  $z$  peut utiliser ce motif caractéristique car le rayon des cercles concentriques observés dépend de la position du centre de la bille par rapport au plan focal de l'objectif.

#### A.3.1. Position horizontale

Un faisceau lumineux monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  en incidence normale arrive sur une pupille plane diffractante (S) placée en  $z = 0$ . On observe la répartition de l'intensité lumineuse sur un écran plan placé à la distance  $z$  de l'obstacle. Les notations sont les suivantes :  $M \equiv (x', y', 0)$  repère un point de la pupille diffractante et  $P \equiv (x, y, z)$  un point de l'écran d'observation.

27. — Définir le cadre de la diffraction de Fraunhofer, encore nommée diffraction en champ lointain ou approximation de Fraunhofer.
- Dans l'expérience, la diffraction est due à une pupille circulaire de rayon  $a$  : décrire ce qu'on observe à l'écran dans le cas d'une diffraction de Fraunhofer. Faire un dessin schématique, donner le nom de la figure de diffraction obtenue.

Dans le cas d'une pupille circulaire, la figure de diffraction est également à symétrie circulaire et présente une première frange noire pour

$$\theta_1 \simeq 1,22 \frac{\lambda}{a}.$$

28. Dans le cas de l'expérience des pinces magnétiques, l'objet diffractant n'est pas une ouverture dans un écran, mais la bille magnétique. Expliquer les analogies et différences par rapport au cas discuté plus haut d'une ouverture circulaire, dans l'hypothèse d'un montage optique identique et en considérant la bille comme un objet opaque.
29. Dans l'expérience, une lentille mince de focale  $f'$  est utilisée pour former l'image de la bille sur le plan de la caméra CCD, qu'on suppose coïncidant avec le plan focal image. Exprimer le diamètre  $d_1$  de la première frange noire à l'écran en fonction des paramètres du problème.
30. L'ouverture de la pupille est  $a = 10 \mu\text{m}$ . On éclaire le système à l'aide d'une LED rouge. L'image enregistrée par la caméra CCD est formée de pixels carrés de  $10 \mu\text{m}$  de côté. Déterminer la focale  $f'$  qu'il conviendrait de choisir pour pouvoir observer l'image dans ces conditions, en supposant que l'objectif travaille dans l'air (« objectif sec »).

### A.3.2. Position verticale

Dans le système réel, la bille n'est pas à une distance infinie de la lentille et il est nécessaire d'ajuster la distance du plan focal pour avoir une image nette. Lorsque la bille se déplace en direction  $z$ , elle sort donc du plan focal. Par conséquent, le profil de sa figure de diffraction change. Cet effet est utilisé pour déterminer précisément sa position  $z$ .

#### Document scientifique 1 : extrait d'article

##### Positionnement de la bille le long de l'axe vertical

Lorsque la bille est légèrement hors plan focal, elle apparaît entourée d'une série de cercles concentriques (figure a).

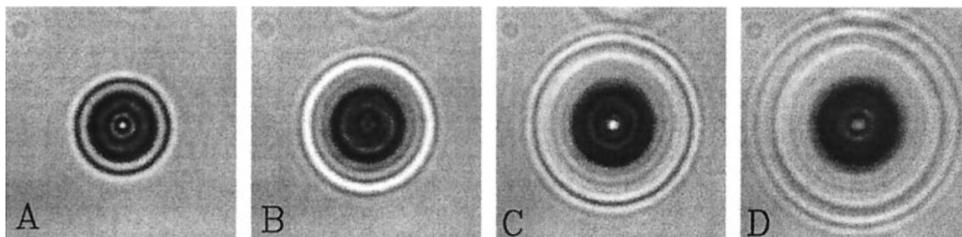


Figure a

Le suivi le long de l'axe vertical  $z$  peut utiliser ce motif caractéristique car le rayon des cercles concentriques observés dépend de la position du centre de la bille par rapport au plan focal de l'objectif. Lors du suivi en  $x, y$  d'une bille posée sur le fond, on construit d'abord une image d'étalonnage. Typiquement, 32 profils radiaux sont enregistrés sur une profondeur d'environ  $10 \mu\text{m}$  au-dessus du centre de la particule (Figure b).

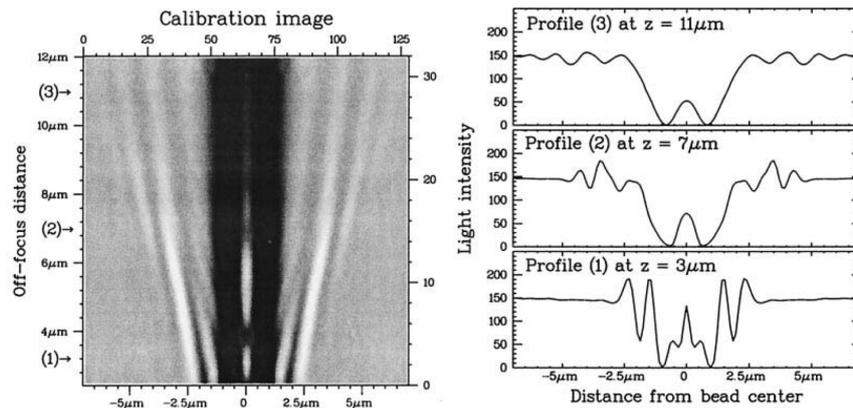


Figure b

Ensuite, pour le positionnement vertical, le profil radial de l'objet est comparé en temps réel à cet ensemble de référence. Plus précisément, une méthode des moindres carrés permet de déterminer grossièrement les profils de référence les plus proches. Ce processus est ensuite suivi d'une interpolation de l'emplacement précis de la bille. Cette interpolation repose sur les aspects ondulatoires des anneaux de diffraction. Il s'avère que le déphasage entre les profils successifs est relativement linéaire en fonction de leur distance par rapport au plan focal. Comme pour le suivi  $x, y$ , la résolution spectrale du suivi  $z$  à haute fréquence est de l'ordre de  $1 \text{ nm} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$ . Bien entendu, la position verticale de la bille ne peut être mesurée que dans une profondeur d'environ  $10 \text{ } \mu\text{m}$  au-dessus du plan focal. Plus loin, les anneaux oscillants disparaissent progressivement.

31. En suivant le document scientifique 1, les profils radiaux des images enregistrées lors d'une expérience peuvent être comparés à ceux obtenus lors de la phase d'échantillonnage grâce à un ajustement par la méthode des moindres carrés. Décrire cette méthode dans le cas général : donner son objectif, le principe de la méthode, expliciter la fonction  $S$  qui doit être minimisée et par rapport à quelles variables on doit minimiser.
32. Dans le cas de l'expérience, quelle grandeur joue le rôle des ou de la variable par rapport à laquelle on minimise  $S$  ?
33. Le script Python suivant, incomplet, permet de définir une fonction qui prend en entrée une série de mesures  $\{x_i, y_i\}$  et une fonction  $f(x, A)$  dépendant d'un paramètre  $A$  et réalise un ajustement de la fonction aux mesures par la méthode des moindres carrés.

```
def moindres_carre(mesures, func, initial_param, step=0.01, tolerance=1e-6):
    xdata, ydata = mesures
    A = initial_param
    quantite_prec = .....
    while True:
        A += step
        quantite_actu = .....
        if abs(quantite_actu - quantite_prec) < tolerance:
            break
        quantite_prec = quantite_actu
    return A
```

- Compléter la fonction en écrivant les expressions appropriées dans les espaces indiqués par les points.
- Comment une modification de la valeur du paramètre `step` affecte-t-elle le processus d'optimisation ? Quelles peuvent être les conséquences négatives d'une valeur trop élevée ou trop basse ?

## B. Élasticité de l'ADN

### B.1. Un comportement élastique

La Figure 7 montre une courbe force-extension typique, obtenue avec une molécule d'ADN de longueur totale  $L = 16,5 \mu\text{m}$ .

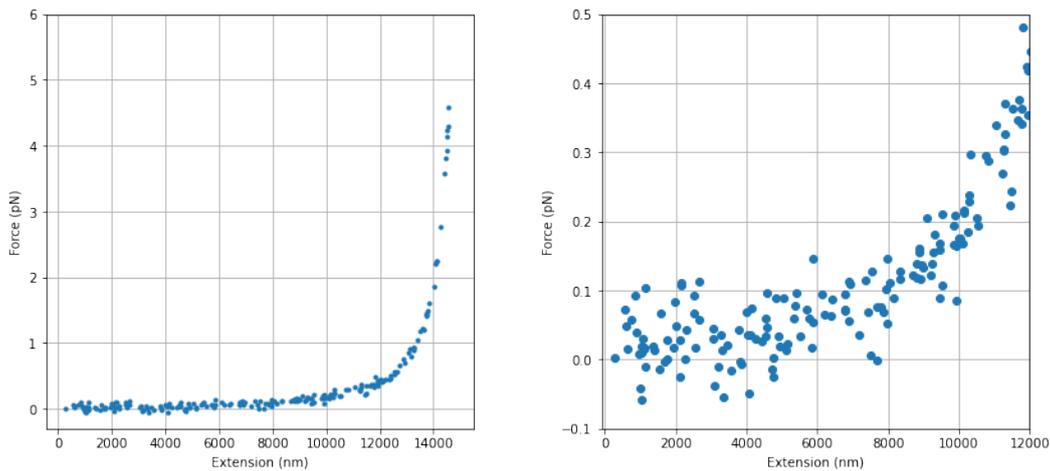


FIGURE 7 – Courbe force extension obtenue sous pinces magnétiques pour l'ADN du virus Lambda-phage, de longueur  $L = 16,5 \mu\text{m}$ . La figure de droite est un agrandissement du régime de faible force de la figure de gauche.

34. Justifiez l'existence d'un régime élastique pour l'ADN pour des forces suffisamment faibles sur la base de la Figure 7. Donner une estimation grossière des forces et extensions pour lesquelles ce régime est observé. Montrer que l'ordre de grandeur pour la constante de raideur associée à ce régime élastique est de quelques  $10^{-8}$  S.I.
35. En comparant l'extension typique du régime linéaire avec la longueur étirée  $L$  de la molécule d'ADN, justifier la nécessité d'un modèle spécifique pour expliquer ce comportement élastique.

### B.2. Élasticité entropique

Le comportement élastique observé à faible force peut être expliqué qualitativement grâce à un modèle très simple de la molécule d'ADN comme une *chaîne librement jointe* (Figure 8). Dans ce modèle, la molécule d'ADN est vue comme une suite de tiges rigides de longueur fixée  $\ell$ , dont les orientations sont aléatoires et complètement indépendantes les unes des autres. Nous supposons que deux parties de la chaîne peuvent se superposer.

Nous appelons *monomères* les tiges rigides, *polymère* l'ensemble de la chaîne.

Dans la version unidimensionnelle (1D) de ce modèle, que nous allons étudier maintenant, les monomères n'ont que deux orientations possibles : dans la direction de la force appliquée, ou dans la direction opposée (Figure 8, droite).

**Modèle 1D** Considérons un polymère constitué de  $N$  monomères de longueur  $\ell$ . Tout étiré, le polymère a une longueur  $L = N\ell$ . Une extrémité du polymère est fixée à un support qu'on supposera ponctuel, l'autre est soumise à une force d'étirement  $\vec{f} = f\vec{e}_z$  orientée dans la direction  $\vec{e}_z$  (orientée vers le haut dans le schéma de la Figure 8). Chaque monomère peut pointer, avec une même

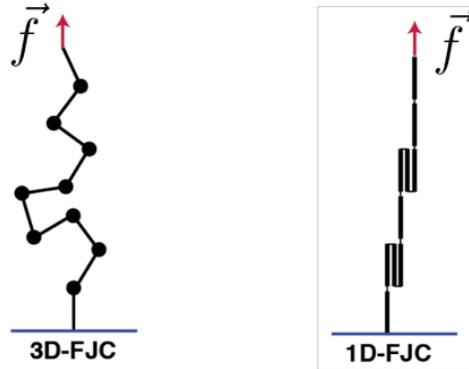


FIGURE 8 – Modèle simple de polymère dans sa version 3D (à gauche) ou 1D (à droite).

probabilité, "vers le haut" le long de la direction  $+\vec{e}_z$ , ou "vers le bas" le long de la direction  $-\vec{e}_z$  :

$$z_i = \pm\ell \quad \text{pour } i = 1 \dots N.$$

## I. FORCE NULLE ET MARCHE ALÉATOIRE

36. — Exprimer l'extension globale du polymère,  $z$ , pour une configuration donnée (plus ou moins désordonnée).
- Déterminer la valeur *moyenne*  $\langle z \rangle$  de l'extension  $z$ , en absence de force, à  $f = 0$ .
  - Montrer que la variance  $\langle z^2 \rangle$ , c'est-à-dire la valeur moyenne du carré de  $z$ , s'écrit, toujours dans le cas où  $f = 0$ ,

$$\langle z^2 \rangle = \ell L.$$

Une analogie existe entre la configuration du polymère et un processus de marche aléatoire qui décrit par exemple le mouvement d'une particule brownienne. Dans une marche aléatoire 1D, soit  $x(t)$  la position à un instant  $t$  donné. Si la trajectoire est échantillonnée avec un pas temporel  $\delta t$ , la distance moyenne parcourue après  $N$  pas de temps est donnée par  $\langle x^2 \rangle = 2Dt$ , avec  $D = \delta x^2 / (2\delta t)$  la coefficient de diffusion et  $\delta x$  la longueur moyenne de chaque pas.

37. Clarifier la similitude entre la formule  $\langle x^2 \rangle = 2Dt$  pour une marche aléatoire 1D et l'expression de  $\langle z^2 \rangle$  dans le modèle de chaîne librement jointe, en précisant les relations entre les grandeurs  $N$ ,  $\ell$ ,  $\delta x$ ,  $\langle z^2 \rangle$  et  $\langle x^2 \rangle$ .

## II. FORCE NON NULLE

38. On applique une force d'étirement  $f$  constante. L'extension mesurée de la chaîne se stabilise à  $z > 0$ . Donner l'expression du travail effectué par la force  $f$  pour étirer le polymère de sa longueur initiale jusqu'à  $z$ . En déduire une expression pour l'énergie potentielle  $U$  du système à l'état étiré.

Par un raisonnement analogue, on suppose que, en présence de la force extérieure  $\vec{f}$ , on peut attribuer à chaque monomère une énergie potentielle  $u_i$  différente selon qu'il est orienté dans le sens de la force ou dans le sens opposé :

$$u_i = -f z_i.$$

Dans les conditions de l'expérience, la direction des monomères est une variable aléatoire, qui varie en raison des fluctuations thermiques. Le système est classique et on peut donc utiliser la statistique de Boltzmann pour le décrire.

39. — Déterminer la probabilité qu'un monomère soit orienté dans la direction  $+\vec{e}_z$  et celle qu'il soit orienté selon  $-\vec{e}_z$ .  
— En déduire l'orientation moyenne des monomères,  $\langle z_i \rangle$ . L'exprimer en utilisant une fonction hyperbolique.
40. Utiliser le résultat précédent pour déterminer  $\langle z \rangle$ , l'extension moyenne de la chaîne à l'équilibre. Tracer  $\langle z \rangle/L$  en fonction de  $f\ell/k_B T$ .
41. — Décrire le comportement de la chaîne dans la limite des grandes forces  $f\ell/k_B T \gg 1$ . Déterminer dans quelle mesure ce comportement peut être considéré comme réaliste.  
— Déterminer le comportement de la chaîne dans la limite des petites forces  $f\ell/k_B T \ll 1$ .
42. Exprimer la force  $\vec{f}_{\text{ADN}}$  que la molécule d'ADN exerce sur l'opérateur en présence d'une faible force extérieure  $f$  et en conditions d'équilibre. Commenter l'expression « élasticité entropique » utilisée pour ce régime.
43. Dans le régime de force faible, on peut associer une constante élastique effective  $k_{\text{ADN}}^{\text{1D}}$  à la chaîne polymère. Déterminer cette constante et en vérifier l'homogénéité.

**Modèle 3D** On peut réaliser un calcul analogue dans le cadre d'un modèle un peu plus réaliste, où les segments ne sont pas contraints le long d'un axe mais peuvent avoir n'importe quelle orientation dans l'espace tridimensionnel. Dans ce cas, l'énergie associée à l'orientation  $\vec{r}_i$  d'un monomère en présence d'une force extérieure  $\vec{f} = f\vec{e}_z$  s'écrit

$$u_i = -\vec{f} \cdot \vec{r}_i.$$

La longueur moyenne de la molécule dans la direction de la force s'écrit dans cette géométrie

$$\langle z \rangle = \frac{1}{Z} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^\pi \sin\theta_1 d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} d\phi_N \int_0^\pi \sin\theta_N d\theta_N \sum_i \ell \cos\theta_i \exp\left(\frac{f\ell}{k_B T} \sum_i \cos\theta_i\right). \quad (5)$$

44. Justifier l'Équation 5, en précisant le choix du système de coordonnées effectué.
45. — Écrire explicitement l'expression générale du facteur de normalisation (ou fonction de partition)  $Z$ .  
— Montrer ensuite que  $Z$  peut s'écrire

$$Z = \left( \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \exp\left(\frac{f\ell \cos\theta}{k_B T}\right) \right)^N. \quad (6)$$

On peut montrer, dans le cadre de la physique statistique classique, que l'extension moyenne de la molécule est donnée par

$$\langle z \rangle = k_B T \frac{\partial}{\partial f} \ln(Z). \quad (7)$$

46. Montrer, à partir de l'Équation 6 et de l'Équation 7, que

$$\langle z \rangle = N\ell \left( \coth \left( \frac{f\ell}{k_B T} \right) - \frac{k_B T}{f\ell} \right), \quad (8)$$

où la fonction  $\coth(x) - 1/x$  s'appelle également fonction de Langevin.

*Ce calcul requiert plusieurs étapes intermédiaires.*

47. Comparer les limites de faible et grande force de l'expression Équation 8 avec ceux de la version 1D du modèle (question 41 notamment). Montrer que la constante élastique associée au régime élastique dans le modèle 3D est

$$k_{\text{ADN}}^{3\text{D}} = \frac{3k_B T}{L\ell}. \quad (9)$$

On donne le développement limité suivant, valable pour  $\epsilon \ll 1$  :  $\coth \epsilon = \frac{1}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{3} + O(\epsilon^3)$ .

### B.3. Élasticité entropique : thermodynamique

Dans la partie précédente, nous avons déterminé le comportement élastique de la molécule d'ADN en la modélisant comme un polymère. Son élasticité vient de la tendance du système à rester dans un état désordonné, plutôt qu'à s'allonger dans un état moins probable. Nous allons maintenant faire un lien plus direct avec le concept d'entropie.

**Cas extrêmes** Pour commencer, faisons un simple décompte du nombre d'états dans deux conditions extrêmes et dans un cas simple, pour évaluer l'entropie correspondante. Considérons un polymère 1D, constitué de  $N$  monomères pouvant s'orienter dans deux sens opposés :  $z_i = \pm\ell$ .

48. — Dans le cas de force nulle les orientations sont aléatoires. Déterminer le nombre de configurations différentes correspondant à cet état.
- Dans le cas d'une force suffisamment élevée, tous les monomères s'orientent dans le sens de la force. Déterminer le nombre de configurations différentes correspondant à cet état.
  - En utilisant la définition statistique de l'entropie, donner l'entropie pour chacun de deux états considérés aux deux conditions précédentes,  $S_{f=0}$  et  $S_{f \gg f_0}$ , où  $f_0 = k_B T / \ell$ .
  - Faire l'application numérique pour  $N = 100$ .

**Cas général** Dans le cas général, mais pour des forces suffisamment faibles, on peut montrer que l'entropie de la chaîne dans une conformation d'extension  $z$  s'écrit

$$S = S_0 - k_B \frac{3z^2}{2N\ell^2}, \quad (10)$$

où  $S_0$  est une constante.

49. — Expliquer pourquoi l'énergie *interne*  $U$  du système est toujours nulle, en vous appuyant sur la définition du modèle utilisé. Nous ne considérons pas ici la contribution de l'énergie cinétique.

- Déduire l'expression de l'énergie libre  $F$  du système.
- Justifier la relation suivante entre la force  $f$  et l'extension  $z$  :  $f = \frac{\partial F}{\partial z}$ .
- En déduire une relation force-extension valable pour des forces suffisamment faibles.
- Comparer avec les résultats trouvés dans la sous-section B.2.

## C. Modélisation de l'ADN comme une longue tige flexible

Dans la section B la molécule d'ADN a été modélisée comme une suite de  $N$  segments rigides de longueur  $\ell$ , ou monomères, dont les orientations sont aléatoires et complètement indépendantes les unes des autres. La constante élastique effective  $k_{\text{ADN}}^{3\text{D}}$  (Équation 9, question 47) dépend de ces deux paramètres.

Pour l'évaluer de manière quantitative, il faut cependant établir la valeur de la longueur  $\ell$  du monomère.

### C.1. Ajustement avec le « modèle du ver »

Pour commencer, on peut donner une estimation de  $\ell$  à partir des données expérimentales. Les données force-extension de la Figure 7 peuvent être ajustées par un modèle plus réaliste basé sur la représentation de la molécule d'ADN comme une corde souple, appelé le « modèle du ver ». Dans ce modèle, la force  $f$  et l'extension  $z$  sont liées par la relation

$$f = \frac{2k_B T}{\ell} \left( \frac{z}{L} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{z}{L} \right)^{-2} \right) \quad (11)$$

où  $L$  et  $\ell$  sont les mêmes paramètres que précédemment.

50. Par un développement limité à l'ordre 1, montrer que pour des faibles valeurs de  $\frac{z}{L}$  le comportement du « modèle du ver » est élastique, de constante élastique  $k_{\text{ADN}}^{3\text{D}}$  (Équation 9).
51. Un ajustement des données de la Figure 7 par le module de l'Équation 11 permet d'obtenir l'estimation  $k_{\text{ADN}}^{3\text{D}} \simeq (7,70 \pm 0,40) \times 10^{-6} \text{ pN} \cdot \text{nm}^{-1}$ .
  - Déduire une estimation du paramètre  $\ell$ .
  - Attribuer une incertitude à cette estimation.
  - En comparant avec la Figure 1, estimer grossièrement le nombre  $n_\ell$  de paires de bases qui constituent un segment d'ADN de longueur  $\ell$ .

### C.2. L'ADN comme une tige élastique : traction

Une approche possible pour justifier la valeur de  $\ell$  est d'évaluer la rigidité mécanique de l'ADN lorsqu'il est soumis à une flexion. Pour ce faire, on modélise l'ADN comme une tige élastique de section cylindrique de rayon  $r$  et module de Young  $Y$ .

52. Préciser l'unité usuelle du module de Young  $Y$  (définition en préambule). Justifier qu'il peut être assimilé à l'énergie par unité de volume qui assure la cohésion d'un matériau et en donner une interprétation microscopique.
53. Les métaux et les verres cristallins sont maintenus ensemble par des liaisons covalentes dont l'énergie est de l'ordre de l'eV, à une densité de l'ordre d'une liaison par angström cube. Trouver le module d'Young typique d'un cristal à liaisons covalentes et comparer avec les valeurs données dans le Tableau 1.



FIGURE 9 – Modèle de tige élastique de longueur  $L$ , rayon  $r$ , soumis à une force  $\vec{f}$  qui induit un allongement  $\Delta L$ .

Pour étudier la rigidité en flexion d'une tige élastique, il faut d'abord étudier son comportement lorsqu'elle est soumise à une force de traction (ou à une compression). On considère donc un cylindre solide de longueur  $L$  et rayon  $r$  et de module de Young  $Y$ . Soumis à une force de traction  $f$ , le cylindre s'allonge d'une longueur  $\Delta L$  (voir Figure 9).

54. — Déterminer l'énergie  $E_{\text{étirement}}$  associée à l'étirement  $\Delta L$  du cylindre en fonction des données du problème.  
 — En déduire une expression de l'énergie d'étirement par unité de volume  $e_{\text{étirement}}$ , sous la forme

$$e_{\text{étirement}} = \alpha \left( \frac{\Delta L}{L} \right)^2,$$

avec  $\alpha$  une constante que l'on précisera.

### C.3. Flexion et longueur de persistance

#### C.3.1. Énergie de courbure

On considère une tige élastique de longueur  $L$  courbée par l'action de forces de flexion de manière à former un arc de cercle, de centre  $O$  et rayon  $R$ . Lorsque la tige est courbée, ses différents éléments de volume se retrouvent plus ou moins étirés. L'énergie de courbure peut être calculée en intégrant l'énergie d'étirement sur le volume, en tenant compte du degré d'étirement de chaque élément. La Figure 10 est une aide pour ce calcul.

Après avoir fixé un point  $P$  le long de l'axe de la tige élastique, on choisit un repère cartésien centré en  $P$ , dont l'axe  $z$  est orienté selon la direction  $\overrightarrow{OP}$  (Figure 10) et l'axe  $x$  est orthogonal à la direction locale de l'axe de la tige.

Matériau	$Y$ ( $\times 10^9$ unité S.I.)
Caoutchouc (faible contrainte)	0,01 – 0,1
Plastiques	0,2 – 5
Bois	10
Os cortical humain	14
Verre	50-90
Aluminium	69
Cuivre	117
Acier	200
Tungstène	400
Diamant	1050 – 1200

Tableau 1 – Module de Young de certains matériaux. Source : Wikipédia.

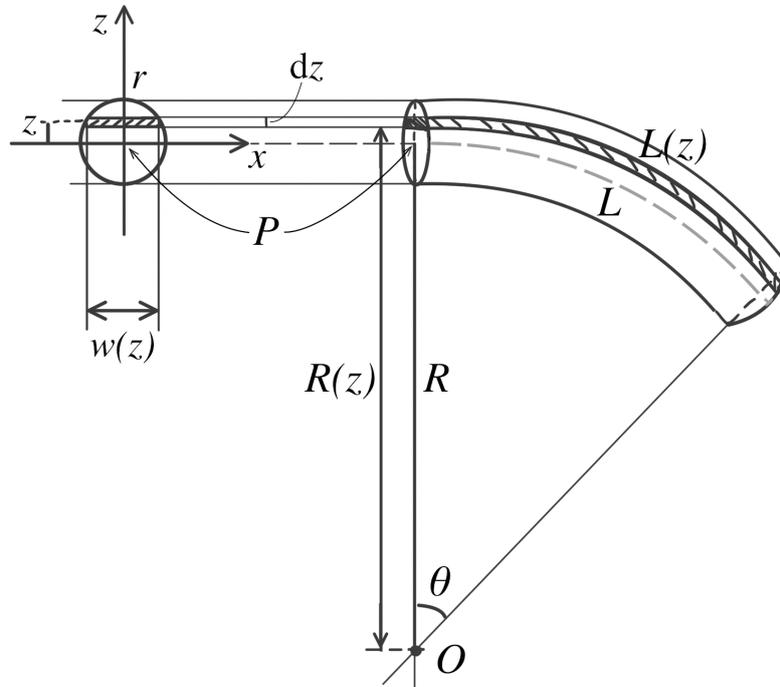


FIGURE 10 – Tige élastique de longueur  $L$  courbée. La courbure est uniforme, le rayon de courbure est noté  $R$ . À gauche, on a une vue en coupe de la section de la tige, à droite une vue de côté.

55. Déterminer la largeur  $w(z)$  de la tige à la hauteur  $z$ .  
En déduire le volume  $dv(z)$  de la tranche de tige comprise entre les hauteurs  $z$  et  $z + dz$ . Pour cette question, on néglige toute variation de la longueur  $L$  avec  $z$ .
56. Déterminer la longueur  $L(z)$  de la tranche de tige de hauteur  $z$  et en déduire l'allongement  $\Delta L(z)$  correspondant.
57. En intégrant  $e_{\text{étirement}}$  sur tout le système, montrer que l'énergie de courbure de la tige s'écrit

$$E_{\text{flexion}} = \frac{1}{2} B \frac{1}{R^2} L, \quad (12)$$

Avec  $B$  une constante que l'on exprimera sous la forme  $B = \kappa Y$ .

*Certains éléments de calcul sont donnés en préambule.*

58. En s'appuyant sur les données de la Figure 1 montrer que, pour l'ADN, la constante  $\kappa$  vaut  $0,78 \times 10^{-36}$  S.I.
59. Discuter la dépendance de la rigidité d'une tige élastique de son diamètre. Par exemple, quelle serait la rigidité de l'ADN si son diamètre devait doubler ?
60. Déduire de l'Équation 12 une expression pour l'énergie de courbure par unité de longueur,  $e_{\text{flexion}}$ , en fonction de  $R$ . L'exprimer ensuite en fonction de l'angle du secteur circulaire  $\theta$  (voir Figure 10).

### C.3.2. Fluctuations thermiques

61. Évaluer l'amplitude angulaire  $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$  des fluctuations spontanées d'une tige élastique dues à un mouvement thermique en utilisant le théorème d'équipartition. Déterminer l'expression de la longueur caractéristique  $L = L_P$  pour laquelle ces fluctuations sont de l'ordre de  $1 \text{ rad}^2$  à température ambiante.

La longueur  $L_P$  s'appelle longueur de persistance.

## C.4. Retour sur le « modèle du ver » et comparaison avec le modèle de chaîne librement jointe

À partir de ces résultats, on peut modéliser une molécule d'ADN comme un long fil élastique de section cylindrique et longueur de persistance  $L_P$ . C'est le « modèle du ver ». La position le long du fil est indiquée par une variable curviligne  $s$ . Pour chaque position  $s$ , les informations géométriques de la chaîne linéaire sont entièrement décrites grâce au repère de Frenet, dans lequel trois vecteurs unitaires orthogonaux forment un trièdre mobile, à savoir

$$\begin{aligned} \vec{t} & \text{ le vecteur tangent,} \\ \vec{n} & \text{ le vecteur normal,} \\ \vec{b} & \text{ le vecteur binormal.} \end{aligned}$$

On peut alors calculer la *fonction de corrélation* du vecteur tangent, définie par la moyenne  $\langle \vec{t}(s) \cdot \vec{t}(s') \rangle$  et qui a, dans ce modèle, la forme

$$\langle \vec{t}(s) \cdot \vec{t}(s') \rangle = \exp[-|s' - s|/L_P].$$

62. Tracer la fonction de corrélation du vecteur tangent en faisant apparaître toute grandeur utile à sa caractérisation.
63. On définit le vecteur « bout-à-bout »  $\vec{R}(L)$  qui relie un point du fil, dont la position est donnée par la variable curviligne  $s$ , à un autre point qui se trouve en  $s'$  tel que la distance curviligne entre les deux points est  $L = |s' - s|$ .

Justifier la relation suivante :

$$\vec{R}(L) = \int_s^{s+L} \vec{t}(u) du$$

64. La moyenne du module carré de  $\vec{R}(L)$  peut s'écrire

$$\langle R^2(L) \rangle = \int_0^L ds \int_0^L ds' \langle \vec{t}(s) \cdot \vec{t}(s') \rangle.$$

Montrer que cette grandeur est donnée par

$$\langle R^2(L) \rangle = 2LL_P \left[ 1 - \frac{L_P}{L} (1 - e^{-L/L_P}) \right].$$

*Certains éléments de calcul sont donnés en préambule.*

65. Discuter les limites  $L \ll L_p$  et  $L \gg L_p$  pour ce modèle.

En comparant avec la question 36, on peut déduire que le comportement de  $\langle R^2(L) \rangle$  est équivalent à celui du modèle de chaîne librement jointe, constitué de  $N$  segments articulés de même longueur  $\ell$  (à force nulle), pourvu que  $L$  soit suffisamment grand.

66. — Déterminer la longueur  $\ell$  des segments du modèle de chaîne librement jointe pour que les deux résultats coïncident.
- Donner une interprétation de ce résultat faisant le lien entre les propriétés mécaniques du modèle de tige élastique et les hypothèses sous-jacentes au modèle en segments rigides.
- À partir des données expérimentales on estime  $\ell \simeq 100$  nm. Déterminer le module d'élasticité en flexion  $B$  et le module de Young  $Y$  de l'ADN. À quel type de matériaux peut-on comparer la rigidité de l'ADN ?