MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

*Liberté
Égalité
Fraternité*

EBE MAT 2

SESSION 2025

CAPES / CAPES-CAFEP

Concours externe

Section
MATHÉMATIQUES

Première épreuve écrite disciplinaire appliquée

L'épreuve permet d'apprécier l'aptitude du candidat à mobiliser ses connaissances et compétences mathématiques et didactiques dans une perspective professionnelle.

Le sujet est constitué d'un dossier pouvant comprendre un ou plusieurs énoncés d'exercices, des productions d'élèves, des documents institutionnels (extraits de programmes ou de ressources d'accompagnement), des extraits de manuels scolaires ou d'autres supports. Il est attendu du candidat :
- la résolution des exercices proposés ;
- une analyse de leur pertinence au regard des objectifs des programmes ;
- une évaluation des productions d'élèves (identification et traitement d'erreurs, valorisation de réussites, propositions de remédiation ou d'approfondissement) ;
- la conception d'une séquence portant sur un thème en lien avec les exercices du dossier (structuration du cours, choix d'activités, cohérence didactique, réflexion sur l'usage d'outils numériques, intégration d'éléments d'histoire des mathématiques, liens avec d'autres disciplines, etc.).

Durée : 5 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé dans les conditions relevant de la circulaire du 17 juin 2021 BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

A

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie. Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► Concours externe du **CAPES** de l'enseignement **public**

- **Section mathématiques – externe**

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EBE	1300E	102	9312

► Concours externe du **CAFEP/CAPES** de l'enseignement **privé**

- **Section mathématiques – externe**

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EBF	1300E	102	9312

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 0199 – D'après documents fournis

Partie 1 - Les ensembles de nombres

I. Les fractions

A. *Définitions et repères de progressivité*

1. Dans les repères annuels de progression pour le cycle 3, on peut lire : « Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, […]. ».
Donner un énoncé d'exercice motivant l'introduction des fractions qui se réfère à cette prescription.

2. L'annexe 1.1 propose la définition de quatre concepts de la notion de fraction. Donner une limite du concept « partie/tout » à l'apprentissage des fractions.

3. On considère l'extrait donné en annexe 1.2 des repères annuels de progression pour le cycle 3.
Quel concept de la notion de fraction ces repères incitent-t-ils à exploiter en CM1 et CM2 ?

4. Quel concept de la notion de fraction doit-on utiliser pour étendre leur définition aux cas où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ au cycle 4 ?

B. *Analyse d'un outil : le guide âne*

5. Pour partager un segment donné en segments de même longueur, un enseignant propose à des élèves de sixième d'utiliser un guide-âne dont la manipulation est décrite dans l'annexe 1.3.

a. Démontrer que l'exemple présenté dans cette annexe permet de partager le segment [AB] en cinq segments de même longueur.
b. Donner les deux concepts de la notion de fraction illustrés pour chacun des deux schémas figurant en annexe 1.4.
c. Préciser un objectif majeur visé par un enseignant qui distribue ces schémas à des élèves de sixième.

C. *Construction et analyse de ressources autour de la manipulation de fractions*

6. Un enseignant propose l'exercice en annexe 1.5 à des élèves de sixième et collecte les réponses de trois élèves données en annexe 1.6.

a. Les réponses des élèves 1 et 2 peuvent-elles être considérées toutes les deux comme valides ? Expliquer.
b. Donner un objectif d'apprentissage visé par l'enseignant dans cet exercice.
c. Sans changer la situation et en exploitant le concept de la « fraction ratio », proposer une modification de la question rendant valide la réponse de l'élève 3.

7. Un enseignant propose à des élèves de sixième l'exercice énoncé en annexe 1.7. Une production d'élève figure en annexe 1.8.

a. Que peut-on dire à l'élève pour lui permettre d'identifier son erreur ?
b. En s'appuyant sur la production de l'élève, proposer une correction de cet exercice telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève de sixième.

8. L'annexe 1.9 présente une conception erronée de la fraction, à l'origine d'obstacles rencontrés par les élèves dans leur apprentissage de cette notion. Proposer une question, autre qu'une comparaison de fractions, avec trois choix de réponse : deux distracteurs et la bonne réponse qui permet de repérer cette conception erronée.
On précise qu'un distracteur est une réponse fausse qui permet de repérer une conception erronée.

9. Dans le paragraphe relatif aux nombres du programme de cycle 3, on peut lire : « Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. ».

a. Donner deux raisons justifiant l'intérêt de cet objectif d'apprentissage.
b. En se référant à l'annexe 1.10, donner un exemple générique illustrant la méthode qui permet de décomposer une fraction sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, tel qu'il pourrait figurer dans un cahier d'élève de sixième.

II. Les nombres décimaux

A. Continuité des apprentissages : des fractions aux nombres décimaux

10. Dans l'extrait de la trace écrite donnée en annexe 1.11, la définition de nombre décimal n'apparait pas.

a. En se référant à l'annexe 1.2, quelle pourrait-être cette définition et à quelle place pourrait-elle figurer dans cette trace écrite de cours ?
b. Donner une justification du caractère décimal de la fraction $\frac{3}{8}$.

11. Dans un QCM (questionnaire à choix multiple), les réponses fausses proposées sont appelées distracteurs. Analyser les distracteurs du QCM figurant en annexe 1.12, proposé à des élèves de sixième.

B. Analyse d'un exercice sur l'écriture fractionnaire des nombres décimaux

12. Un enseignant souhaite interroger des élèves sur le caractère décimal de certaines fractions. Il s'appuie pour cela sur la propriété énoncée dans l'annexe 1.13.

a. Démontrer cette propriété sans se restreindre à un niveau de classe.
b. L'exercice que l'enseignant soumet aux élèves est énoncé en annexe 1.14. Justifier l'intérêt de chacun des cas proposés.
c. Proposer deux prérequis pour qu'un élève puisse traiter cet exercice.

C. Construction et analyse de ressources autour de la multiplication de deux nombres décimaux

13. Sur l'annexe 1.15 figure un verbatim d'une ouverture de séance en classe de sixième. Donner un exemple répondant à la question posée, qui contredit la réponse de l'élève.

14. Un enseignant propose à des élèves de troisième le problème suivant : « Trouver tous les couples de nombres décimaux ayant chacun un chiffre (non nul) après la virgule dont le produit est égal à 6 ». Proposer une correction telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève.

III. Les nombres irrationnels

A. *Étude du nombre* $\sqrt{2}$

15. Rédiger une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève de lycée.

16. Identifier deux prérequis que doivent maîtriser les élèves pour pouvoir aborder cette preuve.

17. Que répondre à un élève demandant combien il existe de nombres irrationnels ? Comment le lui justifier ?

18. Un enseignant soumet à une classe de seconde la question figurant en annexe 1.16.

Identifier deux propriétés mathématiques nécessaires au traitement de cette question.

19. En se référant à l'annexe 1.17, on note (u_n) la suite des approximations de $\sqrt{A}$ définie par la méthode de Héron.

a. Pour $A = 2$, écrire un algorithme permettant de déterminer le n-ième terme de cette suite en prenant $u_0 = 2$.

b. Justifier l'affirmation de l'annexe : « si a est un nombre proche de $\sqrt{A}$ alors le nombre $\frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$ sera encore plus proche de la racine recherchée. ». On pourra se limiter à envisager le cas où $a > \sqrt{A}$.

c. A l'aide de l'annexe 1.17, justifier mathématiquement que l'algorithme de Héron est un cas particulier de celui de Newton.

B. *Culture mathématique : le nombre* e

20. Donner deux définitions du réel e, l'une pouvant figurer dans un cahier d'élève de lycée et l'autre permettant de déterminer une valeur approchée de ce nombre.

21. L'exercice en annexe 1.18 est proposé à des élèves de terminale suivant la spécialité mathématiques.

a. Enoncer la propriété sur les intégrales qui permet de répondre à la question 2), telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève.

b. Une réponse d'élève à la question 3a) est proposée en annexe 1.19. Lister deux réussites et deux erreurs dans cette production.
c. Dans la question 3b), pourquoi écarte-t-on les cas $n = 0$ et $n = 1$?
d. Rédiger une correction de la question 4) telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève.

C. *Représentation des ensembles de nombres*

22. En vous référant à l'annexe 1.20, construire un diagramme de Venn représentant les ensembles de nombres entiers naturels, entiers relatifs, décimaux, rationnels et réels tel qu'il pourrait figurer dans un cahier d'élève de seconde. On y fera figurer des exemples pertinents en quantité limitée.

Partie 2 – Situations d'alignement

I. Situation 1

Un enseignant propose à des élèves de quatrième de résoudre en groupe l'exercice dont l'énoncé figure en annexe 2.1 et recueille les productions de deux groupes, présentées en annexe 2.3.

A. *Analyse de la situation d'enseignement*

1. Argumenter le choix de cet exercice au regard de l'objectif fixé.

2. En se référant à l'annexe 2.2, préciser à quel type de tâche correspond cet exercice.

3. Donner deux arguments justifiant l'intérêt pédagogique d'organiser ce travail en groupe.

B. *Analyse des productions*

4. Analyser en termes de réussites et erreurs les productions des deux groupes d'élèves présentées en annexe 2.3.

5. Rédiger une question type « vrai/faux » qui pointe l'erreur centrale de la production du groupe 2.

C. *Prolongement de situation*

6. On considère désormais le nouvel énoncé obtenu en supprimant l'hypothèse que le triangle ABC est rectangle et en conservant les dimensions données par l'énoncé avec le point O construit de sorte que le quadrilatère BDOE soit un parallélogramme. On cherche à déterminer s'il existe un triangle ABC tel que le point O soit le milieu du segment [AC].
Donner deux pistes possibles de résolution de ce prolongement en mobilisant éventuellement des notions abordées au lycée.

II. Situation 2

Raisonnement : démonstration d'une propriété

7. Le problème de l'annexe 2.4 est proposé à des élèves de seconde. Une production d'élève est recueillie en annexe 2.5. Analyser en termes de réussites et erreurs cette production.

8. Rédiger une correction complète du problème présenté en annexe 2.4, telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève de seconde.

III. Situation 3

Le problème figurant en annexe 2.6 est proposé à des élèves suivant l'option mathématiques expertes en terminale.

A. Analyse de ressource

9. Identifier un intérêt didactique à la question 2.

10. Démontrer la propriété admise dans l'énoncé.

B. Analyse de production d'élève

11. À l'issue de la correction de la question 1., un élève demande : « Existe-t-il toujours un cercle qui passe par trois points non alignés ? Et est-il unique ? »

a. Quelle réponse doit lui apporter l'enseignant ?
b. Démontrer la propriété sur laquelle s'appuie cette réponse.

12.

a. La réponse à la question 3. produite par un élève figure en annexe 2.7. Identifier l'erreur présente dans cette production. Comment amener l'élève à identifier son erreur ?
b. Après avoir corrigé l'erreur commise par l'élève, compléter sa démarche.
c. Proposer un coup de pouce aux élèves qui éprouveraient des difficultés à s'engager dans la résolution de cette question.

C. Un prolongement possible

13. En prolongement de l'exercice est indiquée en annexe 2.8 la définition géométrique de l'inversion. Montrer que la transformation t est une inversion dont on précisera le centre et la puissance.

14. L'affirmation « l'image d'un cercle par une inversion est une droite » est-elle vraie ? Justifier.

IV. Situation 4

Un enseignant propose l'activité dont l'énoncé figure en annexe 2.9 à des élèves de terminale suivant l'enseignement de spécialité mathématiques.

15. Donner deux intérêts pédagogiques ou didactiques à proposer aux élèves des questions ouvertes dans un problème.

16. Que peuvent apporter les outils numériques dans cette situation ?

17. Donner un prérequis nécessaire au traitement de cette activité.

18. Quelle modification peut-on apporter à l'énoncé pour aider un élève qui n'arrive pas à s'engager dans la résolution de cet exercice ?

19. Proposer deux corrections qui s'appuient sur chacune des productions d'élève données en annexe 2.10.

20. La surface engendrée par le segment $[\mathrm{U_kW_k}]$ lorsque k décrit l'intervalle $[0\,;1]$ est-elle un plan ?

Annexes partie 1

Annexe 1.1 : définitions de quelques concepts de la notion de fraction
a et b désignent deux entiers naturels avec $b \neq 0$

- Fraction « partie/tout » : la fraction $\frac{a}{b}$ désigne a parties d'un tout lui-même partagé en b parties égales ;
- Fraction « partage » : la fraction $\frac{a}{b}$ désigne la réplication a fois de l'unité d'une grandeur partagée en b parties égales ;
- Fraction « quotient » : la fraction $\frac{a}{b}$ désigne le quotient de l'entier a par l'entier b.
- Fraction « ratio » : la fraction $\frac{a}{b}$ désigne le rapport d'une quantité a et d'une quantité b complémentaires dans un tout.

Extrait de : « Etude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions. », Cécile ALLARD.

Annexe 1.2 : extrait des repères annuels de progression pour le cycle 3

NOMBRES ET CALCULS		
Les nombres entiers		
CM1	**CM2**	**6^e**
Les élèves apprennent à utiliser et à représenter les grands nombres entiers jusqu'au million. Il s'agit d'abord de consolider les connaissances (écritures, représentations...).	Le répertoire est étendu jusqu'au milliard.	En **période 1**, dans un premier temps, les principes de la numération décimale de position sur les entiers sont repris jusqu'au million, puis au milliard comme en CM, et mobilisés sur les situations les plus variées possibles, notamment en relation avec d'autres disciplines.
La valeur positionnelle des chiffres doit constamment être mise en lien avec des activités de groupements et d'échanges.		
Fractions		
Dès la **période 1** les élèves utilisent d'abord les fractions simples (comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$) dans le cadre de partage de grandeurs. Ils travaillent des fractions inférieures et des fractions supérieures à 1. Dès la **période 2**, les fractions décimales sont régulièrement mobilisées : elles acquièrent le statut de nombre et sont positionnées sur une droite graduée. Les élèves comparent des fractions de même dénominateur. Ils ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. Ils apprennent à écrire des fractions décimales sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale inférieure à 1.	Dès la **période 1,** dans la continuité du CM1, les élèves étendent le registre des fractions qu'ils manipulent (en particulier $\frac{1}{1000}$) ; ils apprennent à écrire des fractions sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.	En **période 1**, sont réactivées les fractions comme opérateurs de partage vues en CM, puis les fractions décimales en relation avec les nombres décimaux (par exemple à partir de mesures de longueurs) ; les élèves ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. En **période 2** l'addition est étendue à des fractions de même dénominateur (inférieur ou égal à 5 et en privilégiant la vocalisation : deux cinquièmes plus un cinquième égale trois cinquièmes). En **période 3**, les élèves apprennent que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a (définition du quotient de a par b).

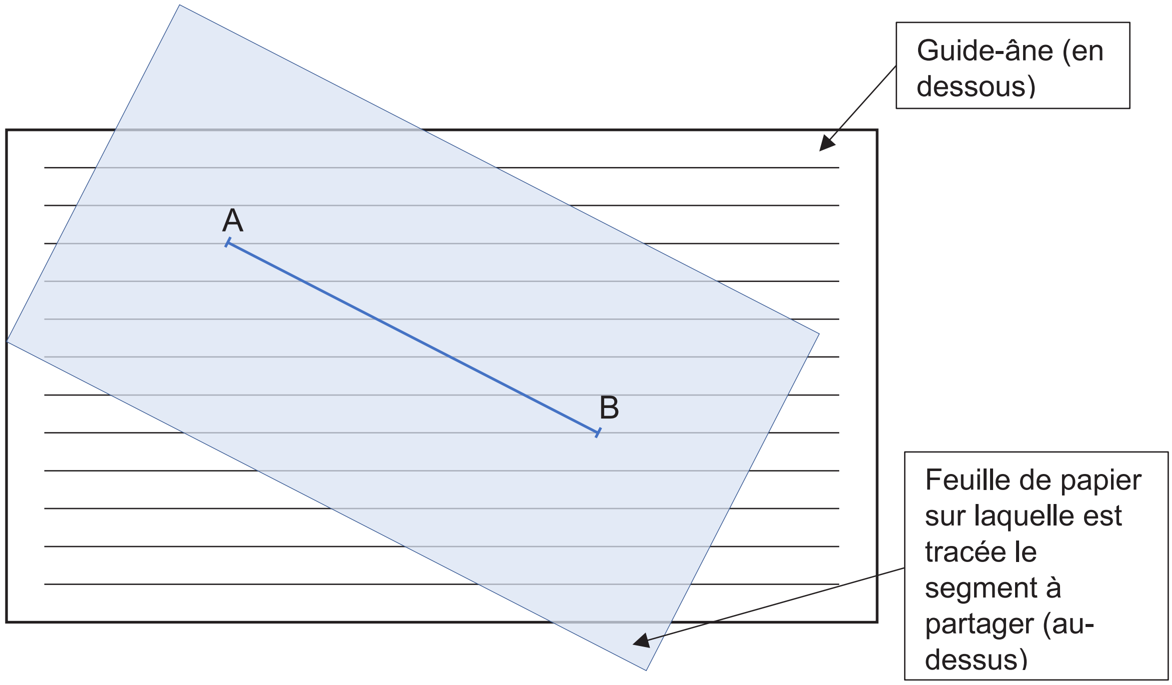
NOMBRES ET CALCULS (suite)		
Nombres décimaux		
Tout au long du cycle, les désignations orale et écrite des nombres décimaux basées sur les unités de numération contribuent à l'acquisition du sens des nombres décimaux (par exemple pour 3,12 : « trois unités et douze centièmes » ou « trois unités, un dixième et deux centièmes » ou « trois cent douze centièmes »).		
À partir de la **période 2**, les élèves apprennent à utiliser les nombres décimaux ayant au plus deux décimales en veillant à mettre en relation fractions décimales et écritures à virgule (ex : $3{,}12 = 3 + \frac{12}{100}$). Ils connaissent des écritures décimales de fractions simples ($\frac{1}{2} = 0{,}5 = \frac{5}{10}$; $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25$; la moitié d'un entier sur des petits nombres).	Dès la **période 1**, les élèves rencontrent et utilisent des nombres décimaux ayant une, deux ou trois décimales. Ils connaissent des écritures décimales de fractions simples ($\frac{1}{5} = 0{,}2 = \frac{2}{10}$; $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$; la moitié d'un entier).	Dès la **période 1**, dans le prolongement des acquis du CM, on travaille sur les décimaux jusqu'à trois décimales. La quatrième décimale sera introduite en **période 2** au travers des diverses activités.

C

Annexe 1.3 Le guide-âne

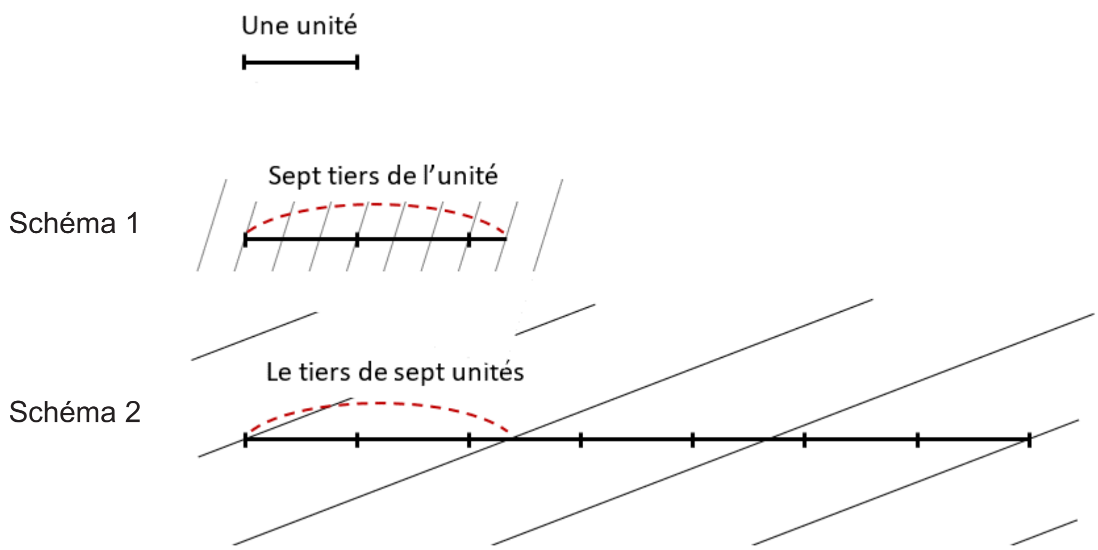
Le guide-âne (en référence aux ânes qui tiraient les bateaux le long des berges), est une feuille de papier ligné, c'est-à-dire une feuille sur laquelle est tracé un réseau de droites parallèles équidistantes. Cet outil permet de partager très rapidement un segment en un nombre de parts égales.

Exemple de partage d'un segment en 5 parts égales :



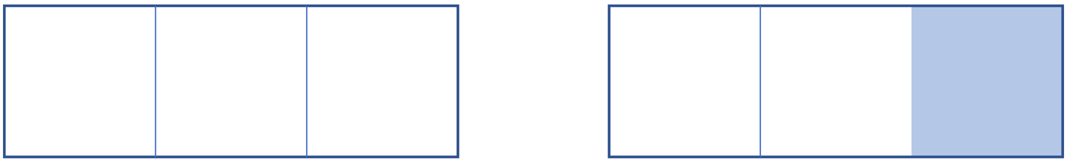
Extrait de la ressource EDUSCOL « *Fractions et nombres décimaux au cycle 3* »

Annexe 1.4



Annexe 1.5 : énoncé d'un exercice

La partie grisée sur le dessin ci-dessous représente la part restante de deux gâteaux partagés équitablement. Quelle est la fraction de gâteaux mangée ?



Extrait de « De la multiplication aux fractions : réconcilier intuition et sens mathématique »
— CSEN, juin 2022

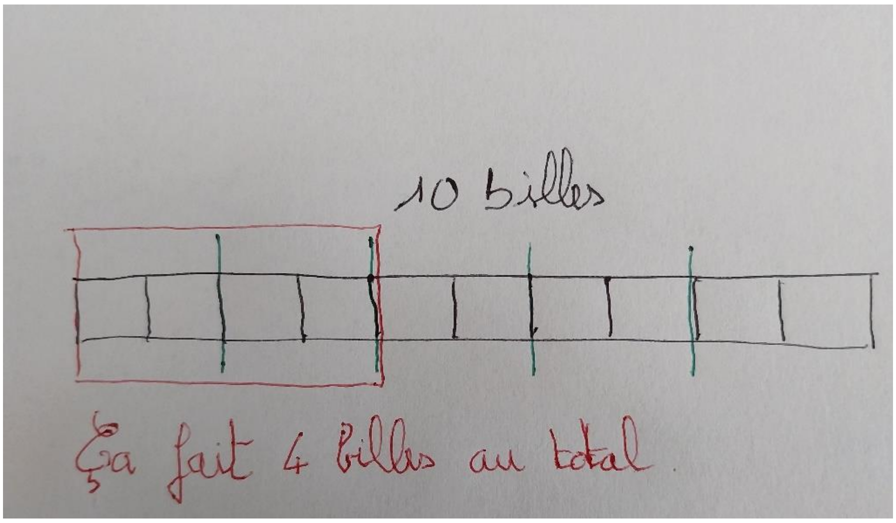
Annexe 1.6 : réponses de 3 élèves

Élève 1	**Élève 2**	**Élève 3**
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{1}$

Annexe 1.7 : énoncé d'un exercice

Les deux cinquièmes des billes de Pierre sont des billes de porcelaine. Il possède dix billes de porcelaine. Combien Pierre a-t-il de billes ?

Annexe 1.8 : production d'élève



Annexe 1.9 :

Conception intuitive des fractions : il s'agit d'une structure bipartite composée de deux nombres entiers.

Le biais de raisonnement sur les nombres entiers

Conséquence de la conception intuitive bipartite des fractions, une tendance est observée à étendre aux fractions certaines propriétés des nombres entiers (whole number bias ; 1.2.3). Un des obstacles majeurs que rencontrent les élèves dans leur apprentissage est que ce raisonnement sur les nombres entiers n'est pas opérant dans le champ des fractions (Van

Hoof, Verschaffel, De Neys, & Van Dooren, 2020). Parmi les exemples de raisonnement sur les nombres entiers rencontrés chez les élèves que connaissent bien les enseignants et qui conduisent à des conclusions erronées, se trouvent : $\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$ parce que $4 > 3$; $\frac{4}{4} \neq \frac{3}{3}$ parce $4 \neq 3$; $\frac{7}{9} > \frac{5}{6}$ parce que $7 > 5$ et $9 > 6$. Une difficulté supplémentaire est issue du fait que les élèves attribuent le statut de nombre entier à la fois au numérateur et au dénominateur de la fraction, ne considérant pas la fraction comme une entité unique, un nombre à part entière (Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984). Prendre en compte cette conception intuitive afin d'engager une approche didactique visant à soutenir le développement conceptuel de la notion de fraction est un enjeu important.

Extrait du document « De la multiplication aux fractions : réconcilier intuition et sens mathématiques », CSEN, juin 2022

Annexe 1.10 :

Commencer par traiter un exemple générique

Une autre piste consiste à démontrer un résultat sur un exemple générique. Il s'agit d'un exemple numérique ou d'un cas particulier dont le traitement approche une démonstration générale, en ce sens que les outils mobilisés et les modes de raisonnement sont assez facilement transférables au cas général. Le traitement d'un exemple générique n'a pas le statut d'une démonstration générale, mais il peut mobiliser les mêmes objectifs de formation. Dans certains cas, on peut s'en tenir à cet exemple en précisant qu'on admet le cas général.

Extrait du document ressource EDUSCOL « Raisonnement et démonstration »

Annexe 1.11 : trace écrite du chapitre « Les nombres décimaux » d'un cahier d'élève de sixième.

Des fractions décimales à l'écriture décimale

I. Fractions décimales

Définition : Une fraction décimale est une fraction dont le dénominateur est 1 ou 10 ou 100 ou 1000 …

Exemples :

$\frac{248}{100}$; $\frac{3407}{1000}$

II. Ecriture décimale

Propriété : Un nombre décimal se décompose en somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale inférieure à 1.

- Le nombre entier s'appelle **la partie entière**
- La fraction décimale inférieure à 1 s'appelle **la partie décimale**

Exemples :

$$2{,}48=\frac{248}{100}=2+\frac{48}{100}$$

- Sa partie entière est 2 et sa partie décimale est $\frac{48}{100}$.

$$3{,}407=\frac{3407}{1000}=3+\frac{407}{1000}$$

- Sa partie entière est 3 et sa partie décimale est $\frac{407}{1000}$

Annexe 1.12 : énoncé d'un exercice

Entourer la bonne réponse.

Deux unités et trois centièmes est égale à :

Réponse A : 2,3 Réponse B : 2,03 Réponse C : 2,300

Annexe 1.13 : une caractérisation des nombres décimaux

Propriété : soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{a}{b}$ soit une fraction irréductible.

$\frac{a}{b}$ est égale à une fraction décimale si et seulement si 2 et 5 sont les seuls diviseurs premiers possibles de b .

Annexe 1.14 : énoncé d'un exercice

Parmi les fractions suivantes, entourer celles qui sont des nombres décimaux.

$\frac{21}{15}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{34}{100}$

Annexe 1.15 : verbatim d'une ouverture de séance

En début de séance, un professeur pose la question suivante à l'ensemble d'une classe de sixième.

« Peut-on obtenir un nombre entier quand on multiplie deux nombres décimaux ayant chacun un chiffre non nul après la virgule ? »

Un élève répond : *« Ce n'est pas possible, le résultat aura forcément deux chiffres après la virgule ».*

Inspiré d'un problème du rallye mathématique transalpin

Annexe 1.16 : question ouverte

Existe-t-il des triangles rectangles isocèles dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers ? Si oui, donner des exemples. Si non, pourquoi ?

Extrait d'une ressource de l'IREM de Lyon

Annexe 1.17 : algorithmes de Héron et de Newton

Principe de l'algorithme de Héron :

- On désigne par A l'entier naturel non nul dont on cherche une racine carrée. Si a un nombre proche de $\sqrt{A}$ alors le nombre

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{A}{a}\right)$$

sera encore plus proche de la racine recherchée.

- On prend alors ce nombre comme le « nouveau » a, puis on recommence jusqu'à la précision souhaitée

Principe de l'algorithme de Newton :

On considère une fonction f d'une variable réelle définie, dérivable et convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose de plus que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur l'intervalle I.

- si on désigne par a un nombre proche de la solution de l' équation $f(x) = 0$, alors l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a avec l'axe des abscisses sera encore plus proche de la solution recherchée ;
- On prend alors ce nombre comme le « nouveau » a, puis on recommence jusqu'à la précision souhaitée.

Annexe 1.18

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \mathrm{e} \times n! - I_n$. On admettra que $2 < \mathrm{e} < 3$.
   a) Monter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n est un entier naturel.
   b) Monter que si $n > 1$ alors I_n n'est pas un entier.
   c) En déduire que, pour tout entier $n > 1$, $\mathrm{e} \times n!$ n'est pas un entier.
4) Démontrer que e n'est pas un nombre rationnel.

D'après « Magnard, Terminale spécialité »

Annexe 1.19 : réponse d'un élève à la question 3-a)

On note $P(n)$: "J_n est un entier naturel"

* <u>Initialisation</u> $n = 0$

$J_0 = e \times 0! - I_0$ Or $I_0 = \int_0^1 e^{1-t}\,dt = \left[e^{1-t}\right]_0^1 = 1 - e$

Donc $J_0 = e - 1 - e = -1$

Donc $P(0)$ est vraie

* <u>Hérédité</u> On suppose que $P(n)$ est vraie pour tout entier n.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie

$J_{n+1} = e\,(n+1)! - I_{n+1} = e\,(n+1)! - (n+1)I_n - 1 = (n+1)\left(e \times n! - I_n\right) - 1$

$= (n+1)J_n - 1$

J_n est un entier donc $(n+1)J_n - 1$ est aussi un entier, donc $P(n+1)$ est vraie

* <u>Conclusion</u> : Pour tout entier n, $P(n)$ est vraie.

Annexe 1.20 : définition de diagramme de Venn

Il est souvent commode de représenter un élément par un point du plan et un ensemble par l'intérieure d'une courbe fermée. Ainsi la figure ci-contre représente un ensemble A, a *n'est pas un élément de A, b et c sont des éléments de A. Les sous-ensembles sont alors représentés comme des portions de l'ensemble. Ainsi B est une partie ou un sous-ensemble de A. Ces représentations sont des diagrammes de Venn.*

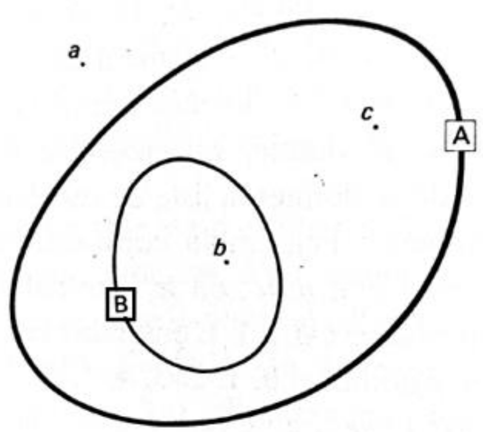


Diagramme de Venn

Définition de l'encyclopédie Universalis « dictionnaire des mathématiques »

Annexe 2.1 : énoncé d'un exercice

<u>Niveau</u> : quatrième

<u>Objectif</u> : confronter la géométrie « visuelle » à la géométrie raisonnée.

On considère un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 117$ cm et $BC = 351$ cm.

Soient D un point du segment [AB] tel que $BD = 57$ cm, E un point au segment [BC] tel que $BE = 175$ cm et le point O tel que DBEO soit un rectangle.

Le point O est-il le milieu du segment [AC] ? Justifier.

Annexe 2.2 : Extraits du programme de cycle 4

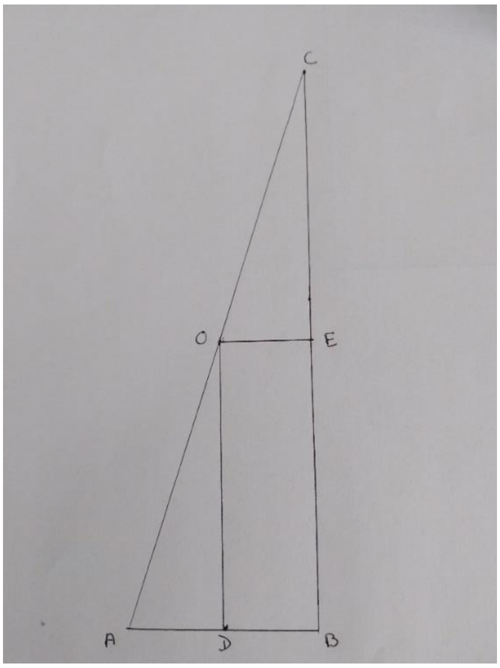
La mise en œuvre du programme doit permettre de faire acquérir aux élèves des connaissances, des méthodes et des démarches spécifiques. En lien avec le cours, elles sont mobilisées et articulées les unes aux autres dans la résolution d'exercices et de problèmes riches et variés, à travers des allers-retours entre le sens et la technique, chacun venant éclairer et consolider l'autre. La diversité des activités concerne aussi bien les contextes (internes aux mathématiques ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines) que les types de tâches proposées : « questions flash » pour favoriser l'acquisition d'automatismes, exercices d'application et d'entraînement pour stabiliser et consolider les connaissances, exercices et problèmes ouverts favorisant la prise d'initiatives, débats et mises au point collectives d'une démonstration, production d'écrits […].

Annexe 2.3 : Travaux de groupes

<u>Production groupe-1 :</u>

On a réalisé une réduction de la figure.

(OE) et (AB) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à (BC).



Dans le triangle ABC, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OC}{AC}=\frac{EC}{BC}=\frac{OE}{AB}$$

$$\frac{OC}{AC}=\frac{176}{351}\approx 0{,}5$$

O est bien le milieu du segment [AC].

__Production groupe-2 :__

Dans le triangle CEO rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OC^2 = OE^2 + EC^2$$

$$OC^2 = 57^2 + 176^2$$

$$OC^2 = 34\ 225$$

$$OC = \sqrt{34\ 225} = 185$$

Dans le triangle AOD rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AO^2 = AD^2 + DO^2$$

$$AO^2 = 60^2 + 175^2$$

$$AO^2 = 34\ 225$$

$$AO = \sqrt{34\ 225} = 185$$

Donc OC = AO ; donc O est le milieu de [AC].

Annexe 2.4 : Une configuration géométrique

On considère un triangle non plat ABC. Soient D un point du segment [AB] et E un point du segment [AC] de sorte que la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC). On note F le milieu du segment [BC] et on considère un point H appartenant au segment [DE].

Démontrer que les points A, H et F sont alignés si et seulement si le point H est le milieu du segment [DE].

Annexe 2.5 : Production d'élève

Les points A, D, B sont alignés
" " A, H, F sont alignés
Comme les droites (DH) et (BF) sont parallèles, d'après le théorème de Thales

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AH}{HF} = \frac{DH}{BF}$$

Les points A, H, F sont alignés
" " A, E, C " "
Comme les droites (HE) et (CF) sont parallèles, d'après le théorème de Thales

$$\frac{AH}{HF} = \frac{AE}{EC} = \frac{HE}{FC}$$

Donc $\frac{DH}{BF} = \frac{HE}{FC}$

Or $BF = FC$ donc $DH = HE$
comme $H \in [DE]$, H est le milieu de $[DE]$

Annexe 2.6 : énoncé de l'exercice

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on note I le point d'affixe 1 et J le point d'affixe i.

On considère les points A d'affixe $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et B d'affixe $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de rayon 1.

<u>Propriété (admise) :</u>

Un cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon $r \geq 0$ a pour équation complexe :

$$z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2$$

1. Montrer que les points $\mathrm{A}, \mathrm{B},$ et O appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.

On note t la transformation qui à tout point M d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1}{\bar{z}}$$

2. Soit D le point d'affixe 1+i et D' son image par la transformation t.
   a. Justifier que le point D appartient au cercle $\mathcal{C}$.
   b. Vérifier que les points A, B et D' sont alignés.
3. Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de O et M' son image par la transformation t.
   Démontrer que les points A, B et M' sont alignés.

Annexe 2.7 : réponse d'un élève à la question 3.
On note a l'affixe du point A et b l'affixe du point B.

$b = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ a et b ont la même partie réelle (égale à $\frac{1}{2}$). Je veux montrer que z' affixe du point M' a aussi sa partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

J'utilise l'équation du cercle $\mathcal{C}$: comme $M(z) \in \mathcal{C}$ donc d'après la propriété admise :

$$z\bar{z} - z - \bar{z} = 0$$

Or $z - \bar{z} = \big(\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)\big) - \big(\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)\big) = 2i\mathrm{Im}(z)$

Donc $M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z|^2 - 2i\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 2i\mathrm{Im}(z)$

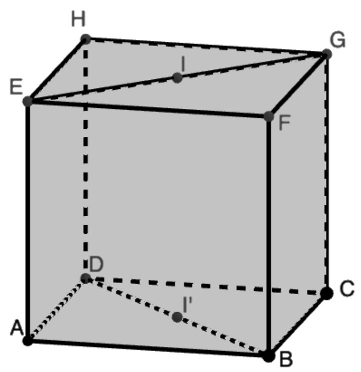
mais je n'arrive pas à conclure.

Annexe 2.8 : définition géométrique d'une inversion
On désigne par $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Soient O un point de $\mathcal{P}$ et k un nombre réel non nul. On appelle inversion de centre O et de puissance k l'application de $\mathcal{P} \setminus \{\mathrm{O}\}$ dans lui-même qui à tout point M (distinct de O) associe le point M' tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{OM'}} = k\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{OM}^2}$$

D'après « Géométrie élémentaire », édition Hermann

Annexe 2.9 : énoncé d'une activité de recherche
On considère la configuration géométrique suivante :



ABCDEFGH est un cube, les points I et I' sont les milieux respectifs de [EG] et [BD].

Soit k un réel tel que $0 \leq k \leq 1$. On définit les points $\mathrm{U_k}$, $\mathrm{V_k}$, $\mathrm{W_k}$ par :

$$\overrightarrow{\mathrm{EU_k}} = k\overrightarrow{ED}\ ;\ \ \overrightarrow{\mathrm{IV_k}} = k\overrightarrow{\mathrm{II'}}\ \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{GW_k}} = k\overrightarrow{\mathrm{GB}}.$$

Que peut-on dire des points $\mathrm{U_k}$, $\mathrm{V_k}$, $\mathrm{W_k}$?

Annexe 2.10 : deux productions d'élèves

Élève 1

$\overrightarrow{U_kW_k} = \overrightarrow{U_kE} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GW_k}$

$= k\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EG} + k\overrightarrow{GB}$

$= k\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{U_kV_k} = \overrightarrow{U_kE} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IV_k}$

$= k\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EI} + k\overrightarrow{II'}$

$= k\overrightarrow{DI'}$

I' milieu de $[DB]$ donc $\overrightarrow{DI'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

donc V_k milieu de $[U_kW_k]$

Élève 2

Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$

On obtient

$E(0 ; 0 ; 1)$; $\overrightarrow{ED}(0 ; 1 ; -1)$; $I(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1)$

$\overrightarrow{II'}(0 ; 0 ; -1)$; $G(1 ; 1 ; 1)$; $\overrightarrow{GB}(0 ; -1 ; -1)$

$\overrightarrow{EU_k} = k\overrightarrow{ED}$ donc $(x_{U_k} - 0 ; y_{U_k} - 0 ; z_{U_k} - 1) = (0 ; 0 ; -k)$

On en déduit $U_k(0 ; k ; 1-k)$

$\overrightarrow{IV_k} = k\overrightarrow{II'}$ donc $(x_{V_k} - \frac{1}{2} ; y_{V_k} - \frac{1}{2} ; z_{V_k} - 1) = (0 ; 0 ; -k)$

On en déduit $V_k(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1-k)$

$\overrightarrow{GW_k} = k\overrightarrow{GB}$ donc $(x_{W_k} - 1 ; y_{W_k} - 1 ; z_{W_k} - 1) = (0 ; -k ; -k)$

On en déduit $W_k(1 ; 1-k ; 1-k)$

$\overrightarrow{U_kV_k}(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} - k ; 0)$ et $\overrightarrow{U_kW_k}(1 ; 1-2k ; 0)$

Les deux vecteurs sont colinéaires car ils ont la même troisième coordonnée.