MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

Liberté
Égalité
Fraternité

JBE MAT 1

SESSION 2025

CAPES A AFFECTATION LOCALE A MAYOTTE
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours externe du CAPES à affectation locale à Mayotte de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
JBE	1300E	101	0312

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 0664 – D'après documents fournis

Problème 1 : codage et décodage d'un message chiffré

Partie A : équation diophantienne

Dans cette partie, on considère l'équation diophantienne (E) : $17x - 26y = 1$ d'inconnue $(x; y) \epsilon \mathbb{Z}^2$.

1. Déterminer une solution particulière de (E).
2. Résoudre l'équation (E).
3. Démontrer qu'il existe un unique couple solution $(u; v)$ de (E) tel que $0 \leq u < 26$.
4. Démontrer que, pour tous nombres entiers relatifs p et q , on a l'équivalence :

$$17p \equiv q\ [26] \Leftrightarrow p \equiv 23q\ [26].$$

Codage :

Soient a un entier non nul et b un entier.

La fonction f, qui à tout entier n compris entre 0 et 25 associe $f(n) = an + b$, est appelée fonction de codage.

Le codage d'une lettre par cette fonction se fait comme suit :

- Remplacer la lettre par son équivalent numérique n donné par le tableau ci-dessous
- Calculer le reste r de la division euclidienne de $f(n) = an + b$ par 26
- Remplacer l'entier obtenu r par la lettre correspondante dans le tableau

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le codage d'un mot consiste alors à coder chacune de ses lettres.

Partie B : un exemple de codage

Dans cette partie, la fonction de codage f est définie par $f(n) = 17n + 22$ où n est un entier compris entre 0 et 25.

Pour le codage de la lettre H, correspondant au nombre $n = 7$, on a :

$$f(7) = 17 \times 7 + 22 = 141 = 5 \times 26 + 11, \text{ d'où } r = 11.$$

Ainsi la lettre H sera codée par la lettre L, correspondant au nombre 11.

1. Coder le mot « HUIT » en utilisant la fonction f.
2.
   a. Déterminer l'expression d'une fonction de décodage g telle que :
   $$r \equiv f(n)\ [26] \Leftrightarrow n \equiv g(r)\ [26]$$
   b. Décoder alors le mot « QWXA ».

Partie C : cas général

Soient a un entier non nul et b un entier.

Dans cette partie, la fonction de codage est définie par $f(n) = an + b$, pout tout entier n compris entre 0 et 25.

On dit que f admet une fonction de décodage g, si deux lettres distinctes sont codées par des lettres distinctes, c'est-à-dire si :

pour tout couple d'entiers $(n_1; n_2)$ compris entre 0 et 25, $f(n_1) \equiv f(n_2)[26] \Longrightarrow n_1 = n_2$.

On admet qu'il existe alors une fonction affine de décodage g, définie pour tout entier r par $g(r) = n$ où n un entier tel que $f(n) \equiv r[26]$.

1. Démontrer que si a et 26 sont premiers entre eux alors f admet une fonction de décodage.
2. Soit une fonction de codage f telle que a et 26 sont premiers entre eux.
    a. Démontrer qu'il existe un entier relatif u tel que $au \equiv 1\ [26]$
    b. Déterminer en fonction de u une fonction de décodage g.
    c. La fonction de décodage est-elle unique ?

Problème 2 : géométrie dans l'espace

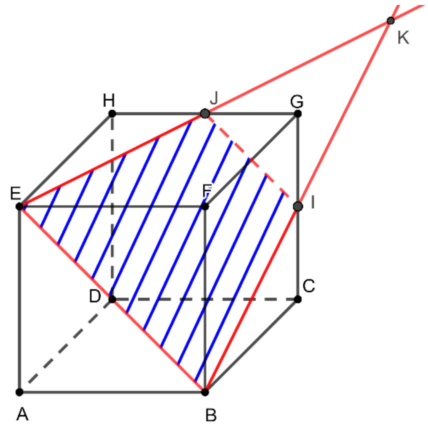
Soit $\mathrm{ABCDEFGH}$ un cube de côté 4. On note I le milieu du segment $[\mathrm{CG}]$ et J celui du segment $[\mathrm{GH}]$. On admet que les droites (BI) et (EJ) sont sécantes en un point K.

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ avec :

$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$. On a ainsi :

$\mathrm{A}(0; 0; 0)$, $\mathrm{B}(4; 0; 0)$, $\mathrm{C}(4; 4; 0)$, $\mathrm{D}(0; 4; 0)$,

$\mathrm{E}(0; 0; 4)$, $\mathrm{F}(4; 0; 4)$, $\mathrm{G}(4; 4; 4)$ et $\mathrm{H}(0; 4; 4)$.



1.
   a. Vérifier par le calcul que I a pour coordonnées $(4; 4; 2)$.
   On admettra que le point J a pour coordonnées $(2; 4; 4)$.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (BI).
   On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (EJ) est :
   $$\begin{cases} x = 2s \\ y = 4s, \text{ où } s \in \mathbb{R}. \\ z = 4 \end{cases}$$
   c. Démontrer que K a pour coordonnées $(4 ; 8; 4)$.
   d. En exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{KE}}.\overrightarrow{\mathrm{KB}}$ de deux façons différentes, déterminer, au degré près, une mesure de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{EKB}}$.

2.
   a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BIJ).
   b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BIJ) est :
   $$2x - y + 2z - 8 = 0.$$

3. On note Δ la droite orthogonale au plan (BIJ) passant par le point D, et N le point d'intersection de Δ avec le plan (BIJ).
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b. Démontrer que le point N a pour coordonnées $\left(\frac{8}{3} ; \frac{8}{3} ; \frac{8}{3}\right)$.
   c. Calculer la distance du point D au plan (BIJ).

4. Soit M un point mobile sur le segment $[\mathrm{EJ}]$, et soit s le réel de l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{EM}} = s\overrightarrow{\mathrm{EJ}}$.
   a. Démontrer que $\mathrm{DM}^2 = 20s^2 - 32s + 32$.
   Déterminer la valeur du paramètre s qui rend la distance DM minimale.
   b. Déterminer les coordonnées du point M qui réalise cette condition.

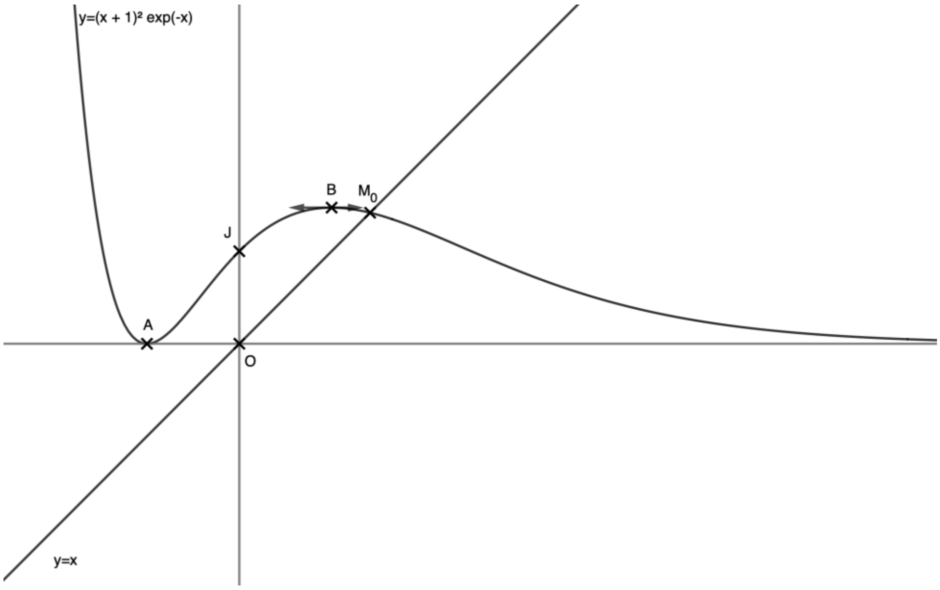
Tournez la page S.V.P.

Problème 3 : fonctions

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on note f' sa dérivée.

Partie A : la représentation graphique

Une représentation graphique (C) de la fonction f est donnée ci-après mais les graduations ne sont pas indiquées. On se propose dans cette partie de préciser cette représentation graphique.



1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer $f'(x)$.
2. Démontrer que la fonction f est décroissante sur $[1; +\infty[$.
3. Soit B le point de (C) d'abscisse positive tel que la tangente en B à (C) est parallèle à l'axe des abscisses.
    a. Déterminer les coordonnées de B.
    b. En déduire l'équation de la tangente à (C) en B.
4. La courbe coupe l'axe des ordonnées au point J.
    a. Déterminer les coordonnées de J
    b. La tangente (T) à la courbe (C) au point J passe-t-elle par le point A de coordonnées (-1 ;0) ?
    c. (T) est-elle parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = x$?
5. La courbe (C) admet-elle une asymptote en $+\infty$?

Partie B : recherche de l'intersection de la courbe (C) avec la droite (Δ).
On désigne par x_0 l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) avec la droite (Δ).

On admet dans cette partie que $1 \leq x_0 \leq \frac{3}{2}$.

1. Donner une valeur arrondie, à 10^{-2} près, de $f(1)$ puis de $f\left(\frac{3}{2}\right)$.
2. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A l'aide des questions précédentes, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.

3. On admet que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$.
   a. Démontrer que $|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
   b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4.
   a. En utilisant la décroissance de f sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$, justifier que pout tout entier naturel n, $u_n - x_0$ et $u_{n+1} - x_0$ sont de signes contraires.
   b. Écrire un algorithme permettant d'obtenir, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite du rang 0 au rang $n-1$.
   c. Calculer les cinq premiers termes de la suite et en donner une valeur arrondie à 10^{-5} près.
   d. En déduire une valeur approchée de x_0.

Partie C : un calcul d'aire.
Soit α un nombre négatif.

1. A l'aide de deux intégrations par partie, calculer en fonction de α :

$$\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$$

On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

2. Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$ quand $\alpha = -1$.
3. On se propose de déterminer une valeur approchée de α tel que $\mathcal{A} = 5$.
   a. Vérifier que $\mathcal{A} = 5$ est équivalent à $e^{-\alpha}(\alpha^2 + 4\alpha + 5) = 10$.
   b. Démontrer que l'équation $e^{-x}(x^2 + 4x + 5) = 10$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
   c. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α tel que $\mathcal{A} = 5$.