MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Liberté
Égalité
Fraternité

Concours externe BAC + 3 du CAPES

Cafep-Capes

Section Mathématiques

1) Exemple de sujet pour la première épreuve d'admissibilité
2) Extrait de l'arrêté du 17 avril 2025

Les épreuves des concours externes du Capes et du Cafep-Capes BAC +3 sont déterminées dans l'arrêté du 17 avril 2025 fixant les modalités d'organisation du concours externe du certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré, publié au Journal Officiel du 19 avril 2025, qui fixe les modalités d'organisation du concours et décrit le schéma des épreuves.

Ce sujet est formé de quatre parties indépendantes.

Partie I : VRAI–FAUX

Pour chacun des items suivants, préciser si l'assertion finale est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Polynômes. On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes d'une variable X à coefficients réels.

1. Tout polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ sans racine réelle est irréductible.
2. Le polynôme $P = X^3 + 2X^2 + X$ est le polynôme caractéristique d'une matrice carrée inversible à coefficients réels.

Équations différentielles.

3. Soit a un réel strictement positif. Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2ay' + a^2y = 0$. Alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
4. Soit b une fonction continue sur $\mathbb{R}$. L'équation différentielle

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad xy'(x) + b(x)y(x) = 0$$

   admet toujours comme ensemble de solutions réelles une droite vectorielle.

Raisonnement/définitions

5. On désigne par $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On donne deux assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$:

$$(\mathcal{P}) : \forall f \in \mathcal{F},\ \exists\, x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$
$$(\mathcal{Q}) : \exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{F},\ f(x) = 0$$

   Ces deux assertions sont équivalentes.

6. Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$: au moins deux d'entre eux sont congrus modulo 2.

Partie II

On pose, lorsque ces expressions ont un sens :

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x)} \ \text{ et } \ F(x) = \int_x^{2x} f(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Démontrer que F est bien définie sur $]0, 1/2[\cup]1, +\infty[$.

Dans la suite, on note $D =]0, 1/2[\cup]1, +\infty[$.

2. (a) Justifier que la fonction f admet des primitives sur $]0, 1[$.
   (b) Démontrer alors que F est dérivable sur $]0, 1/2[$ avec :
   $$\forall x \in]0, 1/2[, F'(x) = \frac{\ln(x) - \ \ln(2)}{\ln(x)\ \ln(2x)}.$$
   (c) Proposer, en justifiant soigneusement, un résultat analogue sur $]1, +\infty[$.

3. Dresser le tableau de variations de F sur D, à ce stade sans chercher les limites.

4. (a) Démontrer :
   $$\forall x \in]1, \infty[, \frac{x}{\ln(2x)} \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{\ln(x)}$$

(b) Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(c) Préciser aussi la limite de $\dfrac{F(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. (a) Calculer $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ \mathrm{d}t$, pour tout x dans D.

   (b) En déduire que la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 1 vaut $+\infty$.

   (c) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} F(x) = -\infty$

6. (a) Démontrer :

$$\forall x \in]0, 1/2[,\ \frac{x}{\ln(2x)} \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{\ln(x)}$$

   (b) Démontrer que F est prolongeable par continuité en 0.

7. Donner l'allure de la courbe représentative de F sur D.

8. On considère maintenant une fonction φ continue sur $[2, +\infty[$ et on suppose que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

   (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t$.

   (b) Démontrer que si u et v sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[2, +\infty[$ et telles que

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty\,,$$

   alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

   (c) Établir alors, en utilisant les questions précédentes, que la fonction $f(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ est d'intégrale divergente sur $[2, +\infty[$.

Partie III

On note $2\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples entiers de 2π.
Soit θ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer :
$$e^{\frac{i\theta}{2}} = e^{\frac{-i\theta}{2}} \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Pour un entier naturel non nul, on pose :

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\,,$$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta \ \text{ et } \ T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$$

2. On suppose que θ n'est pas dans $2\pi\mathbb{Z}$.
   (a) Justifier les égalités :
   $$E_n = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{in\theta/2}.$$
   (b) Calculer S_n et T_n.
   (c) Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$.

3. Que peut-on dire de S_n et T_n si θ est dans $2\pi\mathbb{Z}$?

Dans toute la suite on suppose que θ n'est pas dans $2\pi\mathbb{Z}$. On considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique. Soit r une rotation de $\mathbb{R}^2$ dont on note l'angle θ ; on rappelle que dans toute base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$, la matrice de r est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si k est un entier naturel, on note r^k l'itérée k-ième de r, c'est-à-dire l'application définie par récurrence sur k par :
Si $k = 0$, r^k est l'identité de $\mathbb{R}^2$.

Si $k > 0$, $r^k = r \circ r^{(k-1)}$.

4. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la limite dans $\mathbb{R}^2$ de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k(x)$.

5. Soit r une rotation de $\mathbb{R}^3$ dont on note θ l'angle, D l'axe et $\mathcal{P}$ le plan de rotation.

   (a) Soit x un vecteur de D. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k(x)$.

   (b) Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k(x)$.

Partie IV

Soit $p \in]0,1[$. Un joueur dispose d'une pièce de monnaie, avec laquelle la probabilité d'obtenir pile (noté "P" dans la suite) vaut p et la probabilité d'obtenir face (noté "F" dans la suite) vaut $q = 1 - p$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Le joueur procède à n lancers indépendants de la pièce. L'univers Ω associé à l'expérience aléatoire est donc l'ensemble des successions de P ou F obtenues après n lancers.

On s'intéresse, au sein d'une succession de lancers, aux séries ayant donné le même côté de la pièce.
Par exemple, si $n = 12$ et si $\omega = FFPPPPFFPPPF$ on dit qu'il y a eu 5 séries : une série de F (de longueur 2), puis une série de P (de longueur 4), etc., pour terminer avec une série de F de longueur 1.
On s'intéresse alors au nombre, noté N_k , de séries obtenues après k lancers, où $k \in [\![1, \ldots, n]\!]$. Ce nombre compte les séries en cours. Dans l'exemple ci-dessus :
$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$, $N_3(\omega) = \ldots = N_6(\omega) = 2$, etc., jusqu'à $N_{12}(\omega) = 5$.

Pour tout $k \in [\![1, \dots, n]\!]$, N_k est une variable aléatoire sur Ω (on ne demande pas de le montrer). On introduit, pour tout $i \in [\![1, \dots, n]\!]$, les évènements :

F_i : le $i-$ième lancer a donné F

P_i : le $i-$ième lancer a donné P

Dans cette première partie $p \in]0, 1[$ et tous les résultats sont à exprimer en fonction de p et $q = 1 - p$.

1. (a) Donner la loi de la variable aléatoire N_1 et son espérance $E(N_1)$.
   (b) Donner la loi de la variable aléatoire N_2 et son espérance $E(N_2)$.
2. Préciser l'ensemble $N_n(\Omega)$ des valeurs prises par N_n. Calculer $P(N_n = 1)$ ainsi que $P(N_n = n)$.

Dans la suite $E(N_k)$ désigne l'espérance de N_k. Dorénavant, on suppose que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire que $p = q = 1/2$. Pour tout $k \in [\![1, \dots, n]\!]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$G_k(t) = \sum_{i=1}^{n} P(N_k = i)t^i$$

3. Établir que : $\forall k \in [\![1, \dots, n]\!]$, $G'_k(1) = E(N_k)$.
4. Soit $k \in [\![2, \dots, n]\!]$. Pour tout i dans $[\![1, \dots, k]\!]$ démontrer :

$$P\big((N_k = i) \cap P_k\big) = \frac{1}{2} P\big((N_{k-1} = i) \cap P_{k-1}\big) + \frac{1}{2} P\big((N_{k-1} = i-1) \cap F_{k-1}\big) .$$

On admet que, de façon symétrique, on a (pour tout i dans $[\![1, \dots, k]\!]$) :

$$P\big((N_k = i) \cap F_k\big) = \frac{1}{2} P\big((N_{k-1} = i) \cap F_{k-1}\big) + \frac{1}{2} P\big((N_{k-1} = i - 1) \cap P_{k-1}\big) .$$

5. (a) Soit $k \in [\![2, \dots, n]\!]$. Démontrer :

$$P(N_k = i) = \frac{1}{2} P(N_{k-1} = i) + \frac{1}{2} P(N_{k-1} = i - 1)$$

   (b) En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_k(t) = \big(\frac{t+1}{2}\big) G_{k-1}(t)$.

(c) En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_k(t) = t\big(\dfrac{t+1}{2}\big)^{k-1}$.

6. Soit $k \in [\![2, \ldots, n]\!]$.

   (a) À l'aide des résultats précédents, déterminer l'espérance de N_k.

   (b) Déterminer la loi de N_k.

Réglementation de la première épreuve d’admissibilité

Extrait de l’annexe de l’arrêté du 17 avril 2025 fixant les modalités d'organisation du concours externe du certificat d'aptitude au professorat de l’enseignement du second degré, publié au Journal Officiel du 19 avril 2025

A. – Epreuves d’admissibilité

1° Première épreuve d'admissibilité.

Le sujet est constitué de plusieurs exercices ou problèmes.
L'épreuve permet d'apprécier la maîtrise des connaissances disciplinaires et l'aptitude à les mobiliser. Elle sollicite également les capacités de raisonnement, de démonstration et d'expression écrite du candidat, dans un langage adapté.

Durée : quatre heures.

Coefficient 3.

L'épreuve est notée sur 20. Une note globale égale ou inférieure à 5 est éliminatoire ;