MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Liberté
Égalité
Fraternité

Concours externe BAC + 3 du CAPES

Cafep-Capes

Section Mathématiques

1) Exemple de sujet pour la seconde épreuve d'admissibilité
2) Extrait de l'arrêté du 17 avril 2025

Les épreuves des concours externes du Capes et du Cafep-Capes BAC +3 sont déterminées dans l'arrêté du 17 avril 2025 fixant les modalités d'organisation du concours externe du certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré, publié au Journal Officiel du 19 avril 2025, qui fixe les modalités d'organisation du concours et décrit le schéma des épreuves.

CAPES BAC +3

Sujet 0 / Seconde épreuve d'admissibilité

La durée de l'épreuve est de 4 heures.
Ce sujet est formé de trois parties et comporte deux documents joints.

Partie 1 : Exercices de critique et rédaction mathématique

Pour chacun des exercices ci-après une réponse est fournie.

1. Les réponses fournies sont-elles exactes ? Justifier et préciser les éléments qui permettent de repérer les erreurs.
2. Quelles critiques peut-on faire à la rédaction de chaque réponse proposée ? Justifier.
3. Rédiger avec soin une réponse correcte pour chacun des exercices proposés.

Exercice 1
Résoudre le système (Σ) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \qquad (1)\\ x+y-z & = & 2 \qquad (2)\\ -x+y-z & = & 4 \qquad (3)\end{array}\right.$$

Réponse :
On résout ce système par combinaisons linéaires :

- *on ajoute membre à membre (1) et (2) et on remplace l'équation (1) par l'équation obtenue,*
- *on ajoute membre à membre (3) et (2) et on remplace l'équation (2) par l'équation obtenue,*
- *on soustrait membre à membre (1) et (3) et on remplace l'équation (3) par l'équation obtenue,*
- *on obtient le système (Σ_1) :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y & = & 3\\ 2y-2z & = & 6\\ 2x+2z & = & -3\end{array}\right.$$

- *pour tout t dans $\mathbb{R}$, le triplet $(t, \frac{3}{2}-t, -\frac{3}{2}-t)$ est solution de (Σ_1) donc de (Σ).*

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit (u_n) la suite réelle donnée pour n dans $\mathbb{N}$, par :

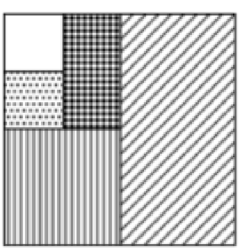
$$u_n = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée.

> ***Réponse :***
>
> *a) On démontre d'abord que la suite (u_n) est croissante. Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$. On a :*
>
> $$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
>
> *et donc*
>
> $$f'(x) = \frac{2-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$
>
> *Or $\frac{1}{(x+1)^2} > 0$. Donc $f(x)$ est croissante et par conséquent (u_n) est croissante.*
> *b) On démontre maintenant que la suite (u_n) est majorée. Comme*
>
> $$\lim u_n = \lim \frac{2n+1}{n+1} = 2$$
>
> *la suite est majorée par sa limite.*

Exercice 3

Soit $Q_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n}$. Démontrer que $\lim_{n \to \infty} Q_n = 1$.

> ***Réponse :***
>
> *Considérons le dessin suivant :*
>
> 
>
> *On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} Q_n = 1$.*

Les questions ci-dessous portent sur le document 1 joint qui aborde les notions de fonctions convexes et d'ensembles convexes. Les résultats du document 1 sont utilisables sans démonstration.

1– Fonctions convexes sur un intervalle

Question 1. On considère la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé. Soit $a < b$, on note A le point du plan de coordonnées (a, a^2), B celui de coordonnées (b, b^2), et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

i) Donner l'allure de la courbe de la fonction f.

ii) Justifier que la corde $[AB]$ est portée par la droite d'équation $y = (a + b)x - ab$.

iii) Soit (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $y = (a + b)x - ab$. Factoriser $f(x) - y$.

iv) En déduire que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Question 2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Formaliser, à l'aide d'une inégalité et des quantificateurs, la propriété suivante : sur l'intervalle I, la courbe représentative de f est en dessous de celle de g.

Question 3. Démontrer la remarque 1.

Question 4. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On suppose f convexe sur I. Démontrer que f est convexe sur tout intervalle contenu dans I.

Question 5. Démontrer que la fonction *valeur absolue* $(x \mapsto |x|)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Question 6. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. La fonction $|f|$ est-elle convexe sur cet intervalle ?

Question 7. Sur quels intervalles de $\mathbb{R}$ la fonction f définie par $f(x) = x^3$ est-elle convexe ?

Question 8. Soit f une fonction convexe définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Question 9. La démonstration de la proposition 2 est incomplète : terminer cette démonstration en traitant le cas $f(a) > f(b)$.

Question 10. Énoncer un analogue de la proposition 2 pour les fonctions concaves. On ne demande pas de le démontrer.

Question 11. Démontrer la deuxième inégalité de la proposition 3.

Question 12. Démontrer que la fonction $x \mapsto -\sin x$ est convexe sur $[0, \pi]$.

Question 13. Démontrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

On illustrera ces inégalités par une figure.

Question 14. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, n un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de I. On suppose que f est convexe sur I.
Démontrer l'inégalité :

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

2– Parties convexes du plan

On note $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé.

Question 15. Pourquoi l'ensemble réduit à un point est-il une partie convexe du plan ?

Question 16. Dessiner l'ensemble du plan $\mathcal{P}$ formé par les points $\mathcal{M}$ de coordonnées (x, y) vérifiant $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Démontrer que cet ensemble n'est pas convexe.

Question 17. La réunion de parties convexes est-elle une partie convexe ?

Question 18. Donner une démonstration de la proposition 5.

Question 19. Soient A et B deux points de $\mathcal{P}$. Démontrer que l'enveloppe convexe de $\{A, B\}$ est le segment $[A, B]$.

Question 20. Soient A, B, C trois points de $\mathcal{P}$ non colinéaires. Quelle est l'enveloppe convexe de $\{A, B, C\}$? Justifier (on pourra utiliser les résultats cités dans le document **1**).

Question 21. Soient D_1 et D_2 deux droites du plan. Quelle est l'enveloppe convexe de $D_1 \cup D_2$? Justifier.

Partie 3 : Questions sur le **document 2** joint au sujet

Les questions ci-dessous portent sur le document sur les courbes de Lorenz (Document 2).

Question A. Comparer les courbes de Lorenz des pays P_1 et P_2 : dans quel pays la répartition des revenus est-elle plus égalitaire ? Justifier la réponse.

Question B. Pour les deux pays, dans les limites de précision imposée par les graphiques, donner une estimation du pourcentage des revenus partagés par le 20 % des personnes les plus riches et ensuite de celui partagé par le 20 % des plus pauvres.

Question C. Décrire la courbe de Lorenz dans le cas où toutes les personnes (d'un pays) perçoivent le même revenu (cas dit d'*égalité parfaite*).

Question D. Décrire la courbe de Lorenz dans le cas où une seule personne perçoit la totalité des revenus (cas dit d'*inégalité totale*).

Question E. Démontrer qu'une courbe de Lorenz représente toujours une fonction croissante et convexe.

Question F. Justifier qu'il existe deux points du plan par lesquels passe toute courbe de Lorenz. Préciser lesquels.

Question G. Déduire de ce qui précède que la courbe de Lorenz est toujours en dessous de la droite d'équation $y = x$.

Document 1
Introduction aux fonctions convexes et parties convexes du plan

La notion de convexité, au carrefour de l'analyse et la géométrie, est très utilisée en modélisation dans de nombreux domaines scientifiques. Pour résoudre des problématiques d'optimisation, elle s'avère un outil très efficace pour garntir l'existence d'extremums comme pour obtenir des inégalités.

Ce document comprend deux parties. Dans la première, on étudie les propriétés des fonctions convexes sur un intervalle. La deuxième, quant à elle, est consacrée aux parties dites convexes du plan et du lien qu'elles peuvent avoir avec les fonctions convexes. Dans ce document $\mathcal{P}$ désigne le plan rapporté à un repère orthonormé.

1–Fonctions convexes sur un intervalle

Dans la suite I désigne, sauf mention expresse du contraire, un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point [1].
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On désigne par C_f sa courbe représentative dans le plan.
Soient $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ deux points distincts de C_f. On rappelle que la droite (AB) est dite *droite sécante* à C_f et que le segment $[AB]$ est la *corde* de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de C_f. On rappelle aussi que le segment d'extrémités A et B peut être décrit comme l'ensemble

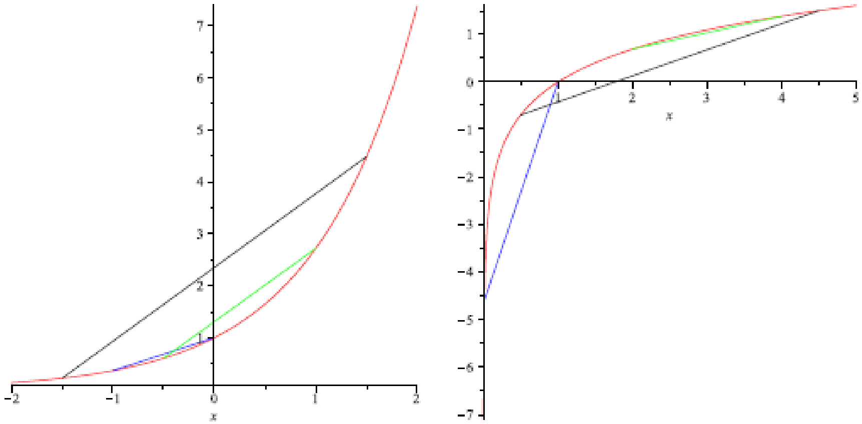
$$\{M \in \mathcal{P}\ ;\ \exists\lambda \in [0,1],\ M = \lambda A + (1-\lambda)B\}\,.$$

Dans cette section après avoir donné quelques définitions et exemples de fonctions convexes, on étudiera quelques propriétés de ces fonctions.

Définition 1 *Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est convexe sur I si tout arc de sa courbe représentative sur I est au-dessous de la corde correspondante.*
La fonction est dite concave si tout arc est au-dessus de la corde correspondante ou encore si $-f$ est convexe.

Exemple 1
Voici ci-après les tracés des courbes représentatives d'une fonction convexe (à gauche du dessin) et d'une autre concave (à droite du dessin).

1. Rappelons qu'une partie non vide I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si pour tout (x, y) dans I^2 avec $x \leq y$, l'ensemble (noté $[x, y]$) des éléments compris entre x et y est dans I.



Dans la suite nous traitons la cas des fonctions convexes. La définition ci-dessus (dans le cas convexe) est équivalente à la définition suivante.

Définition 2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On dit que f est convexe sur I si, quels que soient les réels x, x_1, x_2 dans I tels que $x_1 < x < x_2$, on a :*

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{1}$$

Remarque 1
L'équation de la secante à C_f passant par les points de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ est $y = f(x_1) + \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Remarque 2
Dire que la fonction f est convexe sur l'intervalle I revient à dire que

$$\forall t \in [0,1],\ \forall x_1 \in I,\ \forall x_2 \in I, \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

La proposition suivante précise les positions relatives de la courbe représentative d'une fonction convexe et de ses sécantes.

Proposition 1 *Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe sur I. Soient x_1 et x_2 dans I avec $x_1 < x_2$. La courbe C_f est alors située en dessous de sa sécante sur $[x_1, x_2]$ et au-dessus de sa sécante à l'extérieur de $[x_1, x_2]$.*

Comme conséquence de ce qui précède, on obtient le résultat suivant relatif au calcul des limites des fonctions convexes en l'infini.

Proposition 2 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.*

1. *Si $f(a) < f(b)$ alors f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.*

2. *Si $f(a) > f(b)$ alors f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$.*

Démonstration (incomplète).
On suppose que $f(a) < f(b)$. Comme f est convexe, sur l'intervalle $[a, b]$ sa courbe représentative est au-dessus de sa sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Ce qui se traduit, en particulier, par l'assertion

$$\forall x \geq b, \quad f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Or $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$. Donc le terme de droite tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Le théorème suivant donne une caractérisation des fonctions convexes en termes de « variations des pentes ».

Théorème 1 (Convexité et taux d'accroissement)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Pour a dans I, on désigne par ϕ_a la fonction de $I \setminus \{a\}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe le nombre réel

$$\phi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La fonction f est alors convexe sur I si, et seulement si, ϕ_a est croissante.

Le résultat qui suit, appelé « lemme des trois pentes » ou « lemme des trois cordes » est une conséquence du théorème précédent. Il permet de comparer les pentes de trois cordes « successives » de la courbe représentative d'une fonction convexe (voir la figure ci-dessous).

Proposition 3 *Soit f une fonction convexe définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si u, v et w sont trois nombres réels de I tels que $u < v < w$, alors*

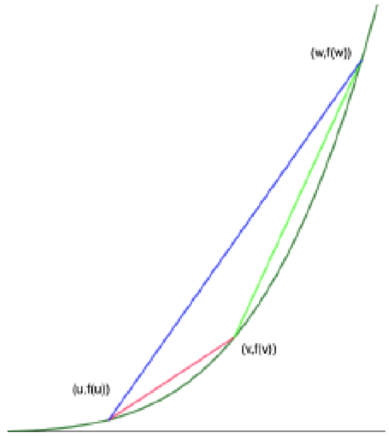
$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}.$$

Démonstration
On utilise ce qui précède en gardant les notations et hypothèses de la proposition. La fonction

$$\phi_u \ : \ x \mapsto \frac{f(x) - f(u)}{x - u}$$

étant croissante sur I privé de u, on a $\phi_u(v) \leq \phi_u(w)$ puisque $v < w$. D'où la première inégalité.

La deuxième inégalité est similaire.



Le théorème suivant fournit des conditions suffisantes pour qu'une fonction assez régulière sur un intervalle I soit convexe.

Théorème 2 (Convexité et dérivation) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Pour que f soit convexe sur l'intervalle I il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(i) *la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et f' est croissante ;*

(ii) *la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle I et f'' est positive.*

Dans ces deux cas, la courbe représentative de f est entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.

Remarque 3
1. La propriété relative aux tangentes se traduit par :

$$\forall (x, x_0) \in I^2, \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Elle s'établit aisément en étudiant les variations de la fonction h définie sur l'intervalle I par :

$$h(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Remarque 4
Si on suppose que la fonction f, de I dans $\mathbb{R}$, est dérivable alors les conditions suffisantes sont également nécessaires. Plus précisément, on montre que la fonction f (supposée dérivable) est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante sur I (ce qui se traduit par le fait que la dérivée seconde est positive lorsque cette dérivée existe). Ce qui équivaut aussi au fait que C_f est située au-dessus de ses tangentes.

Exemples
Les fonctions suivantes sont des fonctions convexes : $x \mapsto (a + x)^r$, avec $r \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$, sur l'intervalle $]-a, +\infty[$; $x \mapsto e^{mx}$, avec $m \in \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto -\ln x$ sur $]0, +\infty[$.

Application à la recherche d'inégalités
Les relations qui décrivent les positions relatives de la courbe représentative et des cordes sont à l'origine de très nombreuses inégalités. On pourra établir, à titre d'exemple :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x \leq e^{-x}$,
3. $\forall x > -1, \quad \ln(1 + x) \leq x$.

Terminons cette partie par un résultat important qui permet d'établir de nombreuses inégalités. Par exemple celle qui permet de comparer les moyennes arithmétique et géométrique.

Théorème 3 (Inégalités de Jensen)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, n un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de I. On suppose que f est convexe sur I.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels dans l'intervalle $[0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. On a alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

2 – Parties convexes du plan

Définition 3 *Soit X une partie non vide de $\mathcal{P}$. On dit que X est convexe si elle est vide ou si, pour tous les points A et B de X, le segment d'extrémités A et B est contenu dans X.*

Exemples de parties convexes

1. L'ensemble vide et le plan sont des parties convexes (du plan).

2. Un point (respectivement une droite) est une partie convexe du plan.

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ et
$$X = \{M(x, y) \in \mathcal{P}\ ;\ y \geq ax + b\}$$
le demi-plan supérieur délimité par la droite d'équation $y = ax + b$. Alors X est convexe.

4. Le disque unité de centre l'origine $\{M(x, y) \in \mathcal{P}\ ;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ est convexe.

5. La couronne $\{M(x, y) \in \mathcal{P}\ ; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ n'est pas convexe.

Proposition 4 *Soit C une partie convexe de $\mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ et $M_1, \ldots, M_n$ des points de C. Alors le point $M = \alpha_1 M_1 + \cdots + \alpha_n M_n$ est dans C.*

Avec les mêmes notations, le point M ci-dessus est dit *combinaison convexe* des points $M_1, \ldots, M_n$. La proposition signifie que les ensembles convexes sont stables par combinaison convexe.

La proposition qui suit permet de définir la plus petite partie convexe contenant une partie non vide du plan.

Proposition 5 *Soit J un ensemble (d'indices) non vide. Soit pour, tout j dans J, C_j une partie convexe du plan. L'ensemble*

$$\bigcap_{j \in J} C_j$$

est une partie convexe du plan.

Définition 4 *Soit X une partie non vide de $\mathcal{P}$. L'intersection de toutes les parties convexes contenant X est alors une partie convexe. C'est la plus petite partie, au sens de l'inclusion, convexe et contenant X. On l'appelle enveloppe convexe de X et on la note $\mathcal{C}(X)$.*

Lien entre fonctions convexes et parties convexes du plan

Dans ce paragraphe on fait le lien entre la convexité des fonctions réelles et des parties convexes du plan réel.

Définition 5 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On appelle épigraphe de f la partie du plan donnée par*

$$\{M(x, y) \in \mathcal{P} \ ; \ y \geq f(x)\}.$$

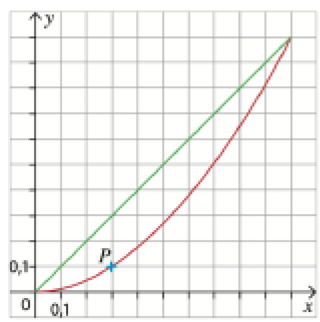
Notation
L'épigraphe de f est noté $\mathcal{E}(f)$.

Proposition 6 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que $\mathcal{E}(f)$ soit une partie convexe du plan.*

Document 2 : Courbes de Lorenz, extrait d'un manuel[2]

La courbe de Lorenz est une représentation des distributions de revenus proposée par l'économiste américain Max O. Lorenz en 1905. Elle sert à décrire les inégalités de revenus. Elle indique la proportion du total des revenus perçus par un pourcentage donné de la population. En abscisses, on indique la proportion cumulée de la population classée par niveau de revenus croissants. En ordonnées, on indique la proportion cumulée des revenus pour une part donnée de la population.

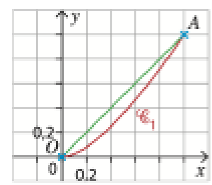
Par exemple, le graphique ci-dessous donne la courbe de Lorenz appliquée à la distribution des revenus disponibles dans un pays pour une année donnée. On peut y lire que les 30 % les moins riches de la population ne perçoivent que 10 % des revenus disponibles (point P de coordonnées (0,3 ; 0,1).

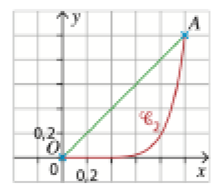


Cette méthode peut être transposée à la répartition de toute donnée statistique, comme par exemple une distribution de richesses au sein d'une population.

Partie A : Deux exemples de courbes de Lorenz

1. On propose deux courbes de Lorenz $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ associées à deux pays P_1 et P_2.





En abscisses, on peut lire la fréquence cumulée de la population classée par niveau de revenus croissants et, en ordonnées, la fréquence cumulée des revenus disponibles pour une part donnée de la population.

Extrait de l'annexe de l'arrêté du 17 avril 2025 fixant les modalités d'organisation du concours externe du certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré, publié au Journal Officiel du 19 avril 2025

A. – Epreuves d'admissibilité

2° Seconde épreuve d'admissibilité.

L'épreuve s'appuie sur plusieurs documents.
Le candidat est invité à analyser, critiquer, le cas échéant, compléter le contenu des documents en vue de répondre à la ou aux questions posées et de résoudre des exercices.
L'épreuve évalue les compétences disciplinaires.

Durée : quatre heures.

Coefficient 2.

L'épreuve est notée sur 20. Une note globale égale ou inférieure à 5 est éliminatoire.