MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Liberté
Égalité
Fraternité

Concours externe BAC + 3 du CAPES

Cafep-Capes

Section Mathématiques

1) Exemple de sujet pour la première épreuve d'admission
2) Extrait de l'arrêté du 17 avril 2025

Les épreuves des concours externes du Capes et du Cafep-Capes BAC +3 sont déterminées dans l'arrêté du 17 avril 2025 fixant les modalités d'organisation du concours externe du certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré, publié au Journal Officiel du 19 avril 2025, qui fixe les modalités d'organisation du concours et décrit le schéma des épreuves.

La candidate ou le candidat devra choisir un des deux exercices proposés dans un sujet donné. Les deux sujets ci-dessous proposent des exemples d'exercices mais ils ne sont pas exhaustifs, ni comme thématiques, ni comme possibles couplages. La candidate ou le candidat présentera au jury la résolution (ou au moins des éléments de résolutions) de l'exercice choisi. Dans l'échange avec le jury on reviendra ensuite sur la résolution de cet exercice et on abordera la notion ou le résultat mis en jeu dans l'exercice. Le jury pourra notamment se saisir de définitions ou de propriétés qui auront été invoquées ou qui auraient pu l'être pour en demander clarification, démonstration, exemplification ou généralisation. Il est attendu que la candidate ou le candidat se détache de ses notes pendant l'échange avec le jury.

Sujet A

Exercice 1

1. Rappeler les définitions de fonction réelle continue, de fonction réelle dérivable et de fonction dérivée sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. Énoncer le théorème des accroissements finis et en donner sa traduction géométrique.
3. Expliciter la conséquence du théorème des accroissements finis sur la relation entre monotonie et signe de la dérivée.
4. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$. Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.
5. On considére la fonction g définie par :

$$g(x) = x^2 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0.$$

.

   (a) Démontrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) On note g' la fonction dérivée de g définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer g'.
   (c) La fonction g' admet-elle une limite finie en 0 ?
6. Si une fonction réelle est dérivable sur un intervalle I, peut-on affirmer que sa fonction derivée est continue sur I ? Justifier.

Notion mise en jeu : théorème des accroissements finis. Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache proposer une démonstration du théorème des accroissements finis.

Exercice 2

1. Rappeler la définition de suite arithmético-géométrique à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. Soit Ω un ensemble fini (un univers fini). Donner la définition de tribu et de probabilité sur Ω.
3. Énoncer la formule des probabilités totales.
4. Démontrer la formule de Bayes en s'appuyant sur la formule des probabilités totales.
5. On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
   On effectue des tirages successifs selon les conditions suivantes.
   Pour le premier tirage :
   — on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie : on note sa couleur et on la remet dans l'urne dont elle provient ;
   — si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 ; sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
   Pour les tirages suivants :
   — on tire une boule au hasard dans l'urne déterminée par le tirage précédent, on note sa couleur et on la remet dans l'urne dont elle provient ;
   — si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 ; sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement ≪ la boule tirée au n-ème tirage est blanche ≫ et on pose $p_n = P(B_n)$.
   (a) Calculer p_1.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de p_n en fonction de n.

Notion mise en jeu : Formule des probabilités totales. Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache proposer une démonstration de la formule des probabilités totales.

Fin du Sujet A

Sujet B

Exercice 1

On admet les notions d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et de dimension et de sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Donner la définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E. Dans quel cas dit-on que la somme est « directe » ?
2. Démontrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.
3. Donner la définition d'un endomorphisme de E.
4. Donner deux définitions équivalentes d'un projecteur de E.
5. Soit P le plan vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$. Soit D la droite vectorielle du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.
   (a) Vérifier que $\mathbb{R}^3$ est la somme directe de P et D.
   (b) Soit p la projection linéaire de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Notion mise en jeu : sommes (directes) de sous-espaces vectoriels. Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache donner la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels (de dimension finie) et démontrer la formule générale de la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels (de dimension finie).

Exercice 2.

Soient E et F deux ensembles finis. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
.

1. Soit f une fonction définie sur l'ensemble E, à valeurs dans l'ensemble F. Rappeler la définition des notions suivantes : f est injective, f est surjective.
2. Soit f une fonction de E dans E : démontrer que l'injectivité de f équivaut à sa surjectivité.
3. Démontrer la formule de Pascal : Pour tout entier n et tout entier $k \leq n$,
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$
4. Déterminer le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.
5. Supposons maintenant que E possède n éléments, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
   (b) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
   (c) Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Notion mise en jeu : fonctions et partitions d'ensembles. Il est attendu notamment que la candidate ou le candidat sache expliciter avec des quantificateurs quand une fonction est ou n'est pas injective (respectivement surjective) et donner des contre-exemples à la question 2. dans le cas d'un ensemble infini.

Fin du Sujet B

Réglementation de la première épreuve d’admission

Extrait de l’annexe de l’arrêté du 17 avril 2025 fixant les modalités d'organisation du concours externe du certificat d'aptitude au professorat de l’enseignement du second degré, publié au Journal Officiel du 19 avril 2025

B. - Epreuves d'admission

1° Première épreuve d'admission.
L'épreuve consiste en un exposé suivi d'un échange avec le jury. Elle vise à apprécier la capacité du candidat à s'exprimer clairement à l'oral, à construire un raisonnement et à interagir avec le jury.

L'exposé porte sur la résolution d'un exercice et la présentation de la notion mise en jeu et des notions connexes. Le candidat s'appuie sur ses connaissances et sur les documents fournis par le jury.

Le candidat a le choix entre deux sujets.

Un tableau est mis à sa disposition lors de l'exposé, lui permettant de soutenir ses propos. Il pourra également disposer de matériels informatiques et de logiciels dont l'utilisation serait susceptible d'illustrer le sujet.

L'échange permet au jury de faire préciser ou d'approfondir les points qu'il juge utiles.

Durée de la préparation : deux heures trente minutes.
Durée de l'épreuve : une heure (exposé : vingt minutes ; échanges : quarante minutes).
Coefficient 5.
L'épreuve est notée sur 20. La note 0 est éliminatoire.