

SESSION 2026

---

**AGRÉGATION**  
Concours interne et CAER

Section  
**MATHÉMATIQUES**

Deuxième épreuve

Durée : 6 heures

---

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

**NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier. Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.**

Tournez la page S.V.P.

## INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie. Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

## AGRÉGATION INTERNE MATHÉMATIQUES

### ► Concours interne de l'Agrégation de l'enseignement public :

Concours	Section/option	Épreuve	Matière
EAI	1300A	102	0530

### ► Concours interne du CAER / Agrégation de l'enseignement privé :

Concours	Section/option	Épreuve	Matière
EAH	1300A	102	0530





## Notations, définitions et énoncés utiles

On désigne par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels, par  $\mathbb{R}$  le corps des nombres réels, par  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes.

Dans tout le problème,  $N$  et  $M$  désignent des entiers naturels non nuls.

On désigne par  $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto (x|y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^N$  et par  $x \in \mathbb{R}^N \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$  la norme associée. Étant donné un sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^N$ , on note alors  $F^\perp = \{x \in \mathbb{R}^N, (x|y) = 0 \text{ pour tout } y \in F\}$ .

On note  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées  $N \times N$  à coefficients réels et  $\mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices à  $M$  lignes et  $N$  colonnes, à coefficients réels. On identifiera les vecteurs de  $\mathbb{R}^N$  avec des matrices de  $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ .

Pour  $A$  une matrice à  $M$  lignes et  $N$  colonnes, on note  $A^\top$  sa matrice transposée, à  $N$  lignes et  $M$  colonnes.

On dit qu'une matrice symétrique  $A$  de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  est non négative si pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , on a  $(Ax|x) \geq 0$ . On dit que  $A$  est positive si pour tout  $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ , on a  $(Ax|x) > 0$ .

Le problème est organisé en 5 parties. Les résultats des questions préliminaires peuvent donner des idées ou des arguments utiles dans les parties ultérieures. Chacune des parties fait appel à des techniques différentes et commence de manière à se familiariser progressivement avec les notions mises en jeu. Les parties 2 et 3 puis 4 et 5 sont liées. Le cas échéant, il peut être fait référence à un résultat établi dans une des parties précédentes.

### Questions préliminaires

1. Soient  $a, b$  deux réels avec  $a > 0$ . Donner l'allure du graphe de  $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{a}{2}x^2 - bx$ .
2. Soient  $a, b$  deux réels avec  $a < b$  et  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$ . On suppose qu'il existe  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $u(x_0) = \min_{a \leq x \leq b} u(x)$ . Montrer que  $u'(x_0) = 0$  et  $u''(x_0) \geq 0$ .
3. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $P$  la matrice de la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^N$  sur  $F$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , on a  $\|Px\| \leq \|x\|$ .
4. Soit une matrice  $C \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\text{Im}(C^\top) = (\text{Ker}(C))^\perp$ .

### Première partie : sur les séries de Fourier

Dans cette partie, on considère une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodique et continue sur  $[-\pi, \pi]$ . On lui associe la série de Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx} \text{ où, pour tout } n \in \mathbb{Z}, \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt. \quad (1)$$

5. Rappeler, sans plus de justification mais précisément, en quel(s) sens la série de Fourier converge vers  $f$  lorsque  $f$  est continue et lorsque  $f$  est de classe  $C^1$ .
6. On considère la fonction définie par  $g(x) = x(\pi - x)$  pour  $x \in [0, \pi]$  et prolongée par parité sur  $[-\pi, 0]$  et par  $2\pi$ -périodicité sur  $\mathbb{R}$ . En donner une représentation graphique sur  $[-2\pi, 2\pi]$  et exprimer sa série de Fourier.

7. Calculer  $\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx$  pour la fonction  $g$  introduite à la question précédente.
8. En déduire les sommes  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

Dans toute la suite de cette partie, on fixe  $r \in \mathbb{N}$  avec  $r \geq 2$  et on suppose que  $f$  est  $2\pi$ -périodique et de classe  $C^r$  sur  $\mathbb{R}$ .

9. Montrer que l'on peut trouver une constante  $M_r > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , on a

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{M_r}{|n|^r}.$$

10. A-t-on alors convergence normale sur  $[-\pi, \pi]$  de la série de Fourier vers  $f$ ? Peut-on dire que la série de Fourier converge uniformément sur  $[-\pi, \pi]$ ? (Ce qui permettrait d'écrire  $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ .)
11. Soit un entier naturel  $L \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . On pose

$$I_L[f] = \frac{1}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} f\left(\frac{2\pi\ell}{L}\right).$$

Montrer que

$$I_L[f] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(nL).$$

12. En déduire que l'on peut trouver une constante  $M'_r > 0$  telle que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - I_L[f] \right| \leq \frac{M'_r}{L^r}.$$

13. Illustrer par un dessin et commenter le résultat obtenu.

## Deuxième partie : étude d'une fonctionnelle quadratique

Soient  $b \in \mathbb{R}^N$  et  $A$  une matrice symétrique de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  qu'on suppose non négative<sup>1</sup>. On pose

$$\mathcal{J} : x \in \mathbb{R}^N \mapsto \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x).$$

14. Montrer que si  $x \in \mathbb{R}^N$  satisfait  $Ax = b$  alors, pour tout  $h \in \mathbb{R}^N$ , on a  $\mathcal{J}(x+h) \geq \mathcal{J}(x)$ .
15. Réciproquement, montrer que si  $\mathcal{J}$  atteint un minimum en  $x \in \mathbb{R}^N$ , alors  $Ax = b$ . (On pourra poser  $h = tk$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{R}^N$ , dans l'expression de  $\mathcal{J}(x+h)$ .)

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que  $A$  est positive. (La définition est rappelée en préambule du sujet.)

1. La définition est rappelée en préambule du sujet.

16. Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , on a  $(Ax|x) \geq \alpha \|x\|^2$ .
17. En déduire que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \mathcal{J}(x) = +\infty$ .
18. Montrer que  $A$  est inversible et que l'on peut trouver  $\beta > 0$  tel que pour tout  $y \in \mathbb{R}^N$ , on a  $(A^{-1}y|y) \geq \beta \|y\|^2$ .
19. En conclure qu'il existe un unique  $x \in \mathbb{R}^N$ , que l'on caractérisera, en lequel  $\mathcal{J}$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}^N$ .

### Troisième partie : un problème connexe

Soient  $A$  une matrice symétrique et positive<sup>2</sup> de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^N$ ,  $C$  une matrice de  $\mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$  et une matrice colonne  $c \in \mathbb{R}^M$ . On note

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N, Cx = c\}.$$

On suppose de plus dans toute cette partie que  $A$  admet au moins deux valeurs propres distinctes.

20. Montrer que  $\inf_{x \neq 0} \frac{(Ax|x)}{\|x\|^2} < \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ .
21. En étudiant comme précédemment  $\mathcal{J}(x+h)$  avec  $x \in C$  et  $h \in \text{Ker}(C)$ , montrer que  $\mathcal{J}$  atteint un minimum sur  $C$  en  $x$  si et seulement si pour tout  $h \in \text{Ker}(C)$ , on a  $(Ax-b|h) = 0$ .
22. En déduire que  $\mathcal{J}$  atteint un minimum sur  $C$  en  $x$  si et seulement si il existe  $p \in \mathbb{R}^M$  tel que

$$\begin{cases} Ax + C^\top p = b, \\ Cx = c. \end{cases} \quad (2)$$

23. Montrer que ce système (2) admet une unique solution  $(x,p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  si et seulement si  $\text{rang}(C^\top) = M$ .
24. Donner un procédé permettant de construire, à partir de la matrice  $C$ , la matrice de la projection orthogonale  $P$  de  $\mathbb{R}^N$  (dans la base canonique) sur  $\text{Ker}(C)$ .
25. On suppose  $c = 0$ . Soient  $(x,p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  solution de (2) et  $P$  la matrice de la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^N$  sur  $\text{Ker}(C)$  (dans la base canonique). Avec  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$  et  $\rho > 0$  donnés, on construit la suite définie par

$$x^{(n+1)} = P(x^{(n)} - \rho(Ax^{(n)} - b)), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer qu'il existe  $\rho_0 > 0$  et  $0 < \kappa_0 < 1$  (qu'on explicitera) tels que si  $0 < \rho < \rho_0$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\|x^{(n+1)} - x\|^2 \leq \kappa_0 \|x^{(n)} - x\|^2.$$

26. Que peut-on en déduire ?

### Quatrième partie : sur un problème aux limites

On va étudier le problème aux limites

$$-(a(x)u'(x))' = f(x) \text{ pour } 0 < x < \pi \text{ et } u(0) = u(\pi) = 0 \quad (3)$$

où  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue,  $a : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$  telle qu'il existe  $a_* > 0$  vérifiant  $a(x) \geq a_* > 0$  pour tout  $x \in [0, \pi]$ . À cette fin, on introduit l'ensemble

$$\mathcal{H}_0 = \{v : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ de classe } C^1 \text{ et telle que } v(0) = v(\pi) = 0\}$$

qu'on munit de la norme

$$\|v\|_{\mathcal{H}_0}^2 = \int_0^\pi (|v(t)|^2 + |v'(t)|^2) dt$$

qui fait de  $\mathcal{H}_0$  un espace préhilbertien réel. On notera  $(u|v)_{\mathcal{H}_0}$  le produit scalaire associé.

---

2. La définition est rappelée en préambule du sujet

27. Montrer que la famille de fonctions  $x \mapsto \sin(x), \dots, x \mapsto \sin(Nx)$  est orthogonale dans  $\mathcal{H}_0$  (pour ce produit scalaire), puis justifier que c'est une famille libre. On notera  $\mathcal{F}_N$  le sous-espace engendré par cette famille.

28. On introduit la matrice  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  dont les coefficients sont donnés par

$$A_{k,\ell} = k\ell \int_0^\pi a(x) \cos(kx) \cos(\ell x) dx. \quad (4)$$

Montrer que  $A$  est symétrique et positive<sup>3</sup>.

29. Montrer qu'on peut trouver une constante réelle  $\gamma > 0$  telle que pour tout élément  $v$  de  $\mathcal{H}_0$  et tout  $x \in [0, \pi]$ , on a

$$|v(x)| \leq \gamma \sqrt{\int_0^\pi |v'(x)|^2 dx}.$$

30. Soit  $\mu \in \mathbb{R}$ . Montrer que le problème de Cauchy

$$-(au')' = f, \quad u(0) = 0, \quad u'(\pi) = \mu$$

admet une unique solution, qu'on notera  $u_\mu$ , définie sur  $[0, \pi]$ .

31. Établir que  $\mu \mapsto u_\mu(\pi)$  est une fonction affine et en déduire que l'on peut trouver une unique valeur  $\mu_* \in \mathbb{R}$  telle que  $u_{\mu_*}(\pi) = 0$  (ce qui définit donc une solution de (3)).

32. Soit  $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  qui est solution de (3). Montrer que pour tout  $\varphi \in \mathcal{H}_0$ , on a

$$\int_0^\pi a(x) u'(x) \varphi'(x) dx = \int_0^\pi f(x) \varphi(x) dx.$$

33. Montrer que

$$(v_1, v_2) \mapsto \mathcal{A}(v_1, v_2) = \int_0^\pi a(x) v_1'(x) v_2'(x) dx$$

définit un produit scalaire sur  $\mathcal{H}_0$ .

34. En déduire que (3) admet une unique solution dans  $\mathcal{H}_0$ .

35. Soient un réel  $K > 0$  et  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $[0, \pi]$  telle que, pour tous  $m \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, \pi]$ ,  $|f_m(x)| \leq K$  et  $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = f(x)$ .

Montrer que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |f_m(x) - f(x)| dx = 0$ .

36. On désigne alors par  $u_m$  et  $u$  les solutions de (3) associées à  $f_m$  et  $f$  respectivement. Montrer que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |u_m'(t) - u'(t)|^2 dt = 0$$

et que  $u_m$  converge vers  $u$  uniformément sur  $[0, \pi]$ .

37. On suppose que  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in [0, \pi]$ . Montrer que la solution  $u$  de (3) associée vérifie  $u(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0, \pi[$ . On suppose ensuite que  $f(x) \geq 0$ . Montrer qu'alors  $u$  est à valeurs non négatives.

38. On définit  $x \mapsto \tilde{u}_N(x) = \sum_{k=1}^N y_k \sin(kx)$  comme le projeté orthogonal sur  $\mathcal{F}_N$  de  $u$ , solution de (3), pour le produit scalaire défini par  $\mathcal{A}$ . Montrer que le vecteur  $y = (y_1, \dots, y_N)$  vérifie  $Ay = b$  où  $A$  est la matrice définie par les relations (4), pour un vecteur  $b \in \mathbb{R}^N$  qu'on précisera.

---

3. La définition est rappelée en préambule du sujet.

39. Soient  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^N$  et  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Exprimer le problème de minimisation de l'application  $y \mapsto \frac{1}{2}(Ay|y) - (b|y)$  sur  $\{y \in \mathbb{R}^N, (w_1|y) = c_1, (w_2|y) = c_2\}$  sous forme matricielle, et justifier qu'il admet une unique solution, moyennant une hypothèse adéquate sur les vecteurs  $w_1$  et  $w_2$ .

## Cinquième partie : un cadre fonctionnel plus élaboré

On introduit maintenant l'ensemble  $H$  des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , éventuellement à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , et  $2\pi$ -périodiques telles que

$$\mathcal{N}(f) = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|^2) |\hat{f}(n)|^2} < +\infty$$

où  $\hat{f}(n)$  est défini par la relation (1) dans la première partie.

40. Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et  $2\pi$ -périodique, alors  $f \in H$ .
41. On admet que pour toute fonction  $f$  continue et  $2\pi$ -périodique et pour  $\epsilon > 0$  il existe un polynôme trigonométrique  $x \mapsto \phi_\epsilon(x) = \sum_{|k| \leq K_\epsilon} \alpha_k e^{ikx}$ , où les coefficients  $\alpha_k$  sont des complexes, tel que  $\|f - \phi_\epsilon\|_{L^\infty([-\pi, \pi])} = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - \phi_\epsilon(x)| \leq \epsilon$ .  
Justifier que la série de Fourier de  $f$  converge vers  $f$  dans  $L^2([-\pi, \pi])$ .
42. Soit  $f \in \mathcal{H}_0$ . On prolonge cette fonction en une fonction impaire sur  $[-\pi, 0]$ , puis par  $2\pi$ -périodicité en une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On peut alors considérer les coefficients de Fourier de ce prolongement<sup>4</sup>, qu'on persiste à noter  $f$ . Montrer que  $\|f\|_{\mathcal{H}_0} = \sqrt{\pi} \mathcal{N}(f)$ .
43. Montrer que  $(H, \mathcal{N})$  est un espace vectoriel normé.
44. Montrer que  $(H, \mathcal{N})$  est un espace de Hilbert.
45. Soit  $f \in H$ . Montrer que l'on peut trouver une constante réelle  $K > 0$  telle que pour tout  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $2\pi$ -périodique, on a

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \psi'(t) dt \right| \leq K \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(t)|^2 dt}.$$

Cette dernière relation permet d'identifier  $f'$  comme une fonction de carré intégrable, qui coïncide avec sa série de Fourier.

46. Montrer que la suite  $(\tilde{u}_N)_{N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  construite dans la partie précédente converge uniformément vers  $u$ , solution de (3).
47. Quel est l'intérêt des résultats de la première partie dans ce contexte?

————— FIN DU SUJET —————

4. On ne demande pas de vérifier la régularité  $C^1$