

SESSION 2026

---

**CAPES A AFFECTATION LOCALE A MAYOTTE  
CONCOURS EXTERNE**

**Section : MATHÉMATIQUES**

**PREMIÈRE COMPOSITION**

Durée : 5 heures

---

*Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.*

*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier. Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.**

## INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours externe du CAPES à affectation locale à Mayotte de l'enseignement public :**

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
JBE	1300E	101	0312



---

**PROBLEME 1 : ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ET ETUDE DE FONCTION**

---

**Partie A : équation différentielle**

On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + 2y = 4x$ .

1. **a.** Vérifier que la fonction  $f_0$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_0(x) = 2x - 1$  est une solution particulière de l'équation (E).
- b.** Démontrer qu'une fonction  $f$  est solution de (E) si, et seulement si, la fonction  $f - f_0$  est solution de l'équation différentielle  $y' = -2y$ .
- c.** En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions  $f_k$ , définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f_k(x) = ke^{-2x} + 2x - 1$ , où  $k \in \mathbb{R}$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , on note  $C_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un repère donné.

**2. Vrai-Faux.**

*Préciser si chacune des quatre propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.*

*Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

- a.** Pour tout réel  $k$ , la droite d'équation  $y = 2x - 1$  est asymptote oblique à la courbe  $C_k$ .
- b.** Pour tout réel  $k$  non nul, la courbe  $C_k$  ne possède pas de point d'inflexion.
- c.** Pour tout réel  $k > 0$ , la courbe  $C_k$  admet un sommet qui appartient à la droite d'équation  $y = 2x + 1$ .
- d.** Il existe une valeur du réel  $k$  tel que  $C_k$  passe par  $A(0, 2)$ .

## Partie B : étude d'une fonction solution de (E)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3e^{-2x} + 2x - 1$ .

1.
  - a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - b. Justifier que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \frac{3+2xe^{2x}}{e^{2x}} - 1$   
En déduire la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .
  - c. Établir le tableau de variations de  $f$  dans  $\mathbb{R}$ . On fera apparaître les limites et les valeurs particulières.
2. **Étude de l'équation  $f(x) = 8$ .**
  - a. Justifier que l'équation  $f(x) = 8$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[1 ; 10]$ .
  - b. Le script ci-dessous, rédigé en langage Python, définit une fonction *solution*.

```

from math import exp
def f(x):
    return 3*exp(-2*x)+2*x-1

def solution(a,b):
    while b-a>0.1:
        m=(a+b)/2
        if f(m)<8:
            a=m
        else:
            b=m
    return a,b
  
```

Recopier et compléter le tableau ci-dessous en exécutant la fonction  $solution(4, 5)$  pas à pas :

$a$	4				
$b$	5				
$b - a$					
$m$					
Condition					
$f(m) < 8$					

- c. Que permet de déterminer la fonction  $solution(a, b)$  dans le contexte de l'exercice ?
3. Déterminer la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, 2]$ .

---

**PROBLEME 2 : NOMBRES COMPLEXES**

---

Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , chaque point et chaque vecteur peut être identifié par ses coordonnées ou par son affixe dans  $\mathbb{C}$ .

**Préliminaires**

1. Soit un vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $z$  et un vecteur  $\vec{v}$  d'affixe  $i \times z$   
Démontrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.
2. Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  d'affixe  $z = x + iy$  et  $\vec{v}$  d'affixe  $z' = x' + iy'$ , où  $x, x', y, y'$  sont des nombres réels.  
Démontrer que :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re}(z \times \bar{z}')$
3. Soit  $z \in \mathbb{C}$  un nombre complexe non nul.  
Démontrer que  $z$  est un imaginaire pur si et seulement si  $-\frac{1}{z}$  imaginaire pur.
4. Exprimer chacune des deux aires suivantes en fonction de  $R$  et  $\alpha$ , où  $\alpha$  est une mesure de l'angle en radians comprise entre 0 et  $2\pi$ .

**Les parties A et B sont indépendantes**

Dans le repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C$  et  $F$  d'affixes respectives :

$$a = i, \quad b = -1 + i, \quad c = 3i, \quad f = -1.$$

**Partie A : construction d'un œuf**

On considère les points  $D, G$  et  $H$  d'affixes respectives  $d, g$  et  $h$ , vérifiant :

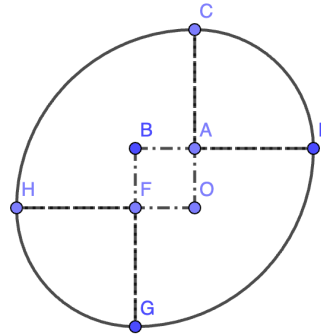
$$\begin{aligned} z_{\overline{AD}} &= -iz_{\overline{AC}} \\ z_{\overline{BG}} &= -iz_{\overline{BD}} \\ z_{\overline{OH}} &= iz_{\overline{OC}} \end{aligned}$$

1. Prouver que  $d = 2 + i$ . Déterminer les affixes  $g$  et  $h$ .

2. Démontrer que le quadrilatère  $CDGH$  est un rectangle.
3. On trace les quarts de cercle suivants :

- de centre  $A$ , reliant  $C$  à  $D$  ;
- de centre  $B$ , reliant  $D$  à  $G$  ;
- de centre  $F$ , reliant  $G$  à  $H$  ;
- de centre  $O$ , reliant  $H$  à  $C$ .

Ces quarts de cercles semblent former un œuf.



Déterminer l'aire de l'œuf.

### Partie B : un rectangle

Soit  $M$  un point, distinct de  $O$  et  $A$ , d'affixe  $m$ .

On considère les points  $N$ ,  $P$  et  $Q$  d'affixes respectives  $n$ ,  $p$  et  $q$ , vérifiant :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AN}} &= -iz_{\overrightarrow{AM}} \\ z_{\overrightarrow{BP}} &= -iz_{\overrightarrow{BN}} \\ z_{\overrightarrow{OQ}} &= iz_{\overrightarrow{OM}} \end{aligned}$$

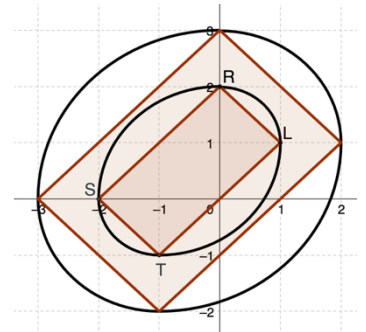
1. Prouver que  $n = -1 + i - im$ , que  $p = -1 - m + i$  et que  $q = im$ .
2. Démontrer que le quadrilatère  $MNPQ$  est un parallélogramme.
3. a. Démontrer que  $\arg\left(\frac{m-n}{p-n}\right) = (\overrightarrow{NP}; \overrightarrow{NM}) [2\pi]$ 
  - b. En déduire que le quadrilatère  $MNPQ$  est un rectangle si et seulement si  $\frac{m-n}{p-n}$  est un imaginaire pur.
  - c. Démontrer l'égalité :  $\frac{m-n}{p-n} = -i + \frac{1}{-m}$ .
  - d. En utilisant la question 3 de la partie *Préliminaires*, déterminer l'ensemble  $(\Delta)$  des points  $M$  tels que le quadrilatère  $MNPQ$  soit un rectangle.

### Partie C : un œuf dans un œuf

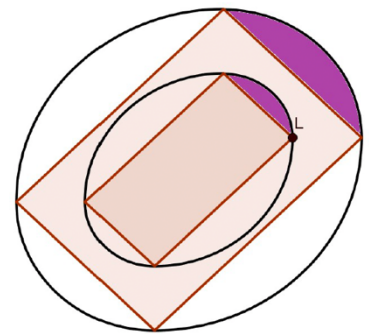
On souhaite placer un œuf dans un œuf, comme dans la figure ci-contre, en utilisant le même procédé que dans la partie A.

On a placé le point  $L$  de coordonnées  $(1;1)$ .

1. Grâce à la représentation graphique ci-contre, donner les affixes des points  $L$  ;  $R$  ;  $S$  et  $T$ .



2. a. Déterminer les aires des deux parties foncées représentées ci-contre (entre le côté du rectangle et l'arc de cercle).  
b. Donner le rapport de ces aires.



---

### PROBLEME 3 : ARITHMETIQUE

---

1. a. Donner la liste des entiers naturels qui divisent 210.  
b. Déterminer de deux façons différentes le plus grand diviseur commun de 175 et 210.
2. Un fleuriste reçoit d'un fournisseur un lot de 210 tulipes. Il souhaite faire des bouquets de 18 tulipes.  
Déterminer s'il est possible de répartir l'intégralité des fleurs.
3. Un deuxième fournisseur livre 175 œillets.  
a) Déterminer si le fleuriste peut confectionner des bouquets tous identiques en utilisant tous les œillets et toutes les tulipes.  
b) Combien peut-il ainsi en constituer le plus possible ?
4. Le premier fournisseur passe tous les 22 jours et il est venu il y a 3 jours. Le second fournisseur passe tous les 16 jours et il est passé hier. Le fleuriste souhaite savoir combien de fois les deux fournisseurs passeront le même jour durant les 365 jours à venir.  
a. Justifier que répondre au problème posé revient à résoudre l'équation diophantienne (E) :  $11x - 8y = 1$ , où  $x$  et  $y$  sont deux entiers relatifs.

- b. Trouver une solution particulière  $(x_0 ; y_0)$  de (E).
- c. Montrer que si  $(x ; y)$  est solution de (E) alors il existe un entier relatif  $k$  tel que  $x - x_0 = 8k$  et  $y - y_0 = 11k$ .
- d. En déduire les couples  $(x ; y)$  solutions de (E).
- e. Déterminer combien de fois les deux fournisseurs passeront le même jour durant les 365 jours à venir.

---

**PROBLEME 4 : CONFIGURATION DU PLAN ET VECTEURS**

---

Soit  $ABC$  un triangle non aplati. Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels avec  $a > 1$  et  $b > 1$ .

On définit les points  $I$  et  $J$  par  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{b}\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AC}$ .

1) a. Justifier que  $\overrightarrow{CJ} = \frac{a-1}{a}\overrightarrow{CA}$ .

b. En déduire que  $\overrightarrow{BJ} = \frac{a-1}{a}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$ .

c. De la même façon, exprimer  $\overrightarrow{AI}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{CA}$  et  $\overrightarrow{CB}$ .

2) a. Montrer qu'il existe un unique point  $K$  vérifiant

$$(a - 1)\overrightarrow{KA} + (b - 1)\overrightarrow{KB} = \vec{0}.$$

b. En déduire que ce point est sur le segment  $[AB]$ .

c. Justifier que  $(a + b - 2)\overrightarrow{CK} = (a - 1)\overrightarrow{CA} + (b - 1)\overrightarrow{CB}$ .

3) Soit  $G$  le point défini par  $\overrightarrow{KG} = \frac{1}{a+b-1}\overrightarrow{KC}$ .

a. Démontrer que  $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{a+b-1}((a - 1)\overrightarrow{CA} + (b - 1)\overrightarrow{CB})$ .

b. Exprimer  $\overrightarrow{BG}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{CA}$  et  $\overrightarrow{CB}$ .

c. En déduire que les points  $B, G$  et  $J$  sont alignés.

d. On admet que  $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b-1}\overrightarrow{AI}$ .

Que peut-on dire du point  $G$  ? Justifier.

4) Étude de cas particuliers

a. Si  $a = b$ , déterminer la position du point  $K$ .

b. Si  $a = b = 2$ , déterminer la position des points  $I$  et  $J$ . Que représente dans ce cas le point  $G$  ?