MINISTÈRES
ÉDUCATION
JEUNESSE
SPORTS
ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR
RECHERCHE
Liberté
Égalité
Fraternité

JBE MAT 2

SESSION 2026

CAPES A AFFECTATION LOCALE A MAYOTTE
CONCOURS EXTERNE
CONCOURS INTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours externe du CAPES à affectation locale à Mayotte de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
JBE	1300E	102	0313

► **Concours interne du CAPES à affectation locale à Mayotte de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
JBI	1300E	101	0723

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 0665 – D'après documents fournis

PROBLEME 1 : VRAI – FAUX

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Proposition :** si chaque année le prix d'un article augmente de 19%, alors le prix de cet article aura plus que doublé en 4 ans.
2. **Proposition :** l'écart-type de la série -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 est égal à 4.
3. Une association emploie trois salariés.
   Leur salaire moyen est de 1 758 €, leur salaire médian est de 1 925 €, et l'étendue des salaires est de 900 €.
   L'association recrute une quatrième personne, ce qui fait passer le salaire moyen à 1 931,50 €.

   Proposition : le salaire de la 4ème personne est inférieur à 2450 euros.
4. **Proposition** : pour tout réel $x \geq 1$, $\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2 = 2x$.
5. **Proposition :** les réels x vérifiant $4 \leq x^2 \leq 9$ sont les réels de l'intervalle $[2; 3]$.
6. Soit a et b deux nombres réels non nuls.

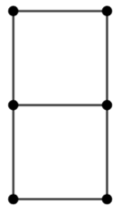
   Proposition : Si $a \geq 2b$, alors $a^2 \geq 2ab$.
7. **Proposition :** si un entier a est divisible par les entiers b et c, alors il est divisible par le produit bc.
8. **Proposition :** si n est un entier impair, alors $n^2 \equiv 1$ modulo 4.
9. On lance un dé équilibré à six faces numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.
   Soit A l'évènement « obtenir 1, 2, 3 ou 4 » et B l'évènement « obtenir 4 ou 5 »

   Proposition : A et B sont indépendants.
10. Soit A et B deux événements.

    Proposition : si $P(A) + P(B) = 1$, alors $A \cup B$ est un événement certain.
11. La variable aléatoire Y suit une loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart type σ inconnu.

    Proposition : si $P(-6 < Y < 6) = 0{,}86$ alors $P(Y < 6) = 0{,}93$

12. Un caractère d'écriture en braille est formé de trous obtenus en piquant une feuille de papier à travers au moins l'un des 6 points de la grille ci-contre :



Proposition : on peut créer exactement 15 caractères ayant 4 trous.

13. **Proposition :** on peut construire un rectangle d'aire 7 cm^2 et de périmètre 12,5 cm.

14. **Proposition :** soit p un nombre réel. L'équation $x^2 + (p + 1)x + 1 = 0$, d'inconnue x n'admet pas de solution réelle si et seulement $p \in]-3; 1[$.

Dans un repère orthonormé, les coordonnées des points A et B sont respectivement $(3; 7)$ et $(-1; 1)$.

15. **Proposition :** une équation de la droite (AB) est $3x - 2y + 5 = 0$.

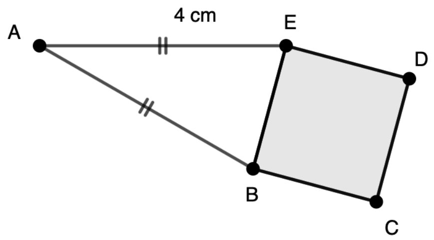
16. **Proposition :** une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 4 = 0.$$

17. **Proposition :** sur $[0; +\infty[$, la courbe d'équation $y = \frac{x^2}{x+1}$ est au-dessus de la parabole $y = x^2$.

18. **Proposition :** l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet une unique solution sur $[-1; 0]$.

19. Sur la figure ci-dessous, la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAE}$ est $\frac{\pi}{6}$.



Proposition : l'aire du domaine formé par le triangle isocèle EAB et le carré $BCDE$ est supérieure à 8 cm^2.

20. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit A le point d'affixe $14 - 6i$ et B le point d'affixe $4 - 10i$

Proposition : le triangle OAB est un triangle rectangle isocèle.

PROBLEME 2 : FONCTION NUMERIQUE ET CALCUL INTEGRAL

Partie A : étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2\left(\frac{3}{2} - \ln(x)\right) \; si \; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

3. a. Démontrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

b. Démontrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$. Interpréter graphiquement.

4. a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = 2x(1 - \ln(x))$.

b. Établir le tableau de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$. On fera apparaître les limites et les valeurs particulières.

c. Déterminer l'équation réduite de la tangente (Δ) à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

5. On admet que pour tout réel $x > 0$, on a : $f''(x) = -2\ln(x)$.

a. Étudier la convexité de f sur $]0;+\infty[$.

b. Justifier que la courbe C_f admet un point d'inflexion ayant pour abscisse 1 et en donner une interprétation graphique.

6. Représenter sur la copie la droite (Δ) ainsi que l'allure de la courbe C_f en tenant compte des résultats des questions précédentes.

Partie B : calcul d'une aire.

Pour tout $\lambda \in]0;\ e]$, on pose $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{e^{\frac{3}{2}}} f(x)\mathrm{d}x$.

1. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$I(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3}\ln(\lambda) - \frac{11}{18}\lambda^3 + \frac{1}{9}e^{\frac{9}{2}}.$$

2. Déterminer sans justifier un domaine du plan ayant pour aire $I(\lambda)$ en unités d'aire.

3. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to 0} I(\lambda)$. Interpréter ce résultat en termes d'aire et hachurer le domaine correspondant sur le graphique de la partie A, question 6.

PROBLEME 3 : PROBABILITES CONDITIONNELLES ET SUITES NUMERIQUES

Partie A : probabilités conditionnelles.

Lors d'une séance d'entraînement, une joueuse de basketball s'entraîne à marquer des paniers.

On admet que la probabilité de réussir son 1er tir est de $0{,}7$. On admet de plus que :

- Lorsqu'elle a réussi un tir, la probabilité de réussir le tir suivant devient alors de $0{,}9$;
- Lorsqu'elle a raté un tir, la probabilité de réussir le tir suivant n'est plus alors que de $0{,}4$.

On note A_n l'événement « la joueuse réussit le n-ième tir » et $\overline{A_n}$ son événement contraire.

On note enfin $p_n = P(A_n)$. Ainsi $p_1 = 0{,}7$.

1. Démontrer que $p_2 = 0{,}75$
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $p_{n+1} = 0{,}5\, p_n + 0{,}4$.

Partie B : étude d'une suite.

Dans cette partie, il s'agit d'étudier la suite (p_n) définie par $p_1 = 0{,}7$ et $p_{n+1} = 0{,}5\, p_n + 0{,}4$ pour tout entier naturel n non nul.

1. a. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :
$$0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0{,}8.$$
   b. Déduire de la question précédente que la suite (p_n) est convergente.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = p_n - 0{,}8$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_1.

   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis que pour tout entier naturel n non nul :
$$p_n = 0{,}8 - 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1}.$$
   c. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de la partie A.

3. Le script ci-contre, écrit en langage Python, est destiné à déterminer le nombre minimal n de tirs pour que la probabilité P que la joueuse réussisse le n-ième tir dépasse le seuil S.

   a. Recopier ce script sur la copie et compléter les pointillés.

   b. On exécute le script en prenant pour S la valeur $0{,}799$.
   Pourquoi est-on sûr que le programme s'arrête ?

   c. Donner sans justifier la valeur retournée par seuil($0{,}799$).

```
def seuil(S):
    n=1
    P=0.7
    while ..... :
        n=....
        P=....
    return n
```

PROBLEME 4 : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

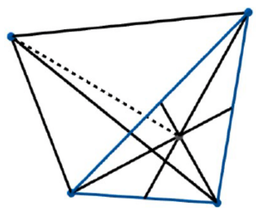


Figure 1
Médiane d'un tétraèdre

On utilisera les définitions suivantes :

- Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane.
- Un tétraèdre est de type 1 si ses faces ont la même aire.
- Un tétraèdre est de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.
- Un tétraèdre est de type 3 si chaque médiane est orthogonale à la face opposée.
- Enfin, un tétraèdre est de type 4, ou régulier, si ses six arêtes ont la même longueur.

Les deux parties suivantes sont indépendantes

Partie A : étude d'un tétraèdre

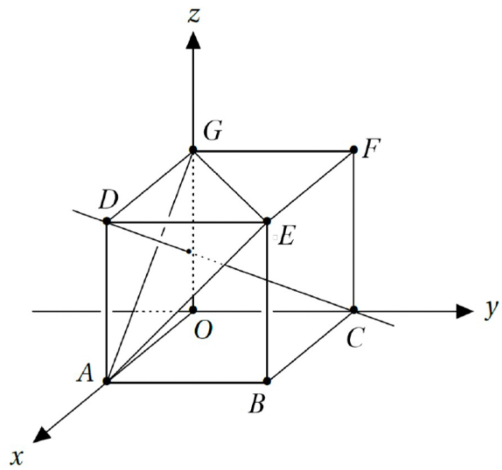
On considère les points suivants de l'espace :

$O(0;0;0), A(1;0;0), B(1;1;0), C(0;1;0), D(1;0;1),$

$E(1;1;1), F(0;1;1),\ G(0;0;1)$

On admet que la droite (DC) est orthogonale au plan (AGE).

On note I le point d'intersection de la droite (DC) et du plan (AGE).



1. Déterminer une équation du plan (AGE).
2. Déterminer une équation paramétrique de la droite (DC).
3. Déterminer les coordonnées du point I.
4. Démontrer que la droite (DC) est une médiane de la face (AGE) dans le tétraèdre $ADGE$.
5. Justifier si le tétraèdre $AGED$ est :
   a. de type 1.
   b. de type 2.
   c. de type 3.
   d. de type 4.

Partie B : construction d'un tétraèdre de type 2

On considère les points suivants de l'espace :

$$A(0;0;1), B(1;b;0), C(1;c;0), O(0;0;0)$$

1. Trouver une relation entre *b* et *c* pour que le tétraèdre $OABC$ soit de type 2.
2. Donner un exemple de tétraèdre de type 2 grâce à cette relation.