MINISTÈRES
ÉDUCATION
JEUNESSE
SPORTS
ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR
RECHERCHE
Liberté
Égalité
Fraternité

LFE MPC 1

SESSION 2026

Δ

CAPLP
CONCOURS EXTERNE et CAFEP
(BAC + 3)

SECTION : MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE-CHIMIE

ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ 1
ÉPREUVE DISCIPLINAIRE DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve permet d'apprécier la connaissance des notions de mathématiques et l'aptitude à les mobiliser pour résoudre des problèmes. Elle sollicite également les capacités de raisonnement, de démonstration et d'expression écrite du candidat.

Durée : 3 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours externe du CAPLP de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
LFE	1315J	101	4061

► **Concours externe du CAFEP/CAPLP de l'enseignement privé** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
LFF	1315J	101	4061

ÉPREUVE DISCIPLINAIRE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Le sujet est structuré en trois parties :

– **la partie 1, sur 10 points, est à traiter par tous les candidats ;** elle comporte un vrai-faux avec justification et un exercice d'analyse qui aborde le thème de séries remarquables. Aucune connaissance sur les séries n'est requise pour cette partie**.**

– **la partie 2, sur 10 points, est à traiter uniquement par les candidats ayant choisi la discipline majeure mathématiques à l'inscription.**
Vous devez débuter la partie 2 de l'épreuve en haut de la page suivante en précisant son titre.
Aucun point ne sera attribué sur cette partie aux candidats relevant de la discipline majeure physique-chimie. Elle comporte un exercice d'algèbre linéaire abordant la diagonalisabilité d'une matrice carrée et un exercice d'analyse portant sur le recollement de solutions d'une équation différentielle du premier ordre. Les deux exercices sont indépendants.

– **la partie 3, sur 10 points, est à traiter uniquement par les candidats ayant choisi la discipline majeure physique-chimie à l'inscription.**
Vous devez débuter la partie 3 de l'épreuve en haut de la page suivante en précisant son titre.
Aucun point ne sera attribué sur cette partie aux candidats relevant de la discipline majeure mathématiques. Elle comporte un exercice d'algèbre linéaire appliqué à la détermination de suites définies de manière récurrente et un exercice d'analyse autour du nombre e abordant les fonctions et les suites. Les deux exercices sont indépendants.

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 0783 – D'après documents fournis

PARTIE 1 COMMUNE À TOUS LES CANDIDATS (10 points)

Exercice 1 - VRAI-FAUX

Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On a $\int_0^1 x^2\, \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}$.

2. Un argument de $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$.

3. Toute solution sur $\boldsymbol{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$ tend vers 0 en $-\infty$.

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. Soit une série statistique à une variable prenant n valeurs réelles et de moyenne m ; si $n - 1$ d'entre elles forment une série statistique de moyenne m alors la n-ième est égale à m.
5. La courbe de la fonction définie pour tout $x \in \boldsymbol{R}$ par $f\,(x) = \mathrm{e}^{2|x|} - 1$ admet, au point d'abscisse -1, une tangente d'équation $y = (2\mathrm{e}^2)x + (3\mathrm{e}^2 - 1)$.

6. On lance simultanément deux dés à 6 faces, numérotées de 1 à 6, équilibrés et on considère la somme obtenue en ajoutant les deux nombres figurant sur les faces supérieures ; la probabilité que cette somme soit inférieure ou égale à 9 est égale à 0,75.

7. Le prix d'installation de panneaux photovoltaïques a augmenté de 10 % au 1er janvier 2023, de 5 % aux 1ers janvier 2024 et 2025 puis enfin de 10 % à nouveau au 1er janvier 2026. Le taux moyen d'évolution sur ces quatre années est 7,5 %.

8. Soit n un entier naturel non nul, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

9. Si $A \in M_2(\boldsymbol{R})$ est telle que A^2 est nulle alors A est nulle.

10. La suite $(u_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = -\,2u_n + 1$, converge.

Exercice 2 - Quelques séries remarquables

Soit $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite réelle. On pose, pour tout entier $n \in \boldsymbol{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

PARTIE A - ÉTUDES D'EXEMPLES

On se propose d'étudier la convergence de la suite $(S_n)_{n\in N^*}$ pour quelques suites particulières $(u_n)_{n\in\boldsymbol{N}^*}$.

1. Dans cette question uniquement, on pose $u_k=\frac{1}{k}$ pour tout $k \in \boldsymbol{N}^*$.
   a. Soit $n \geq 1$. Donner, pour tout entier k vérifiant $n+1 \leq k \leq 2n$, un encadrement de $\frac{1}{k}$.
   b. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
   c. Si $(S_n)_{n\in\boldsymbol{N}^*}$ converge, quelle est la limite de $(S_{2n} - S_n)_{n\in\boldsymbol{N}^*}$? Conclure.

2. Dans cette question uniquement, on pose $u_k=\frac{1}{k^2}$ pour tout $k \in \boldsymbol{N}^*$.
   a. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k^2}$.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ puis que la suite $(S_n)_{n\in\boldsymbol{N}^*}$ est majorée.
   c. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\boldsymbol{N}^*}$ converge.

3. Dans cette question uniquement, on pose $u_k=q^k$ pour tout $k \in \boldsymbol{N}^*$ où q est un nombre réel.
   a. Pour tout $n \in \boldsymbol{N}^*$, calculer S_n suivant les valeurs de q.
   b. Calculer, si elle existe, la limite de $(S_n)_{n\in\boldsymbol{N}^*}$ suivant les valeurs de q.

PARTIE B - PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

4.
   a. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Exprimer $S_n - S_{n-1}$ en fonction de u_n.
   b. En déduire que la condition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ est nécessaire pour la convergence de $(S_n)_{n\in\boldsymbol{N}^*}$. Est-elle suffisante ? Justifier.

On suppose par la suite que $(u_n)_{n\in N^*}$ est une suite à termes strictement positifs et qu'il existe un réel $0 \leq q \leq 1$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = q$.

5. Dans cette question, on suppose que $0 \leq q < 1$
   a. Montrer que $0 \leq q < \frac{q+1}{2} < 1$.
   b. Soit (v_n) une suite réelle. Rappeler la définition à l'aide de quantificateurs de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = q$.

c. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout $k \geq N$, $0 \leq \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{q+1}{2}$.

(La détermination de N n'est pas attendue).

d. Montrer, par récurrence sur k, que pour tout $k \geq N$, on a $u_k \leq u_N \left(\frac{q+1}{2}\right)^{k-N}$.

e. En déduire une majoration indépendante de n, pour tout $n \geq N$, de

$$\sum_{k=N}^{n} u_k$$

f. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in \boldsymbol{N}^*}$ est convergente.

On pourra remarquer que, lorsque $N > 1$, on peut écrire pour tout $n \geq 2$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k$$

6. Dans cette question, on suppose que $q = 1$. Que peut-on dire quant à la convergence de la suite $(S_n)_{n\in \boldsymbol{N}^*}$? *on pourra considérer les suites étudiées en* ***partie* A.1 et *partie* A.2***.*

PARTIE 2 –MAJEURE MATHÉMATIQUES (10 points)

(à traiter uniquement par les candidats ayant choisi la discipline majeure mathématiques)

Exercice 3 - Étude de la diagonalisabilité d'une matrice 3x3

Soit $M=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ une matrice et ϕ l'endomorphisme de $\boldsymbol{R}^3$ dont la matrice est M dans la base canonique de $\boldsymbol{R}^3$.

1. Déterminer le noyau de ϕ. L'endomorphisme ϕ est-il bijectif ?

2. Calculer le déterminant de M .

3. Justifier que la matrice M est inversible. Montrer que

$$M^{-1}=-\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

4. On définit la trace d'une matrice carrée $A=\left(a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq 3}$ par :

$$\text{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}$$

   a. Montrer que pour toutes matrices $A, B \in M_3(\boldsymbol{R})$, on a

$$\text{tr}(AB)=\text{tr}(BA) \text{ et } \text{tr}(A+B)=\text{tr}(A)+\text{tr}(B).$$

   b. Montrer que, pour toutes matrices $P \in \text{G}L_3(\boldsymbol{R})$ et $A \in M_3(\boldsymbol{R})$, on a

$$\text{tr}(P^{-1}AP)= \text{tr}(A).$$

5. Calculer tr (M).

6. Justifier que le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre M associé à une valeur propre λ_1 à déterminer puis déterminer la dimension du sous-espace propre associé à λ_1 .

7. On suppose que M est diagonalisable. En utilisant les trace et déterminant de M, obtenir une somme et un produit des valeurs propres possibles de M ; quelles seraient les valeurs propres possibles de M.

8. Justifier que M est diagonalisable dans $\boldsymbol{R}$.

Exercice 4 - Un problème de recollement

On considère la fonction f définie sur $\boldsymbol{R}$ par $f(x)=\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0)=0$.

PARTIE A - ÉTUDE DE LA FONCTION f

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f sur $\boldsymbol{R}_+^*$ et $\boldsymbol{R}_-^*$, puis à gauche et à droite en 0.

2. Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bords de l'ensemble de définition. Préciser la nature des branches infinies de la courbe représentative de f.

PARTIE B - UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) : x^2y'+(2x-1)y=0$ sur $\boldsymbol{R}$ dont les solutions sont les fonctions dérivables sur $\boldsymbol{R}$ vérifiant la relation donnée par (E).

3. Résoudre (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et sur l'intervalle $]-\infty,0[$.

4. Supposons que y est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ prolongée par continuité sur $\boldsymbol{R}$.
   a. Que vaut $y(0)$?

   b. Justifier que si y est une solution de (E) sur $\boldsymbol{R}$, il existe $k \in \boldsymbol{R}$ tel que
   $$y: x \longmapsto 0 \text{ si } x \leq 0$$
   $$\text{et } y: x \longmapsto \frac{k}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} \text{ si } x > 0.$$

   c. Montrer que les solutions définies en 4.b sont dérivables sur $\boldsymbol{R}$ et en déduire l'ensemble des fonctions solutions de (E) définies et dérivables sur $\boldsymbol{R}$.

PARTIE C - ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

5. Exprimer, pour tout réel non nul x, y' en fonction de y et x. Montrer que les solutions de (E) sur $\boldsymbol{R}$ sont de classe C^2.

6. Justifier que les solutions de (E) sur $\boldsymbol{R}$ admettent un développement limité à l'ordre 2 en 0 de partie régulière nulle.

7. Peut-on généraliser le résultat précédent à tout ordre $n \in \boldsymbol{N}$?

PARTIE 3 MINEURE MATHÉMATIQUES (10 points)

(à traiter uniquement par les candidats ayant choisi la discipline majeure physique-chimie)

Exercice 3 - Étude d'une matrice 3x3 et application à la détermination de suites récurrentes

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les puissances successives de A par : $A^0 = I_3$ où I_3 est la matrice unité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, $A^{n+1} = A^n \times A$.

1. Déterminer l'ensemble E_2 des matrices colonnes à coefficients réels $M=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telles que $AM = 2M$.

2. Déterminer l'ensemble E_4 des matrices colonnes à coefficients réels $M=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telles que $AM = 4M$.

3. On considère alors la matrice $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et que $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Calculer la matrice $D=P^{-1}AP$.

5. En déduire, que pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

6. Montrer que, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, $A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+4^n & 0 & 2^n-4^n \\ 2(4^n-2^n) & 2\times 4^n & 2(4^n-2^n) \\ 2^n-4^n & 0 & 2^n+4^n \end{pmatrix}$.

7. On considère les suites $(u_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$, $(v_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ et $(w_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ définies de manière récurrente par $u_0=0$, $v_0=1$, $w_0=-1$ et, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$,
$$\begin{cases} u_{n+1}=3u_n - w_n \\ v_{n+1}=2u_n+4v_n+2w_n \\ w_{n+1}=-u_n+3w_n \end{cases}$$
et on pose, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
Exprimer, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, X_{n+1} en fonction de X_n et A.

8. En déduire que, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, $X_n= A^n X_0$.

9. Utiliser ce qui précède pour déterminer l'expression des suites $(u_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$, $(v_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ et $(w_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ en fonction de n.

Exercice 4 - Autour du nombre e

PARTIE A – CALCUL INTÉGRAL

1. On considère la fonction f définie sur $\boldsymbol{R}_+^*$ par $f(t) = \frac{1}{t(t+1)^2}$.

   a. Justifier que la fonction f est continue sur $\boldsymbol{R}_+^*$.

   b. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que pour tout $t \in \boldsymbol{R}_+^*$,

   $$f(t) = \frac{a}{(t+1)^2} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t}.$$

2. On considère la fonction g définie sur $\boldsymbol{R}_+^*$ par $g(t) = -\frac{1}{t^2(t+1)}$.

   a. Montrer que, pour tout $t \in \boldsymbol{R}_+^*$, $g(t) - f(t) = -\frac{2t+1}{(t^2+t)^2}$.

   b. Vérifier que la fonction h définie pour tout $t \in R_+^*$ par $h(t) = \frac{1}{t^2+t}$ est une primitive de la fonction $g - f$ sur R_+^*.

PARTIE B – LIMITES DE FONCTIONS ET INÉGALITÉS

3. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 1$.
   On définit, pour tout $x > n$, $F_n(x) = \int_n^x f(t)dt$ et $G_n(x) = \int_n^x g(t)dt$.

   a. Montrer que, pour tout $x > n$, $F_n(x) = \frac{n-x}{(n+1)(x+1)} + \ln\left(\frac{(n+1)x}{n(x+1)}\right)$.

   b.
      i. Déterminer, en fonction de n, la limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de la fonction F_n. On notera v_n cette limite.
      ii. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq v_n$.
      iii. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $1 \leq (n+1) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

   c. En utilisant la **question 2.b de la Partie A**, donner l'expression de $G_n(x)$.

   d.
      i. Déterminer, en fonction de n, la limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de la fonction G_n. On notera u_n cette limite.
      ii. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 0$.
      iii. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $n \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$.

PARTIE C – ÉTUDE D'UNE SUITE

4. À partir des deux inégalités établies dans la partie B, montrer que pour tout $n \geq 1$,

   $$1 \leq \frac{\mathrm{e}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

5. En déduire que la suite de terme général $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est une suite convergente et déterminer sa limite, lorsque n tend vers $+\infty$.