MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

EAI MAT 1

SESSION 2022

AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours interne de l'Agrégation de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAI	1300A	101	0540

► **Concours interne du CAER / Agrégation de l'enseignement privé** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAH	1300A	101	0540

Notations.

· *Dans tout le problème, n désignera un entier naturel non nul et* $\mathbf{L}$ *désignera le corps des nombres réels* $\mathbf{R}$ *ou le corps des nombres complexes* $\mathbf{C}$.

· *Si p désigne un entier naturel non nul et* $\mathbf{L}$ *un corps, on note* $\mathcal{M}_p(\mathbf{L})$ *l'ensemble des matrices carrées de taille* $p \times p$ *à coefficients dans* $\mathbf{L}$ *; on notera* $\mathrm{Tr}\,(M)$ *la trace d'une matrice carrée* M.

· *On appelle* I_p *la matrice identité de* $\mathcal{M}_p(\mathbf{L})$, *qui est la matrice diagonale constituée uniquement de* 1 *sur la diagonale.*

· *L'ensemble des matrices inversibles de* $\mathcal{M}_p(\mathbf{L})$ *est noté* $GL_p(\mathbf{L})$ *et l'ensemble des matrices de* $GL_p(\mathbf{L})$ *de déterminant* 1 *est noté* $SL_p(\mathbf{L})$.

· *Soit* $\mathbf{A}$ *un sous-anneau de* $\mathbf{L}$. *On note* $\mathcal{M}_p(\mathbf{A})$ *(respectivement* $GL_p(\mathbf{A})$ *et* $SL_p(\mathbf{A})$*) l'ensemble des matrices de* $\mathcal{M}_p(\mathbf{L})$ *(respectivement de* $GL_p(\mathbf{L})$ *et* $SL_p(\mathbf{L})$*) à coefficients dans* $\mathbf{A}$.

· *Soit* $M \in \mathcal{M}_p(\mathbf{L})$, *on note* χ_M *le polynôme caractéristique de M défini par* $\chi_M(X) = \det(X I_p - M)$.

· *Soit* $\delta \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Q}$ *tel que* $D = \delta^2 \in \mathbf{Q}$. *Dans tout le problème, on posera* $\mathbf{K} = \mathbf{Q}[\delta] = \{a + b\delta \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$.

· *Pour tout* a, b *de* $\mathbf{Q}$, *on pose* $\overline{a + \delta b} = a - \delta b$.

· *Pour* $x \in \mathbf{K}$, *on pose* $N(x) = x\overline{x}$.

· *Pour* $M = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ *une matrice de* $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, *on définit la matrice* $\overline{M} = [\overline{a_{i,j}}]_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$.

· *On note* $\mathcal{S}_p(\mathbf{R})$ *l'ensemble des matrices carrées symétriques réelles de taille* $p \times p$ *et* $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ *l'ensemble des matrices carrées symétriques réelles de taille* $p \times p$ *ayant des valeurs propres positives ou nulles.*

· *Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Un endomorphisme u de E est dit symétrique si :* $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

· *Pour* $m, n \in \mathbf{Z}$, *tel que* $m \leqslant n$, *on note* $[\![m, n]\!]$ *l'intervalle d'entiers relatifs constitué des éléments de l'ensemble* $\{m, m+1, \ldots, n-1, n\}$.

Objectifs du problème.

Après un questionnaire "vrai ou faux" et un exercice préliminaire, les parties du problème portent sur la recherche de solutions non nulles de l'équation matricielle $X^n + Y^n = Z^n$, avec n un entier strictement positif.

· La partie **I** traite de la résolution du problème dans $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$.

· Les parties **II** à **VII** visent à discuter de l'existence de solutions dans $SL_2(\mathbf{Z})$, suivant les valeurs de n.

· Dans les parties **VIII** et **IX**, à partir d'une solution (X, Y, Z) dans $(SL_2(\mathbf{Q}))^3$, nous montrons comment construire une solution (X_1, Y_1, Z_1) dans $(SL_2(\mathbf{Q}))^3$ telle que (X_1^n, Y_1^n, Z_1^n) soit dans $(SL_2(\mathbf{Z}))^3$.

Les parties **I**, **II**, **III** et **VIII** peuvent se traiter indépendamment des autres, tout comme la partie **VII** en dehors de la dernière question.

Vrai ou faux ?

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.

(a) Soit n un entier strictement positif.
Affirmation : "Il existe des matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $\mathrm{Tr}\,(MN) \neq \mathrm{Tr}\,(NM)$."

(b) Affirmation : "Deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ ont le même polynôme caractéristique si et seulement si elles ont la même trace et le même déterminant."

(c) Affirmation : "Les matrices carrées et symétriques à coefficients dans $\mathbf{C}$ sont diagonalisables."

(d) Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux.
Affirmation : "Si $\varphi(a)$ est inversible dans B, alors a est inversible dans A."

Exercice préliminaire.

2. Soit d un entier strictement positif. Soit $P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_0$ un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ à coefficients complexes. On appelle *matrice compagnon* du polynôme P la matrice C_P de $\mathcal{M}_d(\mathbf{C})$ suivante

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{d-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant $\chi_{C_P}(X) = \det(X\,I_d - C_P)$ par rapport à sa première ligne et à l'aide d'une récurrence, montrer que $\chi_{C_P}(X) = P(X)$.

3. Soit p un entier strictement positif et soit M une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$.

(a) Étant donné un élément x quelconque non nul de $\mathbf{C}^p$ on pose

$$\mu = \min\big\{r \geqslant 1 \mid \text{la famille } \{x, M\,x, \ldots, M^r\,x\} \text{ est liée dans } \mathbf{C}^p\big\}.$$

i) Montrer qu'il existe un élément $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{\mu-1})$ de $\mathbf{C}^\mu$ et une matrice N de $\mathcal{M}_{p-\mu}(\mathbf{C})$ tels que la matrice M soit semblable à une matrice M' de la forme suivante

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -\alpha_0 & * \\ 1 & 0 & & \vdots & -\alpha_1 & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{\mu-2} & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -\alpha_{\mu-1} & * \\ O & & \ldots & & O & N \end{pmatrix}$$

où les $*$ représentent des lignes d'éléments de $\mathbf{C}$ et les O représentent des colonnes nulles.

ii) Montrer que $\chi_M(M)\,x = 0$.

(b) Montrer que χ_M est un polynôme annulateur de M.

Problème.

I. Exemple dans $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$.

Soient n et p deux entiers strictement positifs.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{S}_p(\mathbf{R})$ et soit a l'endomorphisme de $\mathbf{R}^p$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^p$ est A. Montrer que a est un endomorphisme symétrique de $\mathbf{R}^p$.

5. Soit $S \in \mathcal{S}_p(\mathbf{R})$. Démontrer que S est une matrice de $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ si et seulement si

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R}),\ {}^tYSY \geqslant 0.$$

6. Démontrer que pour toutes les matrices S et T de $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$, la matrice $S+T$ appartient à $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$.

7. Soit $S \in \mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une matrice R de $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ telle que $R^n = S$.

8. Soient $S \in \mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ et $U \in \mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ telles que $U^n = S$. On note s et u les endomorphismes de $\mathbf{R}^p$ dont les matrices relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^p$ sont respectivement S et U. Soit $\{\lambda_1, ..., \lambda_q\}$ le spectre de s ; pour i élément de $[\![1, q]\!]$, on note $E_{\lambda_i}(s)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i.

   (a) Soit $i \in [\![1, q]\!]$. Démontrer que u induit un endomorphisme symétrique sur $E_{\lambda_i}(s)$. On notera cet endomorphisme u_i.

   (b) Soit $i \in [\![1, q]\!]$. Démontrer que $\sqrt[n]{\lambda_i}$ est la seule valeur propre possible de u_i.

   (c) Démontrer que l'endomorphisme u est unique.

9. Soit $S \in \mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice R de $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ telle que $R^n = S$.

   Étant donnée une matrice S de $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$, on notera $R = \sqrt[n]{S}$, l'unique matrice de $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ telle que $R^n = S$.

10. Démontrer que l'application

$$\psi : \left\{ \begin{array}{lcl} (\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R}))^2 & \to & \left\{(X,Y,Z) \in (\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R}))^3 \;\middle|\; X^n + Y^n = Z^n\right\} \\ (U,V) & \mapsto & \left(\sqrt[n]{U}, \sqrt[n]{V}, \sqrt[n]{U+V}\right) \end{array} \right.$$

   est une bijection.

II. Si $n \equiv 0[4]$, l'équation $X^n + Y^n = Z^n$ n'admet pas de solutions dans $SL_2(\mathbf{Z})$.

11. Soit $M \in SL_2(\mathbf{Z})$. Démontrer que $\mathrm{Tr}\,(M^4) = \mathrm{Tr}\,(M)^4 - 4\,\mathrm{Tr}\,(M)^2 + 2$.

12. En déduire que l'on a $\mathrm{Tr}\,(M^4) \equiv 2[8]$ ou $\mathrm{Tr}\,(M^4) \equiv -1[8]$.

13. Démontrer que l'équation $X^4 + Y^4 = Z^4$ d'inconnues X, Y et Z n'admet pas de solutions dans $SL_2(\mathbf{Z})$.

14. En déduire que si 4 divise n, alors l'équation $X^n + Y^n = Z^n$ d'inconnues X, Y et Z n'admet pas de solutions dans $SL_2(\mathbf{Z})$.

III. Le corps $\mathbf{K} = \mathbf{Q}[\delta]$.

On pose

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{K} & \to & \mathbf{K} \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array} \right.$$

15. Démontrer que $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel dont on précisera la dimension.

16. Démontrer que $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$.

17. Démontrer que φ est un isomorphisme de corps.

18. **(a)** Démontrer que l'application $\psi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{Q} & \to & \mathbf{C} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+\delta}{x-\delta} \end{array} \right.$ est injective.

    (b) Démontrer que $\left\{ \dfrac{\theta}{\overline{\theta}},\ \theta \in \mathbf{K} \setminus \{0\} \right\}$ est un ensemble infini.

Tournez la page S.V.P.

IV. Matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ conjuguées à une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{Q})$.

Soit p un entier strictement positif.

19. Démontrer que si A et B sont des matrices quelconques de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, alors on a la relation $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.

20. Soit $F \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. Démontrer que F appartient à $GL_p(\mathbf{K})$ si et seulement si $\overline{F}$ appartient à $GL_p(\mathbf{K})$. Dans ce cas, démontrer que l'on a $\left(\overline{F}\right)^{-1} = \overline{F^{-1}}$.

21. Soit $X \in GL_p(\mathbf{K})$.

(a) On suppose qu'il existe une matrice F de $GL_p(\mathbf{K})$ tel que $X = F\left(\overline{F}\right)^{-1}$. Déterminer la matrice $X\overline{X}$.

(b) On suppose que $X\overline{X} = I_p$.
Pour tout élément θ de $\mathbf{K}$, on pose $F(\theta) = \theta I_p + \overline{\theta}X$.

i) Montrer qu'il existe un élément θ_0 de $\mathbf{K}$ tel que $F(\theta_0)$ soit inversible.

ii) En déduire, pour ce θ_0, que $X = F(\theta_0)\left(\overline{F(\theta_0)}\right)^{-1}$.

(c) Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une matrice F de $GL_p(\mathbf{K})$ telle que les matrices $F^{-1}AF$ et $F^{-1}BF$ appartiennent à $\mathcal{M}_p(\mathbf{Q})$.

ii) Il existe une matrice X de $GL_p(\mathbf{K})$ tel que : $\left\{\begin{array}{c} X^{-1}AX = \overline{A} \\ X^{-1}BX = \overline{B} \\ X\overline{X} = I_p \end{array}\right.$

22. Soient $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ deux matrices à coefficients dans $\mathbf{K}$. On suppose que λ n'est pas élément de $\mathbf{Q}$.

(a) Soit $X \in GL_2(\mathbf{K})$. Démontrer que X vérifie les relations $\left\{\begin{array}{c} X^{-1}AX = \overline{A} \\ X\overline{X} = I_2 \end{array}\right.$ si et seulement s'il existe un élément u de $\mathbf{K} \setminus \{0\}$ tel que $X = \begin{pmatrix} 0 & u \\ \frac{1}{\overline{u}} & 0 \end{pmatrix}$.

(b) On suppose qu'il existe une matrice F de $GL_2(\mathbf{K})$ telle que les matrices $F^{-1}AF$ et $F^{-1}BF$ appartiennent à $SL_2(\mathbf{Q})$.
Montrer que l'on a $\det(A) = \det(B) = 1$ et $d = \overline{a}$ et en déduire qu'il existe un élément x de $\mathbf{K}$ tel que l'on a $N(a) - 1 = N(x)$ (c'est-à-dire $a\overline{a} - 1 = x\overline{x}$).

V. Conditions pour qu'une somme de matrices de $SL_2(\mathbf{Q})$ soit dans $SL_2(\mathbf{Q})$.

Soient α un élément de $\mathbf{Q}$ et δ un élément de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Q}$ tels que $\alpha^2 - 1 = \delta^2$.

23. Soient $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha + \delta & 0 \\ 0 & \alpha - \delta \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ deux matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$, posons $m_1 = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(B_1)}{2}$.
On suppose que $\det(B_1) = \det(A_1 + B_1) = 1$. Démontrer l'égalité $a - d = \dfrac{2\alpha m_1 + 1}{\delta}$.

24. On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $SL_2(\mathbf{Q})$ telles que $\mathrm{Tr}\,(A) = 2\alpha$ et $\det(A + B) = 1$.
Posons $m = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(B)}{2}$.

(a) Démontrer que dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$, la matrice A est semblable à la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha+\delta & 0 \\ 0 & \alpha-\delta \end{pmatrix}$.

(b) En utilisant la question **23.** et la question **22b.**, montrer qu'il existe un élément x de $\mathbf{K}$ tel que l'on ait

$$\frac{\left(\alpha m + \frac{1}{2}\right)^2 - (\alpha^2-1)(m^2-1)}{1-\alpha^2} = N(x) = x\overline{x}.$$

(c) Démontrer que le résultat de la question précédente est équivalent à l'existence d'un élément y de $\mathbf{K}$ tel que

$$\left(\alpha m + \frac{1}{2}\right)^2 - (\alpha^2-1)(m^2-1) = N(y) = y\overline{y}.$$

Dans la suite du problème, on admettra que ce résultat reste valable si δ appartient à $\mathbf{Q}$. C'est-à-dire qu'étant donné un élément α de $\mathbf{Q}$ et des matrices A et B de $SL_2(\mathbf{Q})$ qui vérifient $\mathrm{Tr}\,(A) = 2\alpha$ et $\det(A+B) = 1$, alors si $m = \frac{\mathrm{Tr}\,(B)}{2}$ il existe deux éléments u et v de $\mathbf{Q}$ tels que

$$\left(\alpha m + \frac{1}{2}\right)^2 - (\alpha^2-1)(m^2-1) = u^2 - (\alpha^2-1)v^2.$$

VI. Si $n \equiv 0[3]$, l'équation $X^n + Y^n = Z^n$ n'admet pas de solutions dans $SL_2(\mathbf{Z})$.

25. (a) Soit $x \in \mathbf{Z}$. Déterminer les classes de congruence de $x^3 - 3x$ modulo 9. Pour chaque classe, on explicitera un représentant.

(b) Soit M une matrice de $SL_2(\mathbf{Z})$, démontrer que l'on a $\mathrm{Tr}\,(M^3) = (\mathrm{Tr}\,(M))^3 - 3\,\mathrm{Tr}\,(M)$.

(c) Soient A, B et C trois matrices de $SL_2(\mathbf{Z})$ qui vérifient la relation $A^3 + B^3 = C^3$.
On suppose que parmi les nombres $\mathrm{Tr}\,(A^3), \mathrm{Tr}\,(B^3)$ et $\mathrm{Tr}\,(C^3)$, au moins l'un d'entre eux n'est pas divisible par 9.

i) Montrer qu'il existe trois matrices A_1, B_1 et C_1 de $SL_2(\mathbf{Z})$ telles que $A_1^3 + B_1^3 = C_1^3$, $\mathrm{Tr}\,(A_1^3) \equiv 0[9]$, $\mathrm{Tr}\,(B_1^3) \equiv 2[9]$ et $\mathrm{Tr}\,(C_1^3) \equiv 2[9]$.

Étant donnée une matrice $M = [a_{i,j}]_{1\leqslant 2, j\leqslant 2}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$, on note $\dot{M} = [\dot{a}_{i,j}]_{1\leqslant 2, j\leqslant 2}$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ où $\dot{a}_{i,j}$ est la classe de $a_{i,j}$ dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

ii) Dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[X]$, démontrer que les polynômes caractéristiques de $\dot{B}_1$ et de $\dot{C}_1$ sont égaux à $(X-1)^2$.

iii) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$, démontrer que chacune des matrices $\dot{B}_1$ et $\dot{C}_1$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec k un élément de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

iv) Montrer que $(\dot{A}_1)^3$ est égale à $\dot{0}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$, en déduire une contradiction.

Nous venons de démontrer que si trois matrices A, B et C de $SL_2(\mathbf{Z})$ vérifient $A^3 + B^3 = C^3$, alors on a $\mathrm{Tr}\,(A^3) \equiv 0[9]$, $\mathrm{Tr}\,(B^3) \equiv 0[9]$ et $\mathrm{Tr}\,(C^3) \equiv 0[9]$.

Tournez la page S.V.P.

26. Soient α et m deux éléments de $\mathbf{Q}$ tels que 2α et $2m$ appartiennent à $\mathbf{Z}$ et qui vérifient les relations $2\alpha \equiv 0[9]$ et $2m \equiv 0[9]$.
On suppose qu'il existe deux éléments x et y de $\mathbf{Q}$ tels que

$$\left(\alpha m + \frac{1}{2}\right)^2 - (\alpha^2 - 1)(m^2 - 1) = x^2 - (\alpha^2 - 1)y^2 \quad (*).$$

On note alors d le plus petit entier naturel non nul tel que $x = \frac{r}{d}$ et $y = \frac{s}{d}$, avec r et s des éléments de $\mathbf{Z}$; on admet alors que

$$d^2\left[(4\alpha m + 2)^2 - \left((2\alpha)^2 - 4\right)\left((2m)^2 - 4\right)\right] = (4xd)^2 - \left((2\alpha)^2 - 4\right)(2yd)^2 \quad (**).$$

(a) Démontrer que l'on a

$$\left[(4\alpha m + 2)^2 - \left((2\alpha)^2 - 4\right)\left((2m)^2 - 4\right)\right] \equiv 6[9]$$

et

$$(4xd)^2 + (2yd)^2 \equiv 0[3].$$

(b) Montrer que l'on a $4xd \equiv 0[3]$ et $2yd \equiv 0[3]$.

(c) À l'aide de l'égalité $(**)$ montrer que 3 divise d.

(d) En déduire une contradiction sur la définition de d.

27. Soient α et m deux éléments de $\mathbf{Q}$ tels que 2α et $2m$ appartiennent à $\mathbf{Z}$ et qui vérifient les relations $2\alpha \equiv 0[9]$ et $2m \equiv 0[9]$.
Montrer qu'il n'existe pas de matrices U et V de $SL_2(\mathbf{Z})$ vérifiant

$$\mathrm{Tr}\,(U) = 2\alpha, \mathrm{Tr}\,(V) = 2m \text{ et } \det(U + V) = 1.$$

28. Montrer si 3 divise n, alors l'équation $X^n + Y^n = Z^n$ d'inconnues X, Y et Z n'admet pas de solutions dans $SL_2(\mathbf{Z})$.

VII. Recherche de solutions de $X^n + Y^n = Z^n$ dans $SL_2(\mathbf{Z})$ si n n'est pas divisible par 3 ou 4.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et soit $p \in \mathbf{N}^*$. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ est k-périodique si $M^k = I_p$.
Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = -I_2$ trois matrices de $SL_2(\mathbf{Z})$ qui vérifient la relation $A + B = C$.

29. Montrer qu'une matrice k-périodique est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$.

30. **(a)** Déterminer toutes les matrices X de $SL_2(\mathbf{Z})$ qui vérifient $\mathrm{Tr}\,(X) = -1$ et $X^2 = A$.
Montrer que ces matrices sont 12-périodiques,

(b) Déterminer une matrice Y de $SL_2(\mathbf{Z})$ qui est 12-périodique et qui vérifie la relation $Y^2 = B$.

(c) En déduire au moins un triplet (X, Y, Z) de matrices de $(SL_2(\mathbf{Z}))^3$, constitué de matrices 12-périodiques, tel que $X^2 + Y^2 = Z^2$.

31. Soit $n \equiv 2[12]$, montrer qu'il existe au moins un triplet (X, Y, Z) de matrices de $(SL_2(\mathbf{Z}))^3$ tel que $X^n + Y^n = Z^n$.

32. En déduire, lorsque $n \equiv -2[12]$, qu'il existe au moins un triplet (X, Y, Z) de matrices de $(SL_2(\mathbf{Z}))^3$ tel que $X^n + Y^n = Z^n$.

33. Lorsque $n \equiv 1[6]$ ou $n \equiv 5[6]$, à l'aide des matrices A et B déterminer des matrices X, Y et Z de $SL_2(\mathbf{Z})$ qui vérifient la relation $X^n + Y^n = Z^n$.

34. Suivant les valeurs de l'entier strictement positif n, discuter l'existence de matrices X, Y et Z de $SL_2(\mathbf{Z})$ qui vérifient la relation $X^n + Y^n = Z^n$.

VIII. Réseaux de $\mathbf{Q}^n$.

Dans cette partie, n et m désignent deux entiers naturels non nuls. Soient $v_1, ..., v_m$ des éléments non nuls de $\mathbf{Q}^n$, posons

$$\mathcal{R} = \mathbf{Z}v_1 + ... + \mathbf{Z}v_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} k_i v_i \mid k_1, ..., k_m \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Si $n \geqslant 2$, on note

$$\mathbf{Q}^{n-1} \times \{0\} = \left\{ (x_1, ..., x_{n-1}, 0) \mid x_1, ..., x_{n-1} \in \mathbf{Q} \right\}.$$

35. Démontrer que $\mathcal{R}$ est un sous-groupe additif de $(\mathbf{Q}^n, +)$.

36. Si $n = 1$, montrer qu'il existe un élément r de $\mathbf{Q}$ tel que

$$\mathcal{R} = r\mathbf{Z} = \left\{ rk \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Ce r est-il unique ?

37. On suppose $n \geqslant 2$, posons $\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Q}^n & \to & \mathbf{Q} \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & x_n \end{array} \right.$. Montrer qu'il existe un élément w de $\mathcal{R}$ tel que

$$\pi(\mathcal{R}) = \pi(w)\mathbf{Z} = \{\pi(w)k \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Dans la suite de cette partie, si $\pi(\mathcal{R}) = \{0\}$, on prendra $w = (0, ..., 0)$.

38. Soit x un élément de $\mathcal{R}$ et w un élément de $\mathcal{R}$ défini comme dans la question précédente.

(a) Montrer qu'il existe un couple $(q, \widetilde{x})$ de $\mathbf{Z} \times \left(\mathcal{R} \cap (\mathbf{Q}^{n-1} \times \{0\})\right)$ tel que $x = qw + \widetilde{x}$.

(b) Démontrer que $\widetilde{x}$ est unique. L'entier q est-il toujours unique ?

39. Démontrer que l'on a

$$\mathcal{R} \cap (\mathbf{Q}^{n-1} \times \{0\}) = \mathbf{Z}\widetilde{v_1} + ... + \mathbf{Z}\widetilde{v_m} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} k_i \widetilde{v_i} \mid k_1, ..., k_m \in \mathbf{Z} \right\}$$

où les éléments $\widetilde{v_1}, ..., \widetilde{v_m}$ de $\mathcal{R}$ sont définis comme dans la question précédente.

40. Montrer par récurrence sur la dimension de $\mathbf{Q}^n$, qu'il existe des éléments $u_1, ..., u_p$ de $\mathcal{R}$ tels que pour tout x de $\mathcal{R}$ il existe un unique p-uplet $(k_1, ..., k_p)$ de $\mathbf{Z}^p$ vérifiant $x = \sum_{i=1}^{p} k_i u_i$.

Une telle famille $(u_1, ..., u_p)$ de $\mathcal{R}$ est appelée $\mathbf{Z}$-base *de $\mathcal{R}$, on notera alors $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbf{Z}u_i$.*

41. Supposons que $vect_{\mathbf{Q}}(v_1, ..., v_m) = \mathbf{Q}^n$. Si $(u_1, ..., u_p)$ est une $\mathbf{Z}$-base de $\mathcal{R}$ démontrer que $(u_1, ..., u_p)$ est une base de $\mathbf{Q}^n$ et que $p = n$.

IX. Condition pour que certains sous-groupes de $SL_2(\mathbf{Q})$ soient semblables à un sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$.

Soit p un entier strictement positif. Dans cette partie, on identifie $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{Q})$ et $\mathbf{Q}^p$. On note $(e_1, ..., e_p)$ la base canonique de $\mathbf{Q}^p$ et on admet que $(SL_p(\mathbf{Q}), .)$ est un groupe.

42. Soit G un sous-groupe multiplicatif de $(SL_p(\mathbf{Q}), .)$ tel qu'il existe un entier strictement positif d vérifiant

$$\forall M \in G,\ dM \in \mathcal{M}_p(\mathbf{Z}).$$

Soit H le sous-groupe additif de $(\mathbf{Q}^p, +)$ engendré par les éléments Me_i, avec M une matrice de G et i un élément de $[\![1,p]\!]$; c'est le plus petit sous-groupe de $(\mathbf{Q}^p, +)$ contenant l'ensemble $\{Me_i \mid M \in G,\ i \in [\![1,p]\!]\}$ et il peut s'écrire sous la forme suivante

$$H = \left\{ y_1 + y_2 + ... + y_q \mid q \in \mathbf{N}^*,\ y_1, y_2, ..., y_q \in \mathcal{M} \right\}$$

où

$$\mathcal{M} = \left\{ Me_i \mid M \in G,\ i \in [\![1,p]\!] \right\} \cup \left\{ -Me_i \mid M \in G,\ i \in [\![1,p]\!] \right\} \cup \{0\}.$$

(a) Démontrer que les vecteurs $e_1, ..., e_p$ appartiennent à H.

(b) Démontrer que H est stable par G, c'est-à-dire que l'on a

$$\forall M \in G, \forall h \in H,\ Mh \in H.$$

(c) Soient $M \in G$ et $j \in [\![1,p]\!]$. Montrer qu'il existe des éléments $r_1, ..., r_p$ de $[\![0, d-1]\!]$ et des éléments $q_1, ..., q_p$ de $\mathbf{Z}$ tels que

$$Me_j = \sum_{i=1}^{p} q_i e_i + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{p} r_i e_i.$$

(d) Montrer qu'il existe une famille génératrice $(v_1, ..., v_m)$ de $\mathbf{Q}^p$ telle que

$$H = \mathbf{Z}v_1 + ... + \mathbf{Z}v_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} k_i v_i \mid k_1, ..., k_m \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(e) En déduire qu'il existe une base $(u_1, ..., u_p)$ de $\mathbf{Q}^p$ telle que

$$\forall M \in G,\ Mu_i \in \mathbf{Z}u_1 + ... + \mathbf{Z}u_p = \left\{ \sum_{i=1}^{p} k_i u_i \mid k_1, ..., k_p \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(f) En déduire qu'il existe une matrice F de $GL_p(\mathbf{Q})$ telle que

$$\forall M \in G,\ F^{-1}MF \in SL_p(\mathbf{Z}).$$

Jusqu'à la fin du problème, on se place dans le cas particulier $p = 2$.

43. Soient A et B deux éléments de $SL_2(\mathbf{Q})$ et soit G le sous-groupe (multiplicatif) de $(SL_2(\mathbf{Q}), .)$ engendré par A et B. C'est le plus petit sous-groupe de $(SL_2(\mathbf{Q}), .)$ contenant A et B, il peut s'écrire

$$G = \left\{ Q_1 Q_2 ... Q_p \mid p \in \mathbf{N}^*,\ Q_1, Q_2, ..., Q_p \in \{I_2, A, B, A^{-1}, B^{-1}\} \right\}.$$

On considère K le sous-groupe additif de $(\mathcal{M}_2(\mathbf{Q}), +)$ suivant

$$K = \mathbf{Z}I_2 + \mathbf{Z}A + \mathbf{Z}B + \mathbf{Z}AB + \mathbf{Z}BA + \mathbf{Z}ABA + \mathbf{Z}BAB$$

que l'on peut écrire

$$K = \left\{k_1I_2 + k_2A + k_3B + k_4AB + k_5BA + k_6ABA + k_7BAB \;\middle|\; k_1, \ldots, k_7 \in \mathbf{Z}\right\}.$$

On suppose de plus que $\mathrm{Tr}\,(A)$, $\mathrm{Tr}\,(B)$ et $\mathrm{Tr}\,(AB)$ appartiennent à $\mathbf{Z}$.

(a) Démontrer que A^{-1} et B^{-1} appartiennent à K.

(b) Démontrer que $G \subset K$.

(c) En déduire qu'il existe un entier strictement positif d tel que

$$\forall M \in G,\ dM \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z}).$$

44. Soient $A, B \in SL_2(\mathbf{Q})$.

(a) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

i) Il existe une matrice F de $GL_2(\mathbf{Q})$ telle que $F^{-1}AF$ et $F^{-1}BF$ appartiennent à $SL_2(\mathbf{Z})$.

ii) $\mathrm{Tr}\,(A), \mathrm{Tr}\,(B)$ et $\det(A + B)$ appartiennent à $\mathbf{Z}$.

(b) Soit n un entier strictement positif. Soient X, Y et Z des matrices de $SL_2(\mathbf{Q})$ telles que $\mathrm{Tr}\,(X)$ et $\mathrm{Tr}\,(Y)$ appartiennent à $\mathbf{Z}$ et qui satisfont la relation $X^n + Y^n = Z^n$.
Montrer qu'il existe une matrice F de $GL_2(\mathbf{Q})$ telle que $X_1 = F^{-1}XF$, $Y_1 = F^{-1}YF$ et $Z_1 = F^{-1}ZF$, avec X_1^n, Y_1^n et Z_1^n qui appartiennent à $SL_2(\mathbf{Z})$ et $X_1^n + Y_1^n = Z_1^n$.

FIN DU SUJET