

SESSION 2021

**AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR

**Option : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR
ET INGÉNIERIE MÉCANIQUE**

**MODÉLISATION D'UN SYSTÈME, D'UN PROCÉDÉ
OU D'UNE ORGANISATION**

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1414A	102	2680

Ce sujet comporte :

Enoncé : 27 pages (pages 1 à 27)

Documents Techniques : 7 pages (pages 28 à 34)

SISMOMETRE SEIS (*SEISMIC EXPERIMENT FOR INTERNAL STRUCTURE*) D'INSIGHT POUR MARS

La sonde InSight s'est posée sur Mars le 26 novembre 2018. Celle-ci a pour objectifs l'étude de la structure, de la composition physique et de l'état thermique des noyau, manteau et croûte de la planète, ainsi que la mesure de son activité sismique (*Figure 1*). Ces observations doivent permettre de comprendre l'évolution de Mars, passée d'une planète possédant une activité volcanique, des rivières et un champ magnétique à un désert aride soumis à de fortes variations de températures.

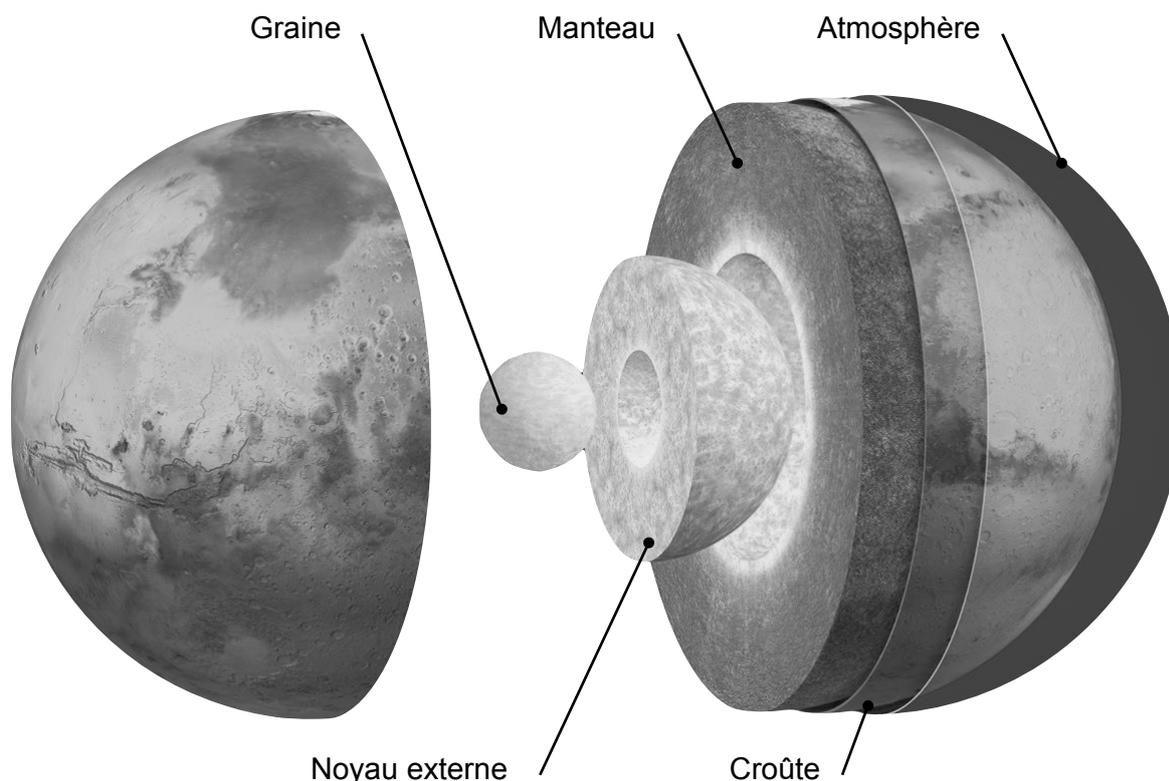


Figure 1 - Structure de la planète Mars.

La mission InSight est la douzième mission d'exploration réalisée sous l'égide du programme Discovery de l'agence spatiale américaine (NASA) débuté en 1990. Les objectifs scientifiques attendus pour cette mission sont énoncés dans le *Tableau 1*.

InSight est composée de plusieurs instruments (analyseur de flux thermique, magnétomètre, station météorologique, réflecteur laser, sismomètre six axes SEIS) installés sur un atterrisseur d'environ 1,5 m de diamètre, ainsi que de l'ensemble des éléments gérant l'alimentation en énergie, les communications radio, la propulsion de la sonde et la régulation thermique (*Figure 2*). Certains éléments seront directement déployés sur le sol martien pour réaliser leurs observations (analyseur de flux thermique et sismomètre six axes SEIS).

Objectifs scientifiques	Exigences associées
Déterminer l'épaisseur et la composition de la croûte	Épaisseur à ± 10 km
Déterminer la composition et la structure du manteau	Vitesses sismiques à $\pm 0,25$ km·s ⁻¹ dans les 600 km de couches supérieures
Déterminer la taille du cœur	Rayon du cœur à ± 200 km
Mesurer le taux de l'activité sismique	Taux journalier d'activité sismique à un facteur 2
Mesurer le taux d'impacts de météorites sur la surface	Nombre quotidien d'impacts de météorites à un facteur 2

Tableau 1 - Quelques objectifs et exigences de la mission Insight sur Mars.

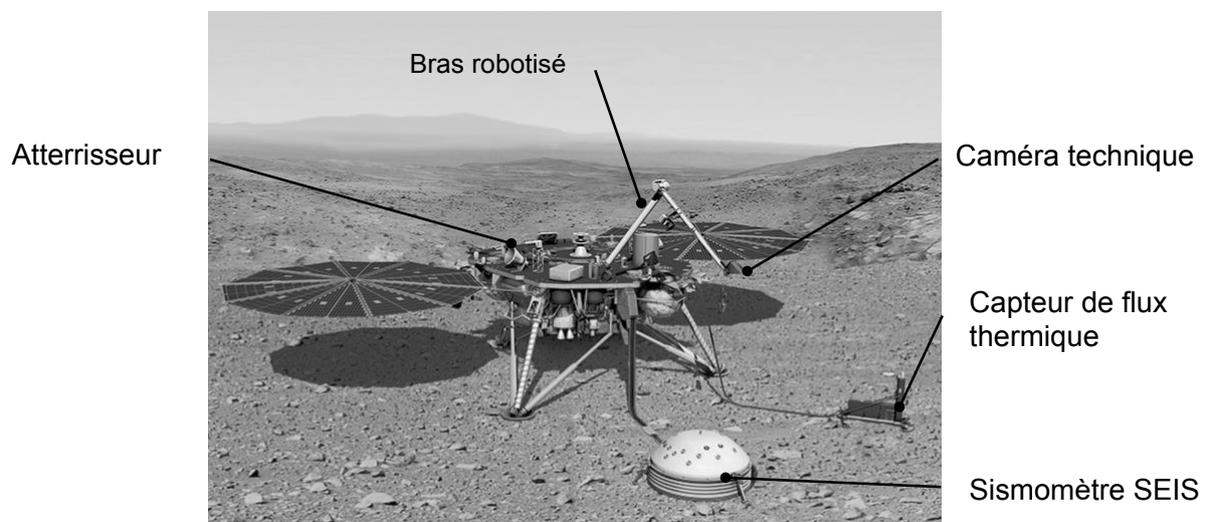


Figure 2 - Principaux éléments de la sonde Insight.

Le sismomètre six-axes appelé SEIS (*Seismic Experiment for Internal Structure*, Figure 3) est l'un des éléments principaux de la mission InSight. Son financement a été soutenu par les agences spatiales française (CNES), américaine (NASA), allemande (DLR), suisse (SSO) et britannique (UKSA) en partenariat avec des organisations universitaires et de recherche¹ et le SEIS livre depuis sa mise en service des données publiées régulièrement². Il a été conçu afin de répondre à une partie des objectifs présentés dans le *Tableau 1*. Il doit opérer dans des conditions environnementales difficiles sur Mars avec :

- des variations de température quotidiennes et climatiques, de -80 à 0 °C ;
- du vent, jusqu'à 75 km·h⁻¹ ;
- le champ magnétique et le champ de pesanteur de Mars ($g = 3,711$ m·s⁻²).

Le SEIS est déployé grâce à un bras robotisé sur la surface martienne et est protégé de la température et du vent à l'aide d'un bouclier thermique (baptisé RWEB pour *Remote Warm Enclosure Box*) et d'une seconde protection éolienne et thermique

¹ Lognonné, P., Banerdt, W.B., Giardini, D. *et al.* SEIS: Insight's Seismic Experiment for Internal Structure of Mars. *Space Sci Rev* **215**, 12 (2019). <https://doi.org/10.1007/s11214-018-0574-6>

² www.seis-insight.eu

(nommée WTS pour *Wind and Thermal Shield*). Pour répondre aux objectifs de la mission, SEIS est équipé d'un ensemble de capteurs composés de deux sismomètres trois-axes indépendants, couvrant les signaux de 0,01 Hz à plus de 50 Hz, montés sur une structure commune, appelée LVL (pour *LeVeLing system*), pouvant être mise de niveau très précisément grâce à trois pieds de longueur réglable. Ces deux sismomètres sont :

- le VBB (*Very Broad band*), un capteur trois axes à large bande de fréquences à pendules inversés placés dans une sphère en titane où le vide presque parfait est réalisé afin d'atténuer les contrastes de température ;
- le SP (*Short periods*), un capteur hautes fréquences adapté à des ondes sismiques de fréquence supérieure au Hertz.

Les missions antérieures ont permis de définir les exigences du module SEIS, en particulier sur les performances nécessaires des sismomètres (*Tableau 2*).

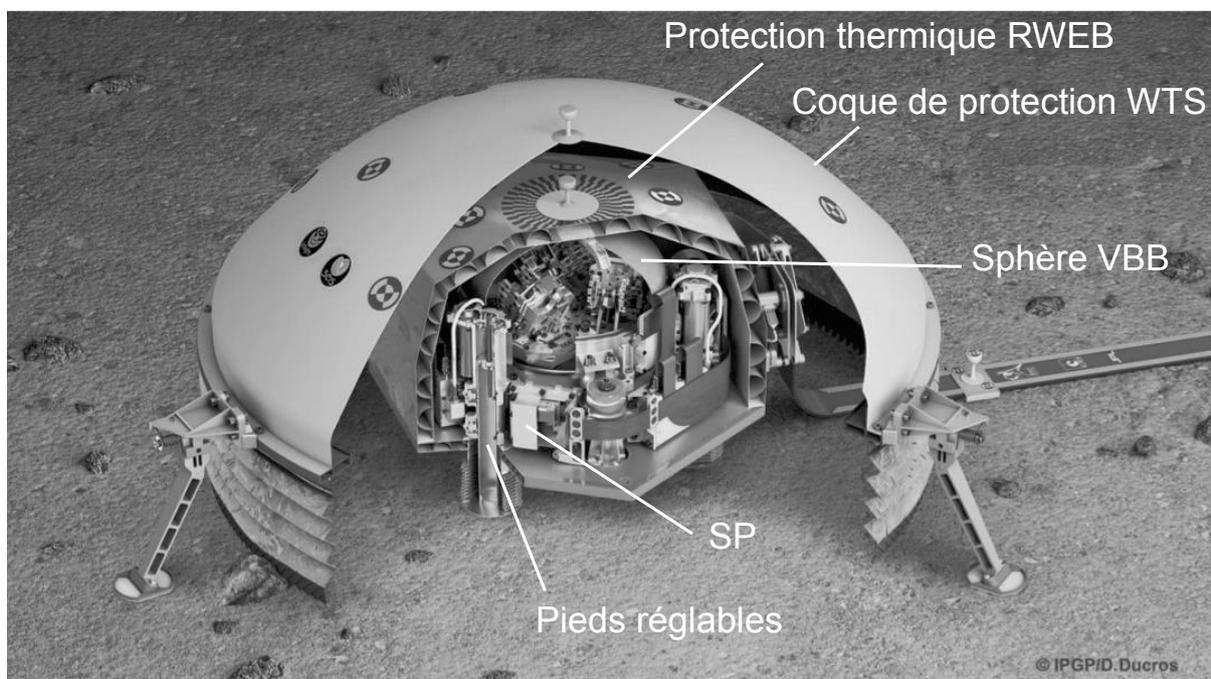


Figure 3 - Illustration du SEIS.

Exigence	Performance des capteurs	Critères pour le VBB	Critères pour le SP
1.1	Bande de fréquences	[0,01-0,5] Hz	[0,1-50] Hz
1.2	Gain mécanique du pendule	$> 0,11 \text{ s}^2$	$> 7 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2$
1.3	Gain de la chaîne d'acquisition	$> 3 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2$	$> 3 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2$
1.4	Bruit propre	$10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$ entre 0,001 et 1 Hz	$10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$ entre 0,1 et 1 Hz
1.5	Défaut d'inclinaison	$< 2,5^\circ$	$< 15^\circ$

Tableau 2 - Exigences du robot SEIS.

Le LVL possède plusieurs fonctions caractérisées dans le *Tableau 3* :

- servir de support à l'ensemble de capteurs sismiques ;
- permettre la mise à niveau de l'ensemble de capteurs sur des sols de pente jusqu'à 15° ou sur des sols rocheux ;
- garantir une inclinaison inférieure à 0,1° par rapport à l'horizontale ;
- assurer un lien « rigide » avec le sol pour transmettre intégralement son mouvement aux capteurs sismiques ;
- offrir un support à des capteurs de température, des dispositifs de chauffage ou de protection thermique *etc.*

Exigence	Fonction du LVL	Caractéristiques du LVL	Critère
2.1	Support des capteurs	Diamètre	250 mm
2.2	Transmission des mouvements sismiques	Fréquences propres	> 50 Hz
2.3		Atténuation ou amplification des mouvements sismiques	< 0,5 dB
2.4	Mise à niveau de l'ensemble des capteurs	Inclinaison initiale	≤ 15°
2.5		Résolution	0,1°

Tableau 3 - Exigences du LVL.

Ce sujet porte sur la modélisation des capacités d'acquisition du module SEIS, et plus particulièrement sur le sismomètre large bande VBB. Il est composé de trois parties : les deux premières consistent à réaliser un modèle de la structure d'acquisition et la troisième permet de valider le fonctionnement à partir de résultats d'observation.

Les trois parties composant ce sujet ont pour objectif final de valider la structure retenue pour le sismomètre large bande VBB. Chacune de ces parties vise des objectifs spécifiques :

- la première partie a pour objectifs de valider les exigences relatives aux performances définies dans le *Tableau 3* du dispositif de mise à niveau LVL ainsi que la capacité du LVL à assurer une transmission correcte des vibrations du sol au VBB afin de rendre possibles les mesures sismiques par les capteurs ;
- la seconde partie a pour objectif de valider les exigences relatives aux performances de mesures définies dans le *Tableau 2* en modélisant le comportement général du sismomètre VBB ;
- la troisième et dernière partie a pour objectif de valider le fonctionnement du VBB en conditions réelles d'exploitation.

I. DISPOSITIF DE MISE A NIVEAU LVL (*LEVELING SYSTEM*)

Les objectifs de cette partie sont de valider les performances du dispositif de mise à niveau LVL en regard des exigences relatives au fonctionnement des sismomètres du VBB, puis de justifier que la structure retenue permet d'effectuer une transmission correcte des vibrations du sol au VBB afin de rendre possibles les mesures sismiques par les capteurs.

La *Figure 4* présente le LVL dans une configuration sur un sol incliné à 15° dans laquelle le support de l'ensemble de capteurs est maintenu à l'horizontal grâce à trois pieds télescopiques de longueur réglable.

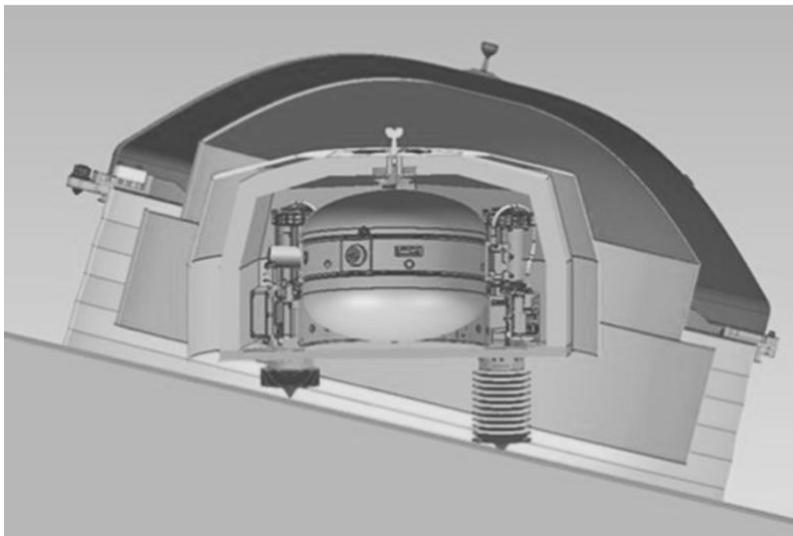


Figure 4 - Configuration du LVL sur un sol incliné à 15°.

Le LVL consiste en une partie mécanique, structure support de l'ensemble de capteurs, et une partie électrique. La partie principale de la structure du LVL est un anneau rigide recevant (*Figure 5*) :

- trois pieds réglables pouvant compenser une inclinaison jusqu'à 15° et possédant une géométrie optimisée permettant une raideur maximale de l'ensemble ;
- un capteur MEMS (*MicroElectroMechanical Systems*) deux axes pour la mise à niveau grossière (résolution jusqu'à 0,1°) et deux capteurs d'inclinaison haute précision (HP) pour une mise à niveau très fine (résolution supérieure à 1/3600°) ;
- des systèmes de chauffage pour faire face aux températures froides pendant la saison hivernale. Ils fournissent une puissance de chauffage de 1,5 W ;
- des capteurs de températures SCIT (*SCIENCE Temperature sensors*) ;
- la structure araignée, lien mécanique entre l'anneau du LVL et le crochet de préhension par le bras robotique de la sonde InSight ;
- les capteurs SP ;
- la sphère VBB et son système électronique.

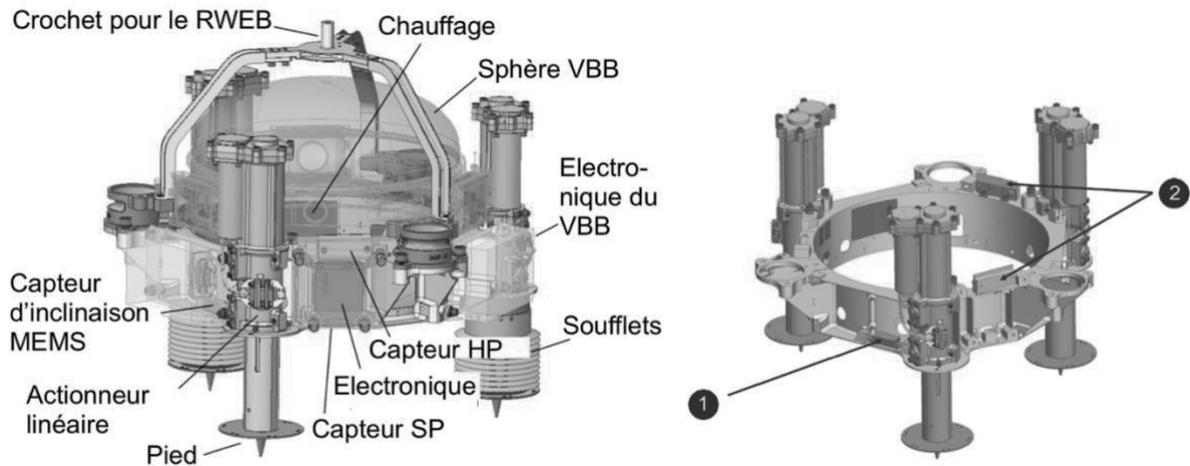


Figure 5 - Composants du LVL (à gauche) et structure anneau du LVL (à droite) avec la position des capteurs de niveau MEMS (1) et des capteurs de niveau Haute Précision (2).

I.1 Choix du système de mise à niveau

L'objectif de cette sous-partie est de valider les performances du dispositif de mise à niveau LVL en regard des exigences 2.4 et 2.5.

Les schémas cinématiques du LVL et d'un actionneur linéaire sont présentés sur la *Figure 6*. Les trois actionneurs linéaires du LVL sont identiques et sont actionnés indépendamment, avec un moteur pas-à-pas à deux phases, pour pouvoir mettre à niveau le SEIS pour une inclinaison γ allant jusqu'à 15° en agissant sur la longueur des pieds télescopiques.

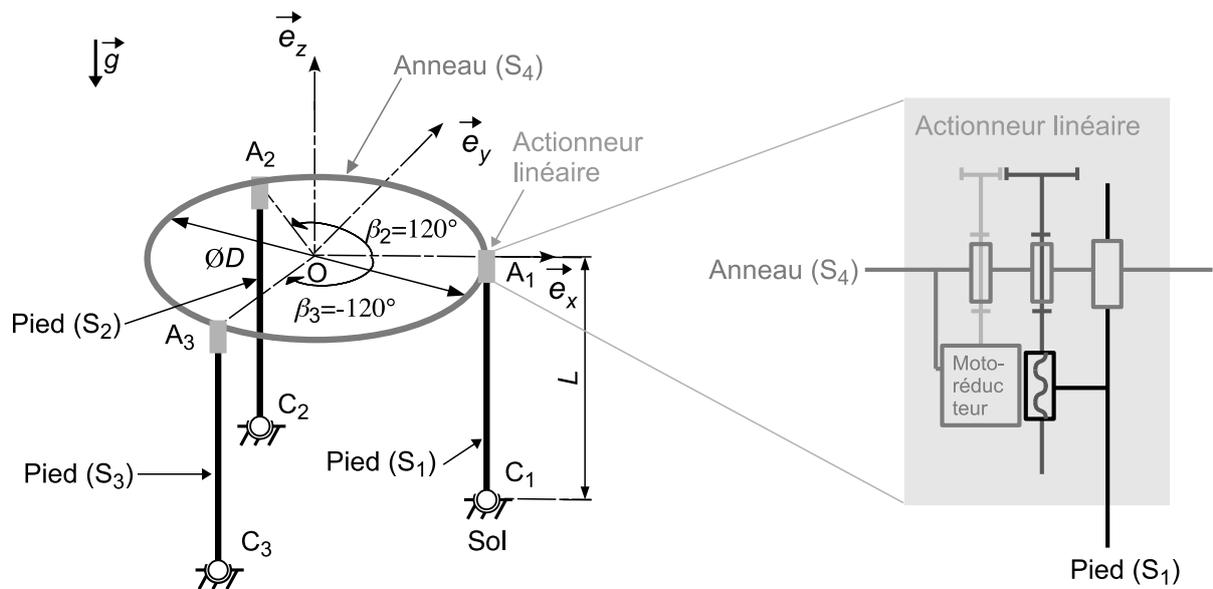


Figure 6 - Schémas cinématiques du LVL (à gauche) et de l'actionneur linéaire (à droite).

Les dimensions du LVL et les caractéristiques de l'actionneur linéaire sont fournies dans le *Tableau 4*.

LVL	Anneau	Diamètre	D	250 mm
	Pied	Longueur	L	réglable
		Diamètre	d	25 mm
Actionneur linéaire	Moteur	Résolution		200 pas·tour ⁻¹
		Rapport de réduction	r_m	1/48
	Engrenage	Rapport de réduction	r_e	38/58
	Système vis-écrou	Pas	p	0,7 mm
		Course		59 mm

Tableau 4 - Caractéristiques du LVL et de l'actionneur linéaire.

Question 1 : En considérant le mouvement d'un seul actionneur, évaluer la course maximale que doit pouvoir effectuer le vérin pour respecter les objectifs. L'actionneur permet-il de respecter cette exigence ?

Question 2 : Déterminer la résolution nécessaire de la mesure du déplacement d'un actionneur vis-à-vis des exigences attendues dans le *Tableau 3*. Comparer avec la résolution assurée par l'actionneur linéaire et conclure quant au respect de l'exigence 2.5.

I.2 Réalisation des pieds télescopiques

L'objectif de cette sous-partie est de modéliser et de justifier l'architecture de la liaison entre les deux parties du pied télescopique.

Afin d'assurer le fonctionnement du VBB dans les conditions souhaitées, les actionneurs du LVL doivent assurer la mise à niveau du LVL mais également la transmission des ondes sismiques aux différents sismomètres. Pour cela, la première fréquence propre du LVL doit être supérieure à la bande passante des instruments de mesure. Cela impose une rigidité importante pour les pieds télescopiques.

Le guidage des actionneurs est réalisé par l'association de six roulements rigides à billes disposés dans deux sections de l'actionneur distantes de 45 mm et répartis à 120° autour de l'axe de déplacement (*Figure 7*). Deux de ces roulements sont préchargés afin d'assurer le contact des deux parties du pied sur les six roulements à chaque instant.

Question 3 : Quelle liaison normalisée équivalente est réalisée entre la structure et l'axe télescopique avec un seul roulement ? En déduire la liaison équivalente réalisée par les trois roulements répartis à 120° sur une même section de l'axe télescopique. Justifier par le calcul.

Question 4 : En déduire la liaison totale équivalente réalisée par l'ensemble des six roulements entre l'axe télescopique sur lequel est monté le pied et la structure du LVL.

Question 5 : Déterminer le degré d'hyperstatisme réalisé par l'utilisation des six roulements à billes entre l'axe télescopique et la structure du LVL. Justifier ce choix d'architecture vis-à-vis des attentes concernant le comportement de l'ensemble et de l'exigence 2.2.

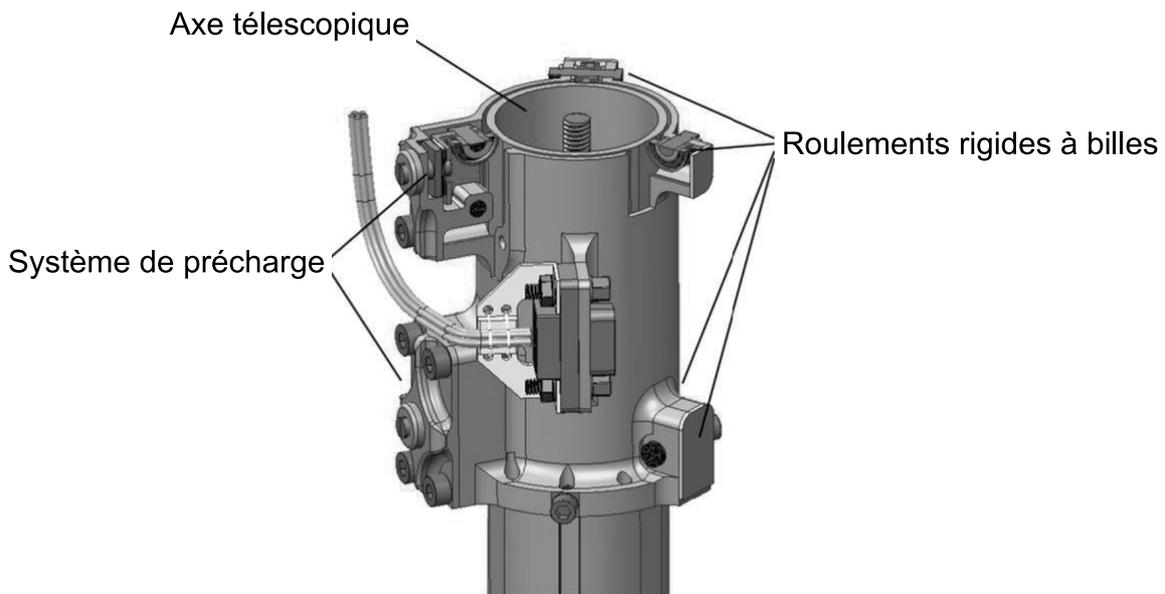


Figure 7 - Guidage d'un actionneur.

I.3 Fonction de transfert du LVL

L'objectif de cette sous-partie est de modéliser le comportement dynamique du LVL et de valider sa conception en regard de l'exigence 2.2.

La fonction de transfert du LVL mis à niveau est déterminée avec un modèle analytique simple (*Figure 8*) et validée avec une campagne de mesures.

Le LVL est composé de quatre composants principaux dont les positions et dimensions sont présentées sur la *Figure 8* (gauche) :

- l'anneau rigide S_4 de diamètre D ; il est tel que, dans la configuration au repos, le plan (A_1, A_2, A_3) est horizontal (orthogonal à l'accélération de la pesanteur) et un point A_i est confondu avec B_i ;
- les trois pieds télescopiques $S_i, i=1, \dots, 3$, de longueur $2H_i$; on suppose les pieds suffisamment rigides pour les assimiler à des solides indéformables.

On considère une masse identique M pour les quatre solides. On note G_i le centre de masse et $[J_i]$ la matrice d'inertie en G_i d'un solide S_i :

$$[J_4] = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} \quad \text{et} \quad [J_i] = \begin{bmatrix} I_i & 0 & 0 \\ 0 & I_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} \quad \text{pour } i=1, 2 \text{ ou } 3.$$

On se place dans cette partie de l'étude dans le cadre des petites perturbations pour lequel nous considérons toutes les bases liées à chacun des solides confondues avec la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Question 6 : Un séisme induit un déplacement du sol $\vec{u} = x_{sol}\vec{e}_x + y_{sol}\vec{e}_y + z_{sol}\vec{e}_z$.
Écrire les équations issues du Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au pied S_1 . Les équations seront exprimées en fonction des déplacements du sol, des déplacements des points G_1, A_1, B_1, C_1 et des angles de rotation du pied S_1 . Combien d'équations scalaires indépendantes obtient-on ?

Question 7 : On souhaite exprimer les équations de la question précédente en fonction des seuls degrés de mobilité du pied S_1 définis sur la Figure 8 (droite). Exprimer les déplacements des points A_1 et C_1 en fonction des mobilités du pied S_1 définies au point G_1 .

La démarche des questions 6 et 7 est répétée pour chacun des quatre solides du LVL. En rassemblant les équations, on obtient un système d'équations indépendantes de la forme :

$$[K]([U] - [U_d]) = [M][\ddot{U}]$$

où $[M]$ définit la matrice de masse du système et $[K]$ la matrice de rigidité.

Question 8 : Préciser ce que contient le vecteur $[U]$ et ce que représente $[U_d]$. Quelle est la taille du système ?

Le système est résolu numériquement. Les fonctions de transfert dimensionnantes du LVL sont celles correspondant aux translations horizontales de l'anneau. Sur la Figure 9 sont représentées les courbes du gain des fonctions de transfert, calculées analytiquement et mesurées expérimentalement, pour une configuration où les pieds sont tous allongés de 0,5 mm.

Question 9 : Commenter les résultats de la Figure 9. Préciser l'influence sur la fréquence de résonance d'un changement de masse de l'anneau, d'une augmentation de la longueur des jambes ou d'une augmentation de la flexibilité des jambes.

Question 10 : On souhaite optimiser la géométrie des pieds. Les variables de conception à optimiser sont le diamètre et l'épaisseur de la section, et le module d'Young et la masse volumique du matériau. Proposer des fonctions objectifs et contraintes pour cette optimisation.

Question 11 : Les pieds sont fabriqués en Invar. Les premiers modes propres des pieds calculés sur une géométrie simple de tube sont donnés dans l'Annexe 1. Commenter les résultats et conclure sur la conception des pieds.

Question 12 : Conclure quant à la conception du LVL comme lien « rigide » entre les capteurs et le sol. Préciser la position optimale du LVL au regard de l'exigence 2.2.

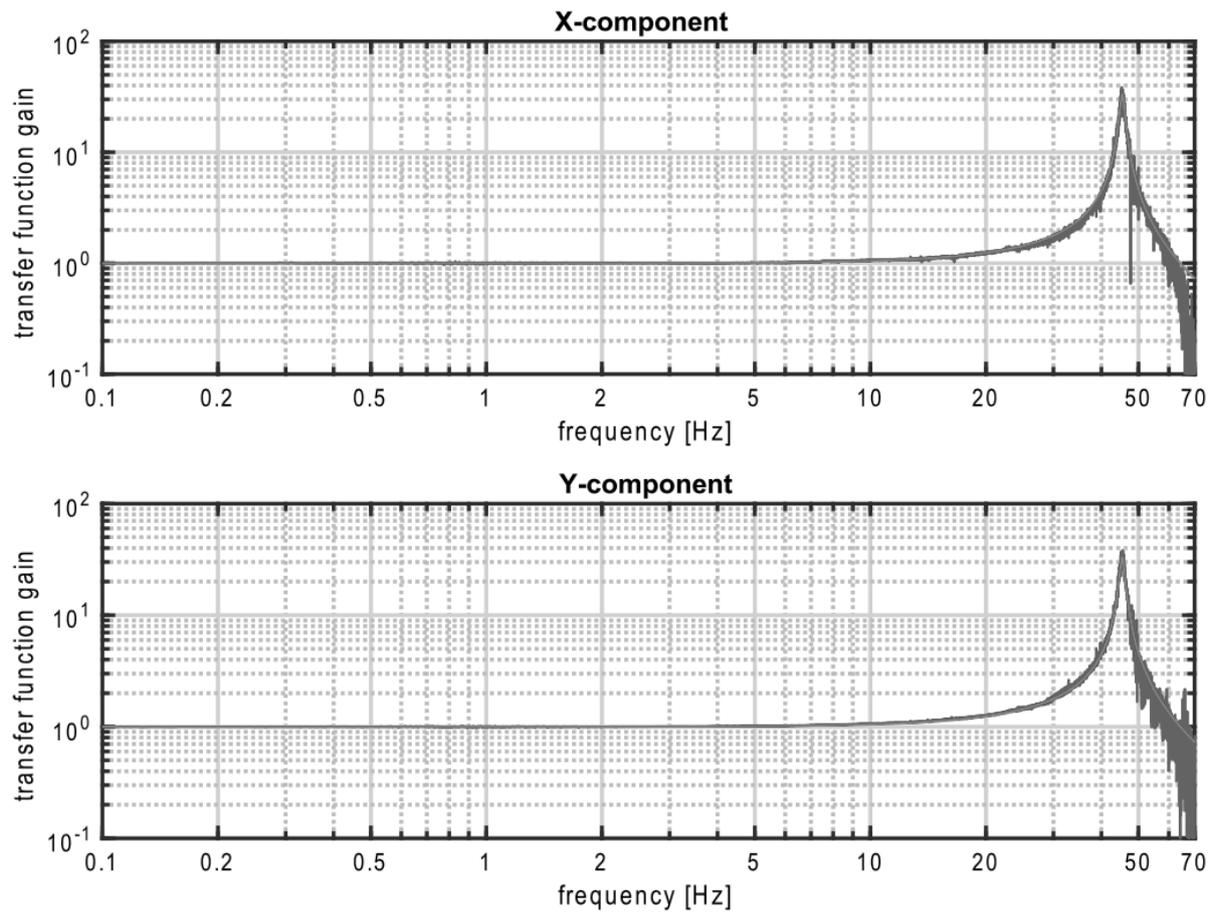


Figure 9 - Gain des fonctions de transfert des déplacements horizontaux du LVL (configuration avec les trois pieds allongés de 0,5 mm) : analytique et mesuré.

II. CAPTEURS LARGE BANDE VBB (*VERY BROAD BAND SENSORS*)

L'objectif de cette partie est de valider le comportement général du sismomètre VBB conformément aux exigences présentées dans le *Tableau 2*. Pour cela, il est proposé d'aborder successivement les éléments composant le VBB :

- modélisation de la liaison entre le pendule et le LVL ;
- caractérisation de la raideur de cette liaison en présence d'un élément flexible, le ressort lamellaire ;
- étude du comportement dynamique d'un des trois capteurs du VBB ;
- modélisation du comportement du sismomètre VBB à l'aide d'une modélisation par schéma-bloc.

Le VBB est un sismomètre très haute sensibilité à trois axes obliques. Il transforme le mouvement du sol en signal électrique analogique enregistré et numérisé par un système de traitement de données SEIS-AC.

Trois capteurs identiques sont utilisés pour mesurer les accélérations du sol sur les trois axes. Chacun des trois capteurs mesure les accélérations dans une direction unique dite axe de sensibilité du capteur.

Ils sont enfermés dans une sphère sous vide et sont orientés dans la sphère de façon à enregistrer les accélérations dans trois directions mesurant ainsi les mouvements sismiques en trois dimensions. Les mouvements verticaux et horizontaux sont reconstruits en combinant les résultats des trois capteurs après correction des fonctions de transfert.

Le VBB étant composé de trois systèmes similaires permettant la mesure des accélérations sur les trois axes, on se propose pour la suite de modéliser le fonctionnement d'un unique élément (*Figure 10*).

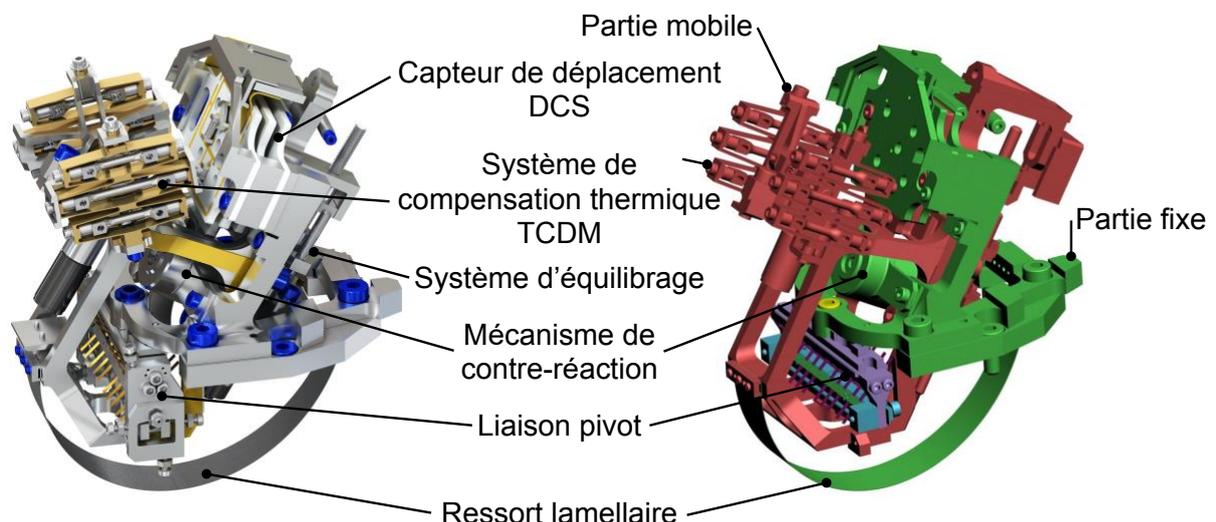


Figure 10 - Principaux éléments constitutifs d'un capteur composant le VBB.

Chaque capteur utilisé fonctionne sur le principe d'un pendule inversé : une partie mobile, de couleur rose sur la *Figure 10*, en liaison pivot avec une partie fixe, de couleur verte, liée au châssis (le LVL). Les vibrations sismiques transmises directement au châssis par l'intermédiaire des pieds télescopiques mettent en mouvement la partie mobile (appelée pendule par la suite), mouvement qui est

contrôlé par le mécanisme de contre réaction, le ressort lamellaire ainsi que les systèmes d'équilibrage et de compensation permettant de régler les oscillations en fonction de la température de fonctionnement. Le mouvement du pendule est relevé par le capteur de déplacement DCS, mesurant directement un déplacement entre deux points appartenant respectivement à la partie mobile et à la partie fixe. Le déplacement relevé est très faible (150 microns) et le DCS fonctionne avec un gain d'environ $3 \text{ V} \cdot \mu\text{m}^{-1}$. Ce déplacement permet alors de contrôler le système de contre-réaction, composé de deux bobines dont l'alimentation crée un effort de réaction sur le pendule utilisé pour stabiliser celui-ci autour de son point d'équilibre initial. La mesure des accélérations du sol est alors réalisée à partir de la valeur des tensions d'alimentation des bobines.

II.1 Modélisation de la liaison pivot du pendule avec le LVL

L'objectif de cette sous-partie est de caractériser la liaison entre le pendule et le LVL et de déterminer sa raideur.

La liaison pivot du pendule inversé est réalisée par 20 lamelles flexibles, réparties en 10 couples de lamelles symétriques, qui relient une poutre supérieure liée au LVL (partie fixe) à une poutre inférieure liée à la partie mobile du pendule inversé (*Figure 11*). Ces lamelles sont constituées d'un alliage de cuivre et de béryllium et sont d'épaisseur très faible (*Tableau 5*).

En se déformant, les lamelles permettent la mobilité de la poutre inférieure par rapport à la poutre supérieure de sorte que la liaison puisse être assimilée à une liaison pivot sans frottement possédant une raideur de torsion k . Cette liaison autorise un très faible débattement angulaire de la partie mobile et possède deux butées permettant d'éviter la rupture des lamelles.

Question 13 : Expliquer sans calcul comment cette conception permet de réaliser une liaison pivot.

Question 14 : On considère la poutre inférieure indéformable reliée à la poutre supérieure par les lamelles selon la configuration de la *Figure 12* : les lamelles sont encastées sur la poutre supérieure (considérée comme bâti) et en liaison pivot avec la poutre inférieure mobile. Déterminer l'expression du déplacement de l'extrémité des lamelles liées à la poutre inférieure mobile lorsque celle-ci a effectué une rotation d'un angle $\delta\theta$ autour de l'axe (O, \vec{e}_z) (on utilisera l'hypothèse de petits déplacements). À quel(s) type(s) de sollicitations sont soumises les lamelles ?

Afin de déterminer le couple de rappel de la liaison pivot lors d'une rotation autour de sa position d'équilibre, on propose de modéliser la déformation d'une lame, puis d'en déduire le comportement de l'ensemble de la structure. Le schéma correspondant est donné sur la *Figure 12* à droite.

La lame est considérée comme une poutre de direction (O, \vec{e}_x) et est soumise à un effort en son extrémité noté \vec{F} porté par l'axe \vec{e}_y .

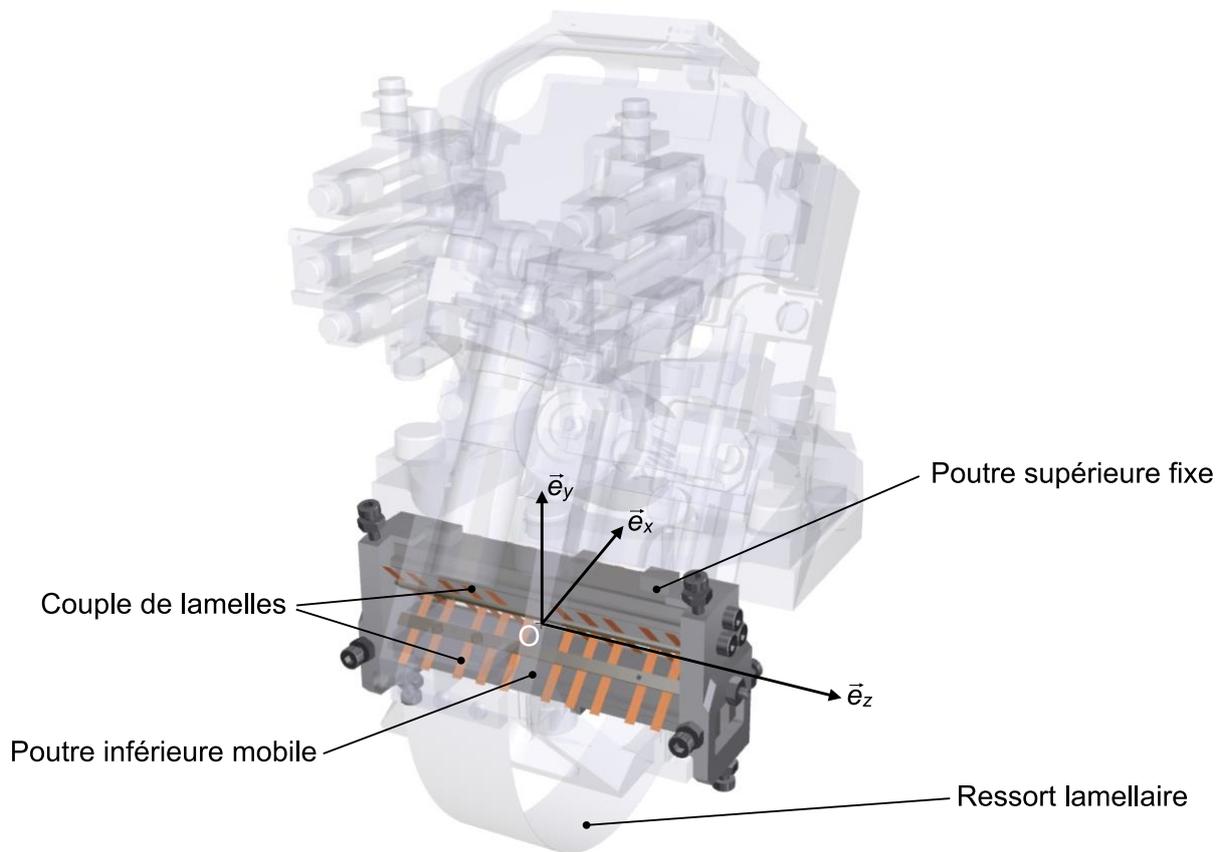


Figure 11 - Position et conception de la liaison pivot dans le pendule.

Géométrie d'une lamelle	Longueur	ℓ	4 cm
	Largeur	h	2 mm
	Épaisseur	e	45 μm
Alliage de cuivre et de béryllium	Module d'Young (à 20 °C)	E_l	138 GPa

Tableau 5 - Propriétés géométriques et matérielles des lamelles.

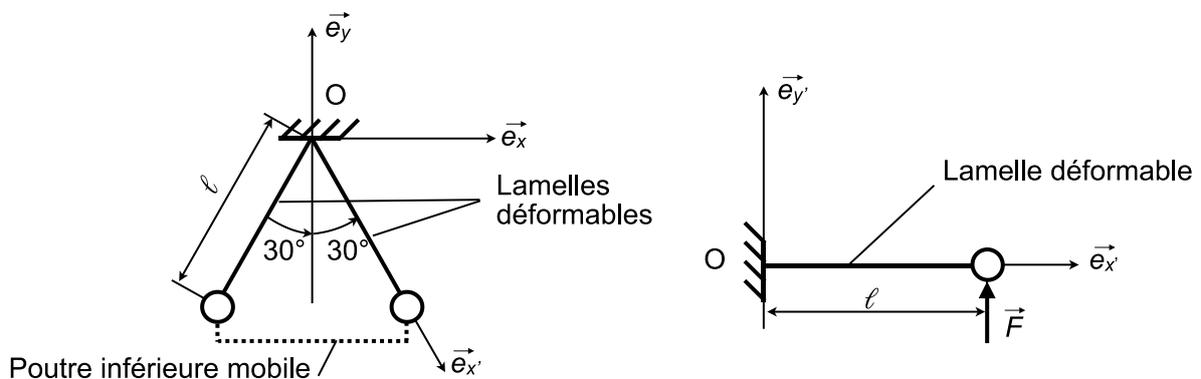


Figure 12 - Modélisation de la liaison pivot avec un couple de lamelles flexibles et modélisation de la sollicitation d'une seule lame (à droite).

Question 15 : Déterminer, à partir de la *Figure 12* droite, l'expression de la flèche à l'extrémité de la lame en fonction des propriétés géométriques et des paramètres du matériau d'une lame définis dans le *Tableau 5* ainsi que de l'effort F appliqué.

Question 16 : Déterminer alors l'expression de l'effort exercé par une lame sur la partie mobile en fonction de la rotation $\delta\theta$ et des données du problème.

Question 17 : En déduire la raideur équivalente k en rotation de la liaison réalisée par les 10 couples de lamelles. Exprimer k en fonction des données du problème. Préciser les unités.

Question 18 : On considère ici $k = \frac{60E_l I_l}{\ell}$ avec I_l le moment quadratique de section d'une lamelle. Estimer la valeur de la raideur k . Justifier l'hypothèse selon laquelle la liaison réalisée entre les deux poutres fixe et mobile peut être assimilée à une liaison pivot.

II-2 Caractérisation de la raideur du ressort lamellaire

L'objectif de cette sous-partie est de caractériser la raideur de la liaison pivot en présence du ressort lamellaire.

Le ressort lamellaire est une lame en demi-cercle d'une longueur de 12 cm et de largeur 1,66 cm. L'épaisseur de la lame n'est que de 0,22 mm. Il est constitué d'un matériau élastique appelé THERMELAST® qui est un alliage magnétique de fer et de nickel.

On souhaite déterminer la raideur équivalente en rotation c du ressort lamellaire. On propose pour cela d'étudier le ressort sollicité avec une charge $F\vec{e}_y$ par la méthode des éléments finis selon la *Figure 13*.

On choisit un maillage homogène composé de n éléments de type poutre d'Euler Bernoulli. On note (u_i, v_i, θ_i) les trois degrés de liberté du nœud i dans le plan d'étude $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Dans le repère local, le vecteur des degrés de liberté d'un élément i est alors $[U_i] = [u_i, v_i, \theta_i, u_{i+1}, v_{i+1}, \theta_{i+1}]^T$ et la matrice de rigidité élémentaire de flexion associée dans ce même repère est rappelée en *Annexe 2*.

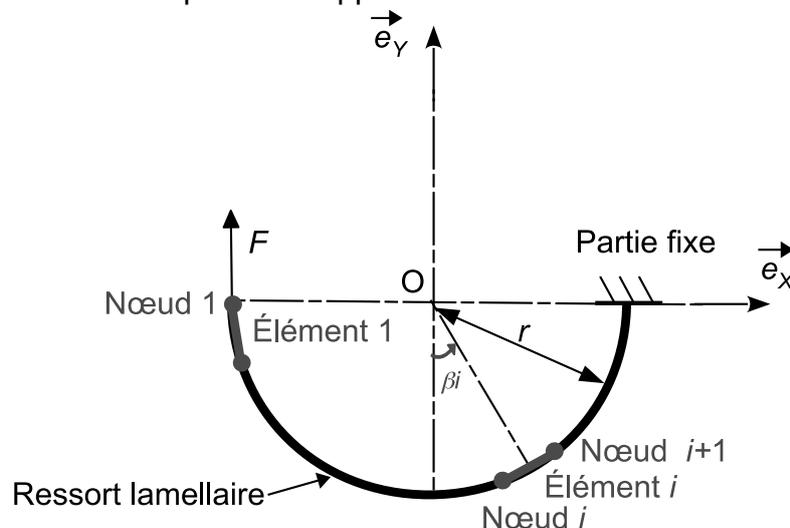


Figure 13 - Modélisation éléments finis du ressort lamellaire.

Question 19 : Déterminer la taille l_e des éléments du maillage en fonction du nombre d'éléments et des dimensions du ressort.

Question 20 : On repère par l'angle β_i l'orientation du $i^{\text{ème}}$ élément par rapport au repère global $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ telle que représentée sur la *Figure 13*. Exprimer β_i en fonction du nombre d'éléments.

Question 21 : Déterminer la matrice de passage $[P_i]$ permettant d'établir une relation entre les degrés de liberté $[U_i]$ dans le système de coordonnées locales et les degrés de liberté $[U'_i]$ dans le système de coordonnées globales (\vec{e}_x, \vec{e}_y) en fonction de β_i , telle que $[U_i] = [P_i][U'_i]$.

Une fois assemblée avec le changement de base effectué, la modélisation éléments finis conduit à un système linéaire à résoudre $[K'] [U'] = [F']$ avec $[K']$ la matrice de rigidité et $[F']$ le vecteur des chargements exprimés dans le système de coordonnées globales.

Question 22 : Pour un maillage avec $n = 2$ éléments finis, expliquer (sans développer les produits de matrices) comment obtenir la matrice de rigidité $[K']$ et le vecteur des chargements $[F']$ en tenant compte des conditions aux limites. Préciser la taille du système obtenu.

Question 23 : Les résultats de calcul avec un maillage fin avec 20 éléments finis sont donnés en *Annexe 2, Figures 26, 27 et 28*. Estimer la raideur c de la liaison en exploitant ces résultats. Discuter l'intérêt de choisir le THERMELAST® pour la lame.

II-3 Étude du comportement dynamique du pendule inversé

L'objectif est de caractériser le comportement dynamique d'un des trois capteurs du VBB et de vérifier les performances vis-à-vis des exigences 1.1 et 1.2 du *Tableau 2*.

La partie mobile du pendule inversé, modélisé sur la *Figure 14*, est suspendue au LVL au travers d'une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) , réalisée par éléments flexibles, et d'un ressort lamellaire (*Figure 11*). Les éléments flexibles confèrent à la liaison pivot une raideur de torsion très faible selon la rotation autour de cet axe et très grande pour les autres degrés de mobilité. L'ensemble est mis en mouvement par les vibrations supposées verticales de la surface martienne par rapport au référentiel martien supposé galiléen.

On néglige par la suite l'action du mécanisme de contre-réaction.

Les données relatives au pendule sont :

- la distance a de l'axe de la liaison pivot au centre de masse G du pendule telle que $a = \|\vec{OG}\|$;
- la masse du pendule notée m ;
- le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de la liaison pivot noté J ;
- la raideur de torsion due au ressort lamellaire notée c ;

- la raideur de torsion due aux éléments flexibles de la liaison pivot notée k ;
- l'accélération de la pesanteur sur Mars telle que $\vec{g} = -g\vec{z}$;
- l'accélération du LVL (la partie fixe du pendule) telle que $\vec{\gamma}_{sol} = \gamma_{zsol}\vec{z}$.

Lors des différents calculs, on notera le pendule S_2 , le support S_1 et le référentiel martien supposé galiléen \mathcal{R}_0 .

La position du pendule dans sa position d'équilibre (lors d'une activité sismique nulle avec pendule immobile) est repérée avec l'angle α que fait le pendule par rapport à la verticale : $\alpha = (\vec{z}, \overrightarrow{OG})$.

Question 24 : On note α_0 l'angle à vide des ressorts. Donner l'expression reliant l'angle α à l'accélération de la pesanteur et aux autres données du pendule en position d'équilibre.

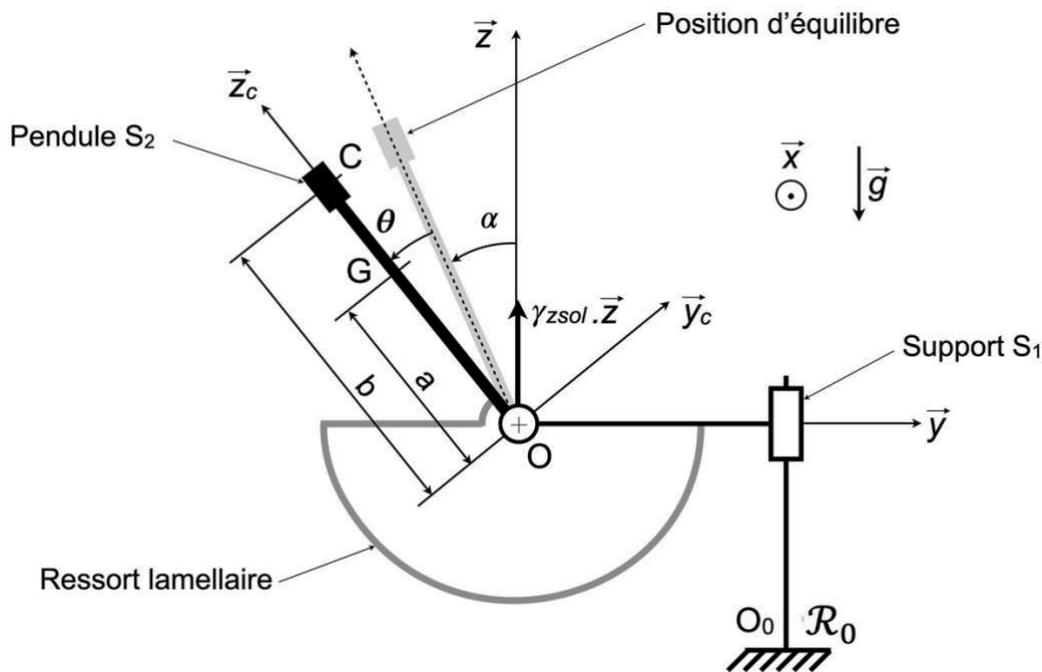


Figure 14 - Pendule inversé du VBB. Géométrie et paramétrage.

Question 25 : On note θ l'angle que fait le pendule par rapport à sa position d'équilibre. Calculer le moment dynamique $\vec{\delta}_{O,S_2/\mathcal{R}_0}$ en O du pendule inversé S_2 dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 .

Question 26 : Appliquer le théorème du moment dynamique en O à S_2 et déterminer l'équation de mouvement du pendule en fonction de l'accélération du sol γ_{zsol} et des différents paramètres de l'énoncé. Éliminer le paramètre α_0 de l'équation obtenue en utilisant le résultat de la question 24 afin d'obtenir l'équation de mouvement autour de la position d'équilibre.

Question 27 : On suppose que les variations de l'angle θ restent très faibles durant l'utilisation du mécanisme, et que le terme de moment dynamique $ma\gamma_{zsol}$ reste

négligeable devant le terme $c + k - mag \cos \alpha$. Linéariser l'équation obtenue à la question précédente.

Question 28 : Montrer que la fréquence propre du pendule inversé est de la forme

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{J}} \text{ où } K \text{ est la raideur équivalente du pendule qu'on explicitera.}$$

Le pendule a pour objectif d'amplifier le mouvement de la surface de Mars. On évalue la performance du pendule à remplir cet objectif avec le gain mécanique défini par :

$$G = \lim_{\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \rightarrow 0} \frac{Y_C}{\Gamma_{y_c, sol}}$$

où Y_C est l'amplitude du déplacement généré au niveau du capteur, $\Gamma_{y_c, sol}$ est l'amplitude des accélérations $(\gamma_{zsol} \vec{z}) \cdot \vec{y}_C$ avec \vec{y}_C l'axe de sensibilité du capteur, ω_0 la pulsation propre du pendule inversé et Ω la pulsation des ondes sismiques observées.

Question 29 : Expliquer la signification physique du gain mécanique G vis-à-vis du fonctionnement du capteur.

Question 30 : Montrer que le gain du pendule inversé est $G = \frac{mab}{K}$.

Question 31 : D'après l'expression du gain, quels paramètres du pendule peut-on modifier pour augmenter le gain ? Discuter notamment l'influence de l'orientation α et sa valeur idéale pour avoir un gain maximal. Quel est l'impact d'un défaut d'inclinaison δ du LVL ?

Les trois pendules sont finalement optimisés pour Mars avec une constante de gravité $g = 3,711 \text{ m.s}^{-2}$ afin de réduire le bruit de mesure. L'orientation des capteurs autour de 30° retenue permet d'optimiser le gain mécanique tout en limitant le bruit de mesure propre sur l'accélération verticale recomposée (étudiée dans la partie 3). Leurs propriétés sont résumées dans le *Tableau 6*.

Instrument	J (kg·m ²)	ma (kg·m)	b (m)	α (°)
VBB	$2,71 \cdot 10^{-4}$	$4,88 \cdot 10^{-3}$	0,057	29,33

Tableau 6 - Caractéristiques des trois pendules du VBB optimisé pour Mars.

Question 32 : Déterminer les caractéristiques du VBB optimisé : rigidité K , gain G et fréquence propre f_0 . Conclure vis-à-vis des exigences 1.1 et 1.2.

II.4 Modélisation par schéma-bloc du comportement du sismomètre VBB

L'objectif de cette sous-partie est de régler la commande du dispositif de contre-réaction du sismomètre VBB à l'aide d'une modélisation par schéma-bloc afin de vérifier l'exigence 1.3 relative à la capacité de mesure du VBB.

À chaque mouvement du sol, le déplacement de la partie mobile du pendule par rapport à la partie fixe est mesuré électriquement grâce aux électrodes du capteur DCS.

Le dispositif de contre-réaction est constitué d'un ensemble de deux bobines concentriques imbriquées fixées sur la partie mobile et qui accueillent en leur centre un aimant, boulonné sur la partie fixe.

- La première bobine est adaptée à la mesure de signaux sismiques de courtes périodes, dont les oscillations ont lieu sur des intervalles de temps courts, inférieurs à 50 s. Son rôle principal est d'amortir les secousses trop brusques et la résonance du pendule, et d'empêcher ce dernier de venir cogner contre les butées de protection.
- La bobine interne, plus petite, a été conçue au contraire pour intervenir lors de signaux sismiques à longue période. Sa caractéristique principale est d'être capable de suivre ces oscillations lentes, et ce malgré les variations inéluctables de température qui ont lieu au cours du temps, entre le jour et la nuit.

À chaque fois que la masse mobile va se déplacer sous l'effet d'une vibration, des courants électriques générés à partir de la tension de sortie du DCS sont envoyés dans les deux bobines de contre-réaction situées sur la partie mobile du pendule. En interagissant avec le champ magnétique créé par l'aimant fixé sur la partie fixe, ces courants vont créer une force de rappel s'opposant au déplacement du pendule.

Le schéma-bloc fonctionnel relatif au fonctionnement de cette rétroaction est présenté *Figure 15*.

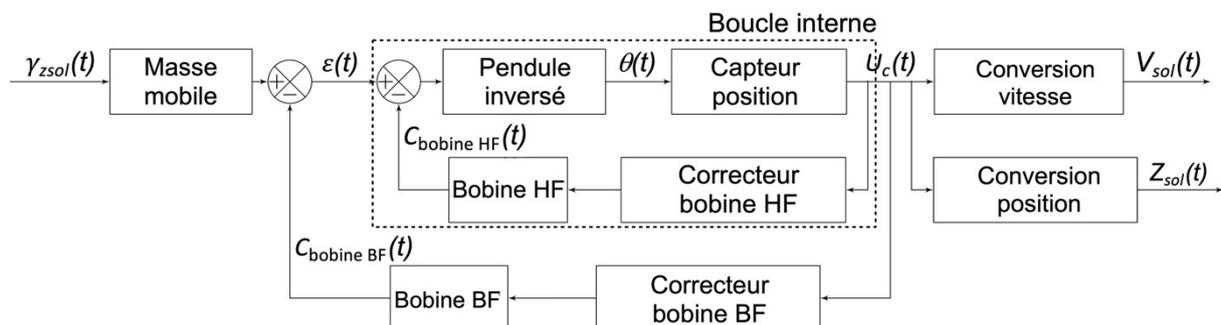


Figure 15 - Schéma-bloc fonctionnel du sismomètre VBB.

On souhaite dans cette partie montrer que le système de contre-réaction permet bien de stabiliser le pendule lorsque celui-ci est soumis à une accélération et qu'il permet de mesurer le déplacement et la vitesse du sol lorsqu'une secousse sismique apparaît.

Dans un premier temps, on s'intéresse au schéma-bloc de la boucle interne présenté sur la *Figure 16*.

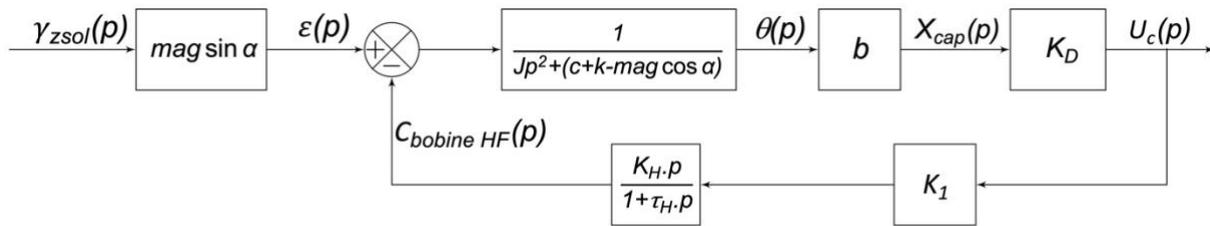


Figure 16 - Schéma-bloc de la boucle interne.

Sur ce schéma-bloc apparaissent les éléments suivants :

- γ_{zsol} l'accélération du sol selon l'axe \vec{z} ;
- ϵ la sortie du comparateur de la boucle externe ;
- θ l'angle de déplacement du pendule autour du point d'équilibre ;
- X_{cap} l'écart entre la partie fixe et la partie mobile mesurée par le capteur ;
- U_c la tension générée par le capteur à partir de la mesure de X_{cap} ;
- $C_{bobine HF}$ le couple appliqué par la bobine haute fréquence sur la partie fixe.

Pour la suite, on donne les valeurs suivantes pour les constantes présentes sur le schéma-bloc de la boucle interne issues des modélisations réalisées précédemment :

- $mag \sin \alpha = 8,87 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}^2$;
- $J = 2,71 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
- $c + k - mag \cos \alpha = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$;
- $b = 0,057 \text{ m}$;
- $K_D = 2,6 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$;
- $K_H = 3 \cdot 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{V}^{-1}$;
- $\tau_H = 0,001 \text{ s}$.

Question 33 : Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert de la boucle interne $\frac{U_c(p)}{\epsilon(p)}$ (on pourra noter $A = c + k - mag \cos \alpha$ pour alléger la notation).

Question 34 : Déterminer la condition sur K_1 permettant d'assurer la stabilité de la boucle interne à l'aide du critère de Routh.

La *Figure 17* présente le tracé de Bode de la fonction de transfert $\frac{U_c(p)}{\epsilon(p)}$ pour différentes valeurs de K_1 .

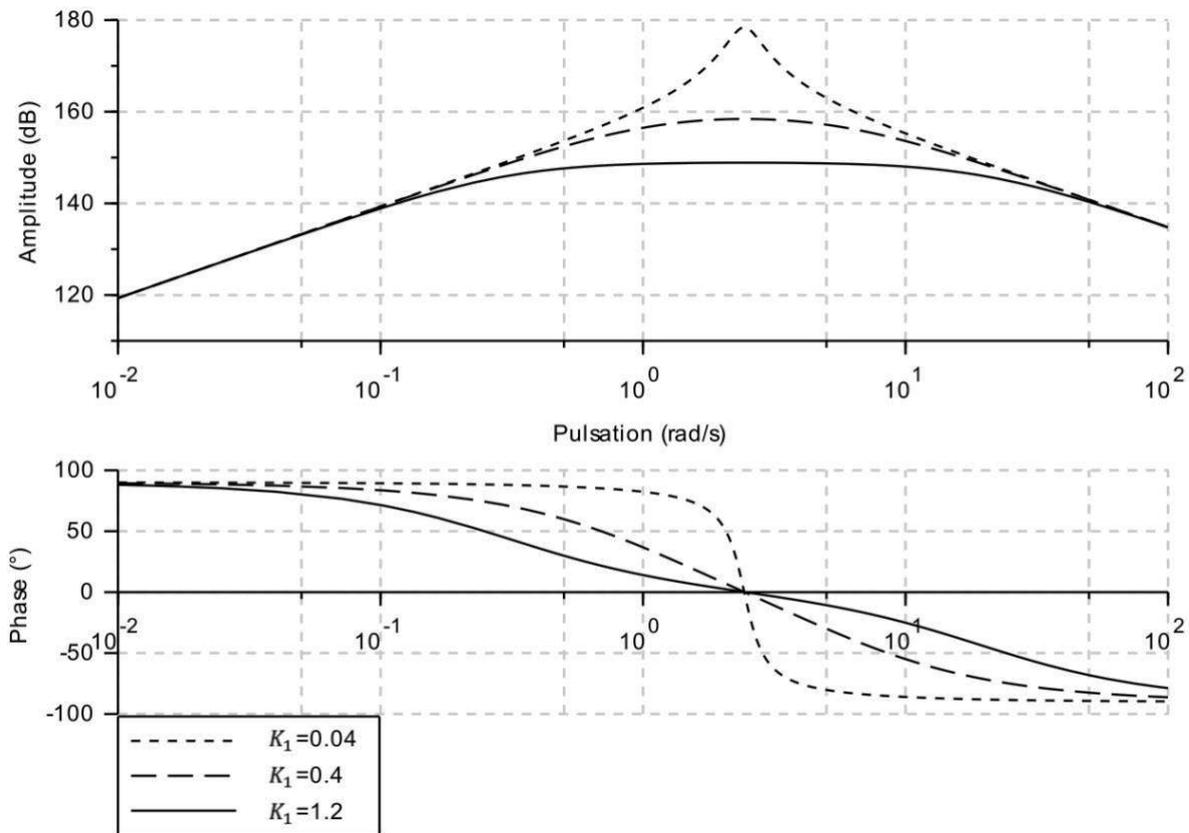


Figure 17 - Diagramme de Bode de la boucle interne.

Les pôles de la fonction de transfert $\frac{U_c(p)}{\varepsilon(p)}$ obtenus pour les différentes valeurs de K_1 sont donnés dans le *Tableau 7*.

K_1	Pôle 1	Pôle 2	Pôle 3
0,04	$-9,99 \cdot 10^2$	$-3,36 \cdot 10^{-1} + 2,41j$	$-3,36 \cdot 10^{-1} - 2,41j$
0,4	$-9,93 \cdot 10^2$	-5,54	-1,07
1,2	$-9,79 \cdot 10^2$	-19,7	-0,3

Tableau 7 - Pôle de la fonction de transfert $\frac{U_c(p)}{\varepsilon(p)}$.

On souhaite qu'il n'y ait pas de résonance dans la boucle interne pour limiter les distorsions du signal, tout en conservant la boucle la plus rapide possible.

Question 35 : D'après le *Tableau 7*, proposer la valeur de K_1 la plus adaptée au réglage de la boucle interne (on pourra également s'appuyer sur les valeurs des pôles données précédemment). À partir de l'étude des pôles, justifier que la fonction de transfert de la boucle interne peut s'écrire sous la forme suivante $\frac{U_c(p)}{\varepsilon(p)} =$

$$\frac{(1 + \tau_H p) b K_D}{J \tau_H (p - p_2)(p - p_3)}$$

Pour la suite des questions, on conservera l'expression simplifiée de la question précédente pour la fonction de transfert $\frac{U_c(p)}{\varepsilon(p)}$. On rappelle que pour un système stable (hypothèse vérifiée précédemment), le théorème de la valeur finale appliqué à une fonction $f(t)$ de transformée de Laplace $F(p)$ s'écrit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p)$.

Question 36 : Montrer que cette boucle seule (en ne tenant pas compte de la seconde boucle d'asservissement), ne permet pas d'avoir un déplacement du pendule nul lorsque l'accélération γ_{zsol} est constante. On posera γ_{z0} l'amplitude de l'accélération verticale du sol supposée constante.

Le schéma-bloc du système avec les deux boucles de rétroaction peut alors se mettre sous la forme donnée sur la *Figure 18*.

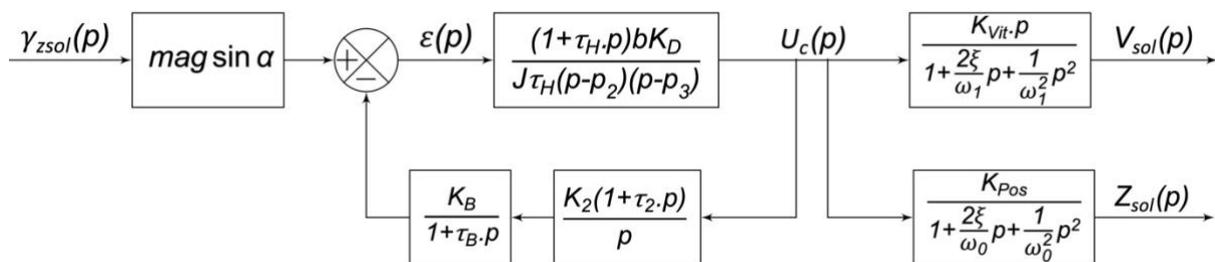


Figure 18 - Schéma-bloc du système complet.

Sur ce schéma-bloc apparaissent en plus du schéma donné sur la *Figure 16* les éléments suivants :

- V_{sol} l'image de la vitesse du sol envoyée par le sismomètre au système de traitement de données SEIS-AC ;
- Z_{sol} l'image de déplacement du sol envoyée par le sismomètre au système de traitement de données SEIS-AC.

On donne également à titre informatif les valeurs numériques suivantes :

$$\tau_B = 0,1 \text{ s} ; \xi = 1 ; \omega_0 = 0,31 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} ; \omega_1 = 62,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} ; K_B = 5 \cdot 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{V}^{-1} ;$$

Question 37 : Déterminer l'expression de la fonction de transfert $H(p) = \frac{U_c(p)}{\gamma_{zsol}(p)}$ du système complet dont le schéma-bloc est donné *Figure 18*.

Question 38 : Montrer que le système ainsi contrôlé permet d'avoir un déplacement nul du pendule pour une accélération constante γ_{z0} .

Question 39 : Dans le contexte d'utilisation du système, quel est l'intérêt de la propriété explicitée à la question précédente ?

On souhaite régler dans cette partie la correction de la seconde boucle d'asservissement. Pour cela, des simulations sont faites en modifiant les valeurs des différents paramètres et en regardant leur influence sur le comportement en fréquence du système ainsi que sur la vitesse de réponse du système.

La réponse fréquentielle du système de fonction de transfert $H(p) = \frac{U_c(p)}{\gamma_{zso}(p)}$ en fonction du temps caractéristique τ_2 est donnée sur la Figure 19.

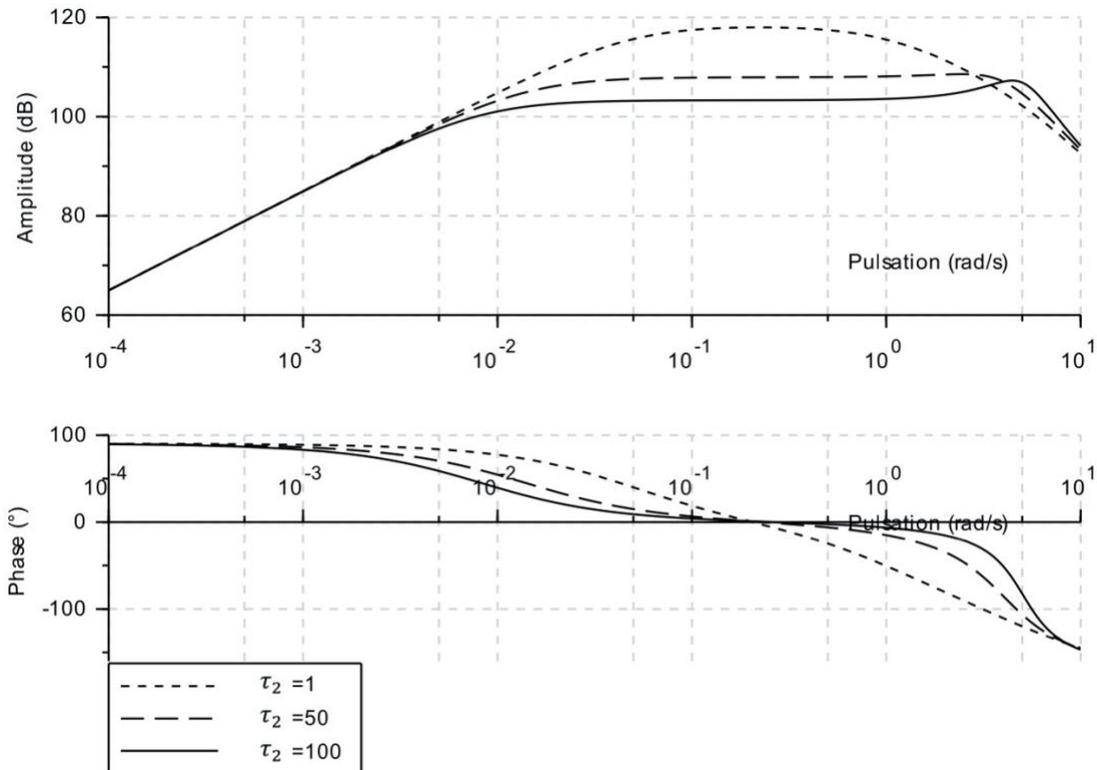


Figure 19 - Réponse fréquentielle du système de fonction de transfert $H(p) = \frac{U_c(p)}{\gamma_{zso}(p)}$ en fonction des valeurs de τ_2 .

Question 40 : À partir des caractéristiques attendues du système, quelle valeur de τ_2 vous paraît la plus pertinente. Justifier.

On souhaite maintenant déterminer la valeur de K_2 permettant d'assurer des mesures dans les meilleures conditions possibles. Les simulations ont permis de déterminer les réponses temporelles et fréquentielles du système pour différentes valeurs de K_2 (Figure 20).

Question 41 : Déterminer le gain minimum de la chaîne d'acquisition du VBB permettant de valider l'exigence 1.3 sur la plage de fréquence attendue.

Question 42 : En déduire la valeur de K_2 la plus pertinente pour l'application envisagée. Justifier.

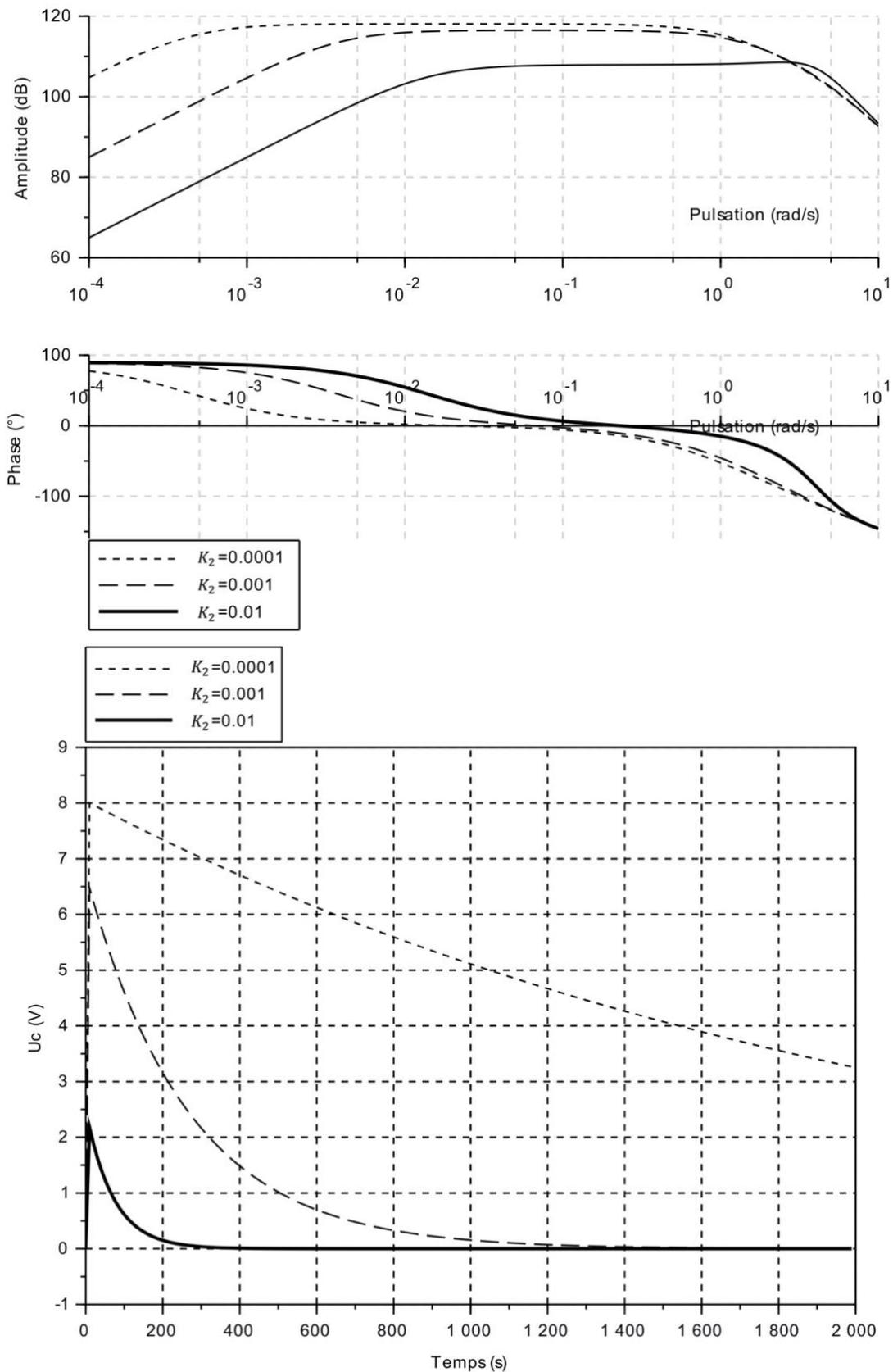


Figure 20 - Réponse fréquentielle du système de fonction de transfert $H(p)$ en fonction des valeurs de K_2 (en haut) et réponse temporelle à une entrée échelon d'amplitude $10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ (en bas).

III. PERFORMANCES DU VBB SUR MARS

L'objectif de cette partie est d'estimer le bruit de mesure propre du VBB sur l'accélération verticale recomposée à partir des mesures des capteurs en regard de l'exigence 1.4 et de conclure sur la validation de la structure retenue pour le sismomètre large bande VBB.

III.1 Estimation du bruit de mesure

Les trois pendules du VBB sont répartis à 120° les uns des autres autour de l'axe vertical et leurs directions de sensibilité sont toutes inclinées d'un même angle α par rapport à l'horizontale.

Cette configuration permet aux sismomètres d'enregistrer les accélérations selon les directions des axes de sensibilité $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Les mouvements verticaux et horizontaux de la surface de Mars sont alors reconstruits en combinant les résultats issus de la mesure des trois capteurs après correction des fonctions de transfert.

On note $\gamma_{usol} = \vec{\gamma}_{sol} \cdot \vec{u}$, $\gamma_{vsol} = \vec{\gamma}_{sol} \cdot \vec{v}$ et $\gamma_{wsol} = \vec{\gamma}_{sol} \cdot \vec{w}$ les accélérations mesurées respectivement dans les trois directions \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} . Les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont unitaires.

La Figure 21 présente une configuration dans laquelle la direction de mesure \vec{u} du premier capteur correspond à la direction \vec{y}_C de la Figure 14.

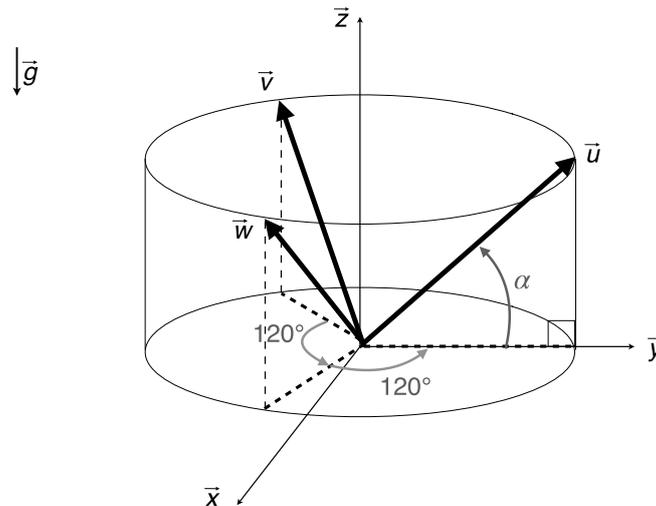


Figure 21 - Directions de mesure des accélérations \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} des trois pendules du VBB positionnés à 120° les uns des autres dans la sphère.

Question 43 : On considère une accélération $\vec{\gamma}_{sol} = \gamma_{xsol} \cdot \vec{x} + \gamma_{ysol} \cdot \vec{y} + \gamma_{zsol} \cdot \vec{z}$ du sol martien. Écrire, sans résoudre, le système d'équations linéaires permettant de déterminer les accélérations horizontale et verticale du sol en fonction des accélérations γ_{usol} , γ_{vsol} et γ_{wsol} mesurées par les trois capteurs. En déduire l'expression de l'accélération reconstruite γ_{zsol} en fonction de γ_{usol} , γ_{vsol} et γ_{wsol} .

Les performances du SEIS dépendent du bruit interne des sismomètres car c'est ce bruit qui détermine le plus petit signal détectable sur Mars. Les sources du bruit sont à la fois environnementales et électroniques.

Question 44 : Proposer des sources possibles de bruit mesuré par les capteurs et les bandes de fréquences concernées par ces bruits. Expliquer les phénomènes physiques induits par ces sources sur le VBB.

Question 45 : On suppose les mesures de chacun des trois capteurs bruités avec un bruit telles que les accélérations mesurées sont : $\gamma_{usol} + \varepsilon$, $\gamma_{vsol} + \varepsilon$ et $\gamma_{wsol} + \varepsilon$. Donner l'expression de l'accélération reconstruite γ_{zsol} en fonction des accélérations mesurées et du bruit. Comment varie l'impact des bruits de mesures propres des capteurs sur l'accélération verticale reconstruite quand on augmente l'inclinaison α des capteurs ?

Le bruit interne du SEIS a fait l'objet d'une campagne de mesures sur Terre. Le niveau de bruit exigé étant très faible, il a fallu reproduire les conditions de Mars pour les essais, notamment reproduire la gravité de Mars.

Question 46 : Le SEIS est posé sur un goniomètre pour incliner les capteurs VBB et SP. Proposer un raisonnement, avec l'appui d'un schéma, pour calculer l'inclinaison nécessaire d'un VBB pour reproduire sur Terre la gravité de Mars. Donner une valeur de cette inclinaison.

Les bruits mesurés et modélisés sont représentés sur la *Figure 22*. Les différentes mesures correspondent à des conditions différentes de reproduction de l'environnement de Mars.

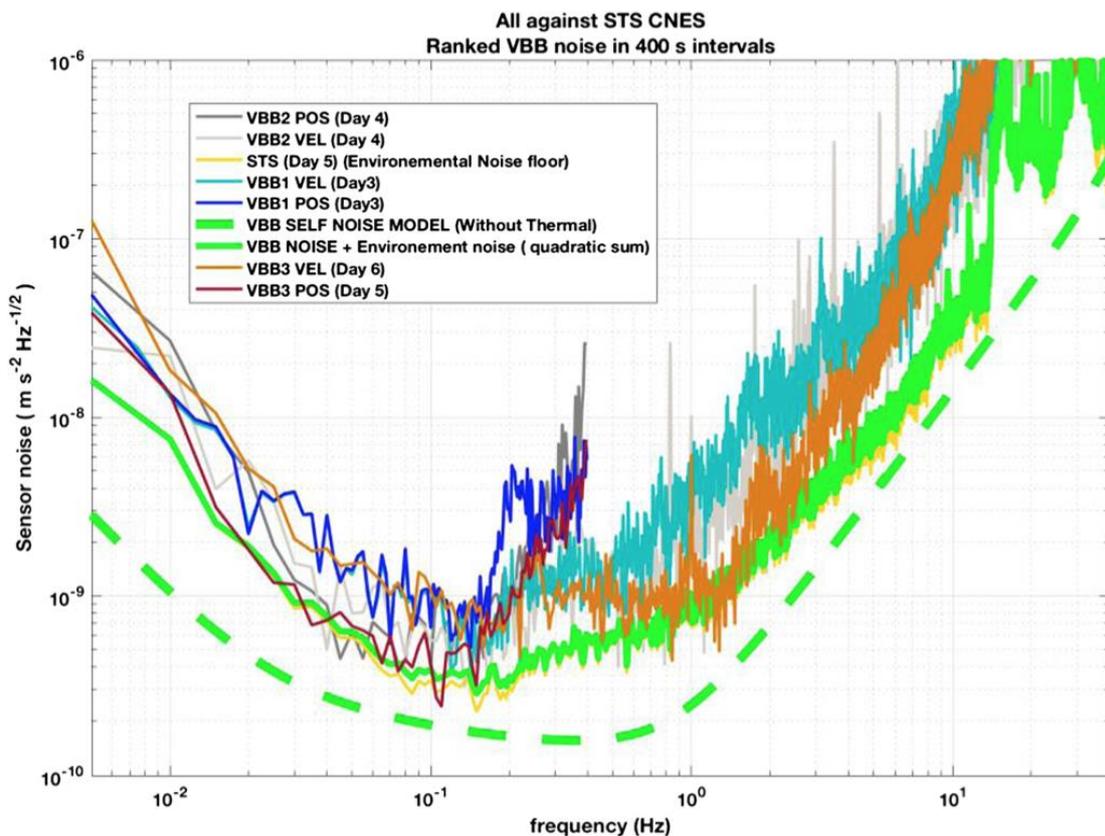


Figure 22 – Bruits des VBB mesurés par le CNES pour différentes configurations des VBB.

Question 47 : Après analyse du bruit du VBB (courbe continue épaisse « *VBB NOISE + Environement noise* » - *Figure 22*), conclure quant à la satisfaction de l'exigence 1.4.

III.2 Conclusion

Question 48 : Reprendre l'ensemble des études effectuées et justifier la démarche suivie dans le sujet vis-à-vis de la problématique technique énoncée en préambule.

DOCUMENTATION TECHNIQUE

Annexe 1 : Pied du LVL

Géométrie du pied

Matériau du pied

Modes propres

Annexe 2 : Ressorts lamellaires

Matrice de rigidité élémentaire de poutre

Géométrie du ressort lamellaire

Matériau du ressort lamellaire

Résultat du calcul éléments finis sur le ressort lamellaire

Annexe 1 : Pied du LVL

Géométrie du pied

Géométrie du pied	Diamètre	25 mm
	Épaisseur	0,1 mm
	Longueur	15 cm

Tableau 8 - Propriétés géométriques du pied choisies pour le calcul des fréquences propres.

Matériau du pied

Le pied est réalisé en Invar, alliage de Fer et de Nickel.

Invar	Module d'Young à 20 °C	E	140 GPa
	Densité		8
	Coefficient de dilatation thermique $< 90^\circ$	α	$2 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

Tableau 9 - Propriétés de l'Invar.

Modes propres

Mode propre 1 - $f=4017 \text{ Hz}$

Mode propre 2 - $f=13017 \text{ Hz}$

Mode propre 3 - $f=27158 \text{ Hz}$

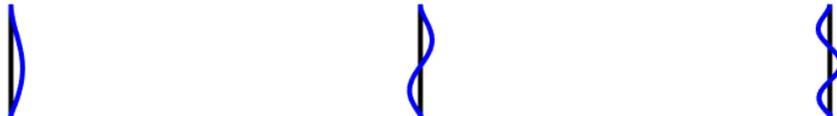


Figure 23 - Les trois premiers modes propres du pied.

Annexe 2 : Ressorts lamellaires

Matrice de rigidité élémentaire de poutre

Matrice de rigidité élémentaire de flexion dans le repère local d'un élément de longueur l_e .

$$[K_e] = E \begin{bmatrix} \frac{S}{l_e} & 0 & 0 & -\frac{S}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{I}{l_e^3} & 6\frac{I}{l_e^2} & 0 & -12\frac{I}{l_e^3} & 6\frac{I}{l_e^2} \\ 0 & 6\frac{I}{l_e^2} & 4\frac{I}{l_e} & 0 & -6\frac{I}{l_e^2} & 2\frac{I}{l_e} \\ -\frac{S}{l_e} & 0 & 0 & \frac{S}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{I}{l_e^3} & -6\frac{I}{l_e^2} & 0 & 12\frac{I}{l_e^3} & -6\frac{I}{l_e^2} \\ 0 & 6\frac{I}{l_e^2} & 2\frac{I}{l_e} & 0 & -6\frac{I}{l_e^2} & 4\frac{I}{l_e} \end{bmatrix}$$

où S est la section de la lame, I le moment quadratique de section selon l'axe perpendiculaire au plan de représentation de la *Figure 13* et E le module d'Young du matériau.

Géométrie du ressort lamellaire

Géométrie du ressort lamellaire	Rayon R	3,82 cm
	Largeur	1,66 cm
	Épaisseur	0,22 mm

Tableau 10 - Propriétés géométriques du ressort lamellaire.

Matériau du ressort lamellaire

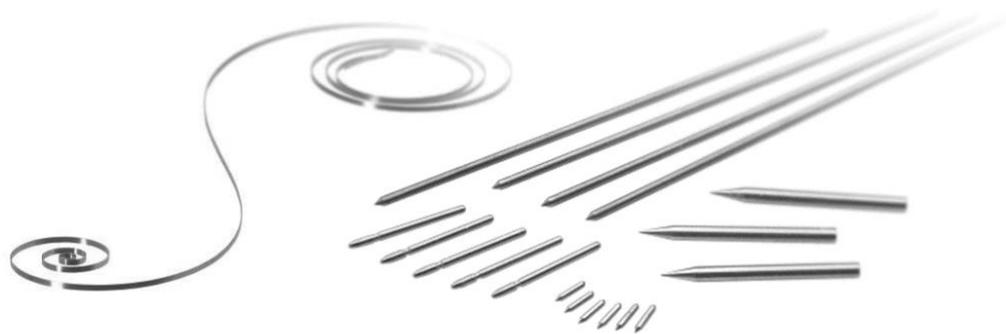
Le ressort lamellaire est réalisé en THERMELAST® qui est un alliage magnétique de fer et de nickel dont les propriétés sont présentées dans les *Figures 24 et 25*.

	d (g cm^{-3})	T_m ($^{\circ}\text{C}$)	T_c ($^{\circ}\text{C}$)	ρ ($\mu\Omega \text{ cm}$)	α (10^{-6} K^{-1})	E (10^{10} Pa)	e (10^{-5} K^{-1})	G (10^{10} Pa)
Durinal			90				-1.0-1.0	
Elinvar		1420-1450	-100		8	7.8-8.3	-0.3-0.3	
Elinvar Extra ^a	8.15				6.5	18.9	0	6.9
Iso-elastic				88	6.7	18.0	-3.3-2.5	6.4
Métélinvar			260, 295				0	
Ni-Span C	8.15	1450-1480		80	7.1	18.9	-1.7-1.7	
Ni-Span C 902 ^a	8.14	1460-1480	160-190	100-120	8.1	17.7-19.6		6.9-7.4
Nivarox CT	8.3		80	97	7.5	18.6	-2.5-2.5	
Sumi-Span 1	8.15		-140	100	-10	18.1	0-2.5	
Sumi-Span 2	8.08		-190	105	-10	18.1	-1.5-0 ^b	
Sumi-Span 3 ^a	8.05		-190	110	≈ 8	19.2	-1.0-1.0	7.8
Thermelast 4002 ^a	8.3			100	8.5	18.6		6.4
Thermelast 4005 ^a	8.3			100	8.3	17.2		6.4
Thermelast 5405 ^a	8.3			100	8.0	18.6		6.4
Thermelast 5429 ^a	8.3			100	8.0	18.6		6.4
Vibrallloy ^a	8.3		300		8	17.4	0	
YNiC	8.15		90-180		8.1	19.6	-1.8-1.5	6.5-6.8

^a Properties in the fully aged state

^b Temperature coefficient of the frequency of proper vibration

Figure 24 - Propriétés d'alliages de fer et nickel (Fe-Ni) : densité d , température de fusion T_m , Température de Curie T_c , résistivité électrique ρ , coefficient d'expansion thermique α , module d'Young E , coefficient de variation thermique e , module de cisaillement G (extrait de [Harada *et al*, Magnetic materials, Springer Berlin Heidelberg, 2005]).



SPRING MATERIALS

The age hardenable spring materials of VACUUMSCHMELZE enable the highest durability values. Each spring alloy has a variety of additional properties (see table) allowing precise matching to the application requirements. Further details are available on request.

NIVAFLEX® 45/5 AND 45/18

with extremely high strength, e.g. for main springs in mechanical watches and pivot pins for water meters and smallest-scale motors

DURATHERM® 418

as an implant material for dental braces

DURATHERM 600

as corrosion-resistant retainer springs – e.g. in the chemical industry

DURACON® 17A

as a contact-spring material – e.g. for test tips and temperature-resistant connector assemblies

THERMELAST® 4002

as a constant modulus alloy, e.g. for positioning sensors

FORMS OF DELIVERY:

- wires \varnothing 0,2 - 3 mm
- cold-drawn rods on request

	max. Yield Strength R_m (MPa)	max. Hardness HV	Additional Properties
NIVAFLEX 45/5	3 000	800	Corrosion-resistant, non-magnetic
NIVAFLEX 45/18	2 900	800	Corrosion-resistant, non-magnetic
DURATHERM 418	2 900	800	Corrosion-resistant, non-magnetic, implant-manufacturing material
DURATHERM 600	2 200	600	Corrosion- and temperature-resistant, non-magnetic
DURACON 17A	1 800	480	Electrical conductivity, temperature resistance
THERMELAST 4002	1 400	420	Constant modulus alloy between -30 °C and +70 °C

all data: typical values after age-hardening

© = registered trademark of VACUUMSCHMELZE GmbH & Co. KG

Figure 25 - Extrait du catalogue du fournisseur.

Résultat du calcul éléments finis sur le ressort lamellaire

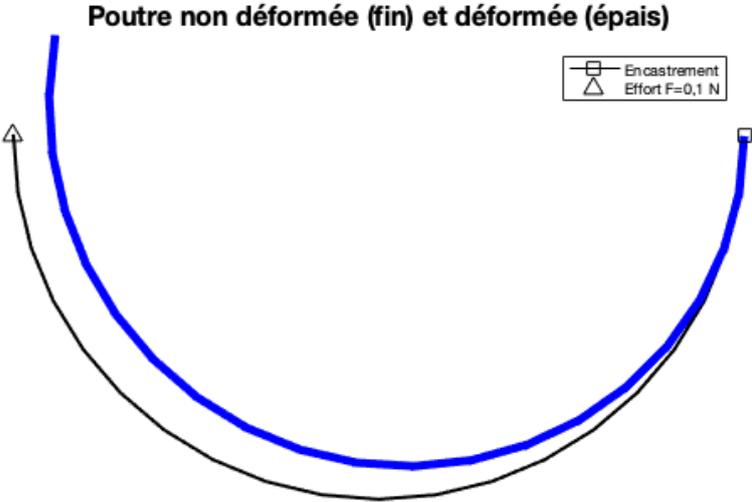


Figure 26 - Ressort lamellaire non déformé (courbe fine) et déformé (courbe épaisse) obtenu par calcul éléments finis pour $F = 0,1$ N.

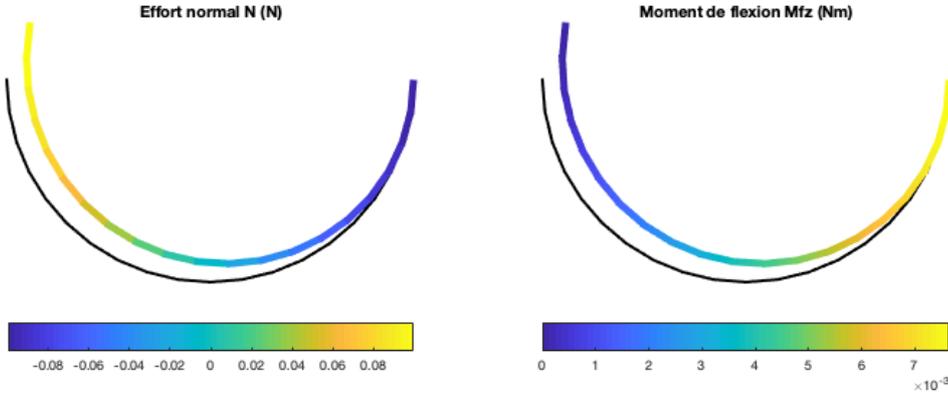


Figure 27 - Effort normal à gauche et moment de flexion à droite dans le ressort lamellaire pour $F = 0,1$ N.

numero_des_noeuds	degres_de_liberte		
1	0.0043158	0.010176	-0.17785
2	0.0032532	0.010092	-0.17779
3	0.0022176	0.0098436	-0.17752
4	0.0012363	0.0094371	-0.17682
5	0.00033578	0.0088853	-0.17548
6	-0.00045947	0.0082061	-0.17333
7	-0.0011284	0.0074228	-0.1702
8	-0.0016551	0.0065634	-0.16594
9	-0.0020296	0.0056591	-0.16044
10	-0.0022495	0.0047433	-0.15361
11	-0.0023199	0.0038492	-0.14542
12	-0.0022537	0.0030083	-0.13583
13	-0.0020711	0.0022479	-0.12487
14	-0.0017986	0.0015899	-0.11258
15	-0.0014669	0.0010486	-0.099058
16	-0.0011094	0.00063006	-0.084408
17	-0.00076	0.00033162	-0.068775
18	-0.00045025	0.0001418	-0.052324
19	-0.00020755	4.1273e-05	-0.035242
20	-5.3025e-05	4.1741e-06	-0.01773
21	0	0	0

Figure 28 - Valeurs des degrés de libertés $[u'_i, v'_i, \theta'_i]$ dans le système de coordonnées global des noeuds $i = 1, \dots, 21$ du calcul éléments finis effectué avec $n = 20$ éléments finis et $F = 0,1$ N. Unités de $[u'_i, v'_i, \theta'_i]$: [(m),(m),(rad)].