MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Concours externe de l'agrégation du second degré

Section mathématiques

Programme de la session 2023

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser et savoir *illustrer*. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement suivant différents points de vue. Le programme évoque parfois des exemples ; ceux-ci sont donnés à titre purement indicatif et peuvent être remplacés par d'autres qui seraient également pertinents.

Dans les titres 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés $\mathbf{K}$ en général) sont supposés commutatifs.

1 Algèbre linéaire

1.1 Espaces vectoriels

(a) Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, familles génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, groupe linéaire $GL(E)$.

(b) Sous-espaces stables d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres. Polynômes d'endomorphismes. Lemme des noyaux.

(c) Représentations linéaires d'un groupe. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

(a) Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec $\mathbf{K}^n$. Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.

(b) Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire $SL(E)$. Orientation d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

(c) Matrices à coefficients dans un anneau commutatif. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, déterminant, inversibilité.

Matrices à coefficients dans un corps. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.

Méthode du pivot de Gauss. Notion de matrices échelonnées. Applications à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

(d) Polynôme caractéristique. Polynômes annulateurs, polynôme minimal. Théorème de Cayley-Hamilton. Diagonalisation, trigonalisation. Endomorphismes nilpotents. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de Dunford. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

2 Groupes

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants sont appelées à être illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

(a) Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Action d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison.

Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polytope régulier en dimension deux et trois.

(b) Groupes cycliques. Groupes abéliens finis. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.

(c) Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.

(d) Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.

(e) Représentations d'un groupe fini sur un **C**-espace vectoriel.
Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

3 Anneaux, corps et polynômes

(a) Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau **Z** des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau commutatif, anneaux quotients, idéaux premiers, idéaux maximaux. Théorème chinois. Notion d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.

(b) Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Racines d'un polynôme, multiplicité. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de Newton. Polynôme dérivé. Décomposition en somme de polynômes homogènes. Polynômes symétriques.

(c) Corps, sous-corps. Caractéristique, morphisme de Frobenius. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps **Q** des nombres rationnels. Le corps **R** des nombres réels. Le corps **C** des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.

(d) Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.

Factorialité de $A[X]$ quand A est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de Bézout. Anneaux euclidiens. Algorithme d'Euclide. Cas de l'anneau $\mathbf{Z}$ et de l'algèbre $\mathbf{K}[X]$ des polynômes sur le corps **K**. Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans $\mathbf{Q}[X]$, critère d'Eisenstein.

(e) Congruences dans **Z**. Nombres premiers. Étude de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et de ses éléments inversibles, fonction indicatrice d'Euler.

(f) Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe.

4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

(a) Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.

(b) Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de SYLVESTER. Classification dans le cas de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Procédés d'orthogonalisation.

(c) Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Norme. Bases orthonormales.

(d) Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Décomposition en valeurs singulières d'une matrice à coefficients réels. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans $GL(n, \mathbf{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension deux, classification des éléments de $O(2, \mathbf{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension trois, classification des éléments de $O(3, \mathbf{R})$; produit mixte, produit vectoriel.

(e) Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans $GL(n, \mathbf{C})$.

5 Géométries affine et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

(a) Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.

(b) Isométries d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements, antidéplacements.

Similitudes directes et indirectes du plan. Classification des isométries en dimension deux et trois.

(c) Angles en dimension deux : angles de vecteurs, angles de droites, Théorème de l'angle inscrit, cocyclicité.

(d) Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.

(e) Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien (foyer, excentricité) et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension trois.

6 Analyse à une variable réelle

6.1 Nombres réels

Le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Topologie de $\mathbf{R}$. Sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Suites récurrentes. Limites inférieure et supérieure. Suites de CAUCHY. Complétude de $\mathbf{R}$. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS. Parties compactes de $\mathbf{R}$. Parties connexes de $\mathbf{R}$.

6.2 Séries numériques

Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de RIEMANN. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.

6.3 Fonctions définies sur une partie de R et à valeurs réelles

(a) Continuité

Limites, continuité. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

(b) Dérivabilité

Dérivée en un point, fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée d'une fonction réciproque. Théorèmes de ROLLE et des accroissements finis. Étude des variations d'une fonction. Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux. Formule de LEIBNIZ. Formule de TAYLOR-YOUNG, formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-LAGRANGE. Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

6.4 Fonctions usuelles

Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

6.5 Intégration

(a) Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux

Calcul de primitives. Sommes de RIEMANN. Primitives d'une fonction continue. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales. Changement de variable. Intégration par parties.

(b) Intégrales généralisées

Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi-convergentes.

6.6 Suites et séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions ; convergence normale.
Théorèmes d'approximation de WEIERSTRASS polynomial et de WEIERSTRASS trigonométrique.

6.7 Convexité

Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité. Inégalités de convexité.

7 Analyse à une variable complexe

7.1 Séries entières

(a) Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.

(b) Exponentielle complexe ; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe. Développement en série entière des fonctions usuelles.

7.2 Fonctions d'une variable complexe

(a) Fonctions holomorphes. Conditions de CAUCHY-RIEMANN. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe. Déterminations du logarithme. Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.

(b) Indice d'un chemin fermé $\mathscr{C}^1$ par morceaux par rapport à un point.

(c) Formules de CAUCHY. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe des zéros isolés. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

(d) Singularités isolées. Séries de LAURENT. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.

(e) Suites et séries de fonctions holomorphes. Stabilité de l'holomorphie par convergence uniforme.

8 Topologie

8.1 Topologie et espaces métriques

(a) Topologie d'un espace métrique. Topologie induite. Produit fini d'espaces métriques.

(b) Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

(c) Compacité. Équivalence des définitions en termes de valeurs d'adhérence (BOLZANO-WEIERSTRASS) ou de recouvrements ouverts (BOREL-LEBESGUE). Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

(d) Applications lipschitziennes, applications uniformément continues. Théorème de HEINE.

(e) Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.

8.2 Espaces vectoriels normés sur R ou C

(a) Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$. Espaces de BANACH. Séries absolument convergentes dans un espace de BANACH.

(b) Applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue.

(c) Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace de BANACH.

(d) Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de RIESZ, théorème d'ASCOLI.

8.3 Espaces de HILBERT

(a) Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

(b) Dual d'un espace de HILBERT, théorème de représentation de RIESZ. Cas des espaces ℓ^2 et L^2. Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases de polynômes trigonométriques et de polynômes orthogonaux. Théorème de LAX-MILGRAM.

(c) Espace $H_0^1(]0,1[)$ et application au problème de DIRICHLET en dimension un.

9 Calcul différentiel

9.1 Fonctions différentiables

(a) Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

(b) Dérivées partielles. Matrice jacobienne, vecteur gradient, matrice hessienne. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe $\mathscr{C}^1$.

(c) Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de TAYLOR-YOUNG, formule de TAYLOR avec reste intégral.

(d) Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbf{R}$. Développements limités. Recherche des extrema locaux, caractérisation de la convexité des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$ définies sur un ouvert convexe $\mathbf{R}^n$.

(e) Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

9.2 Équations différentielles

(a) Équations différentielles de la forme $X' = f(t, X)$ sur $\mathscr{I} \times \Omega$ avec $\mathscr{I}$ intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et Ω ouvert de $\mathbf{R}^n$. Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Solutions maximales. Lemme de GRÖNWALL. Théorème de sortie de tout compact (théorème « des bouts »).

(b) Cas des équations différentielles autonomes. Portrait de phase, comportement qualitatif. Stabilité des points d'équilibre (théorème de linéarisation).

(c) Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation des constantes (fomule de DUHAMEL). Cas des coefficients constants. Application à la résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à 1.

9.3 Géométrie différentielle

(a) Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Gradient. Cas des surfaces de $\mathbf{R}^3$, position par rapport au plan tangent.

(b) Construction de courbes planes définies par une représentation paramétrique. Étude métrique des courbes : abscisse curviligne, longueur d'un arc $\mathscr{C}^1$.

(c) Extrema liés, multiplicateurs de LAGRANGE.

10 Calcul intégral

10.1 Notions de théorie de la mesure

Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure positive, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de LEBESGUE (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une mesure produit (construction admise). Définition des fonctions mesurables, approximation par des fonctions étagées.

10.2 Intégration

(a) Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de FATOU. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée.

(b) Fonctions intégrables à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Continuité, dérivabilité des intégrales à paramètres.

(c) Espaces L^p, où $1 \leq p \leq \infty$. Complétude. Inégalité de HÖLDER.

(d) Théorème de FUBINI. Changement de variables dans une intégrale multiple. Cas des coordonnées polaires, cas des coordonnées sphériques.

(e) Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

10.3 Analyse de Fourier

(a) Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Dirichlet, de Fejér et de Parseval.

(b) Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbf{R}^d)$ et $L^2(\mathbf{R}^d)$. Théorème de Plancherel.

11 Probabilités

11.1 Définition d'un espace probabilisé

Événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de Borel-Cantelli. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales.

11.2 Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire

(a) Loi discrète, loi absolument continue. Fonction de répartition et densité. Loi conjointe de variables aléatoires, indépendance de variables aléatoires. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert. Moments. Exemples de lois : loi de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.

(b) Fonction caractéristique. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.

11.3 Convergences de suites de variables aléatoires

(a) Convergence en probabilité, dans L^p, presque sûrement, en loi. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev, théorème de Lévy.

(b) Loi faible et loi forte des grands nombres. Théorème central limite.

12 Calcul au sens des distributions et applications

En dimension $d > 1$, on considère comme admise la formule « d'intégration par parties »

$$\int_\Omega \partial_{x_j} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f(x)\nu_j(x)\mathrm{d}\sigma(x)$$

sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, de frontière $\partial\Omega$ « suffisamment régulière », avec $\mathrm{d}\sigma$ la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$ et $\nu(x)$ le vecteur unitaire extérieur en $x \in \partial\Omega$. Il est en revanche attendu une certaine familiarité dans la manipulation de telles formules, par exemple dans le cas où Ω est une boule de $\mathbb{R}^d$.

12.1 Distributions sur $\mathbf{R}^d$

(a) Espace vectoriel des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact. Stabilité par dérivation. Stabilité par multiplication par une fonction $\mathscr{C}^\infty$. Partitions de l'unité. Construction d'approximations de fonctions et densité dans les espaces de fonctions usuels.

(b) Distributions. Exemples de distributions : fonctions localement intégrables, masse de Dirac et ses dérivées, valeur principale de Cauchy. Principes du calcul par dualité-transposition. Dérivation ; multiplication par une fonction $\mathscr{C}^\infty$. Formule des sauts. Suites convergentes de distributions : définition, exemples. Notion de support d'une distribution ; cas des distributions à support ponctuel.

12.2 Espaces $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ et $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^d)$

(a) Espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. Fonctions gaussiennes et leurs dérivées. Stabilité par dérivation. Stabilité par multiplication par une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à croissance lente. Transformation de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$. Convolution de deux fonctions de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$.

(b) Espace $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^d)$ des distributions tempérées : formes linéaires T sur $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ telles qu'il existe $C > 0$ et $k \in \mathbf{N}$ vérifiant $|\langle T|\phi\rangle| \leq C \sup\{|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|,\ x \in \mathbf{R}^d,\ |\alpha| \leq k,\ |\beta| \leq k\}$ pour tous $\phi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$. Exemples de distributions tempérées : fonctions L^2 et représentation de Riesz, fonctions L^p, cas des fonctions périodiques, peigne de Dirac. Dérivation des distributions tempérées ; multiplication par une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à croissance lente. Convolution d'une distribution tempérée avec une fonction de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$.

(c) Transformation de Fourier dans $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^d)$. Formule d'inversion. Transformation de Fourier et dérivation, transformée de Fourier d'un produit de convolution.

12.3 Applications

Calcul de dérivées et de transformée de Fourier de distributions. Formule de Poisson (dimension un).

Utilisation de la convolution et de la transformée de Fourier-Laplace pour la résolution d'équations différentielles linéaires en dimension un. Notion de solution élémentaire d'opérateurs différentiels à coefficients constants (cas du laplacien).

Notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires : application, par exemple, à la résolution des équations de Laplace, de la chaleur, des ondes.

13 Méthodes numériques

13.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires

Notion de conditionnement. Théorème de Gershgorin-Hadamard. Pivot de Gauss, décomposition LU. Méthodes itératives (par exemple méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Seidel) ; analyse de convergence : normes subordonnées, rayon spectral.
Décomposition en valeurs singulières.
Exemple de la matrice de discrétisation par différences finies du laplacien en dimension un.

13.2 Méthodes itératives de résolution approchée d'équations réelles et vectorielles

Cas des systèmes linéaires : méthodes itératives. Recherche d'éléments propres : méthode de la puissance.
Optimisation de fonctions convexes en dimension finie, méthode du gradient à pas constant, moindres carrés.
Problèmes non linéaires réels et vectoriels : méthode de dichotomie, méthode de Picard, méthode de Newton, vitesse de convergence et estimation de l'erreur.

13.3 Intégration numérique

Méthode des rectangles, estimation de l'erreur. Méthode de Monte-Carlo : vitesse de convergence, application au calcul d'intégrales multiples.

13.4 Approximation de fonctions numériques

Interpolation de Lagrange : polynôme de Lagrange d'une fonction en $(n+1)$ points, estimation de l'erreur.

13.5 Équations différentielles ordinaires

Aspects numériques du problème de Cauchy : méthode d'Euler explicite, consistance, stabilité, convergence, ordre.

13.6 Transformée de Fourier

Transformée de Fourier discrète sur un groupe abélien fini. Transformée de Fourier rapide.

ÉPREUVES ÉCRITES

Les épreuves écrites comportent deux épreuves :

A. Composition de mathématiques générales
Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 13 ci-dessus.

B. Composition d'analyse et probabilités
Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 13 ci-dessus.

ÉPREUVES ORALES

Les candidats ont le choix entre trois options :

Option A : probabilité et statistiques
Option B : calcul scientifique
Option C : algèbre et calcul formel
1re Épreuve : Épreuve d'Algèbre et Géométrie

2e Épreuve : Épreuve d'Analyse et Probabilités

Le programme de ces deux épreuves, communes aux options A, B et C, est constitué des titres 1 à 13 ci-dessus.

3e Épreuve : Épreuve de Modélisation

L'épreuve porte sur le programme constitué des titres 1 à 13 ci-dessus et sur un programme spécifique à l'option choisie, décrit ci-après.

L'épreuve consiste en un exposé de *modélisation mathématique* construit en partant d'un texte proposé par le jury. Le programme définit un cadre de théories mathématiques et de techniques d'application adaptées pour l'épreuve. L'épreuve donne lieu à une illustration informatique des résultats exposés. Le site de l'agrégation externe de mathématiques (http://agreg.org) précise la liste des logiciels mis à la disposition des candidats et la nature de leur environnement.

À l'aide d'un ou plusieurs des logiciels fournis, les candidats devront montrer leur capacité à :

- mettre en œuvre avec précision et rigueur les concepts et outils mathématiques au programme ;
- distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques ;
- estimer le coût et les limitations d'algorithmes simples : complexité, précision ;
- analyser la pertinence des modèles.

Le programme de cette partie comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les programmes des épreuves écrites et celles citées dans les paragraphes suivants. En particulier, les épreuves amènent à *effectuer des calculs numériques et symboliques*. En utilisant les logiciels fournis, les candidats pourront mener des opérations d'intégration et de différentiation, des calculs (approchés) de sommes et d'intégrales, résoudre des équations algébriques et différentielles, résoudre des systèmes linéaires et déterminer des éléments caractéristiques de matrices, simuler des variables aléatoires dans différents contextes probabilistes, *etc.*

Programme spécifique de l'option A

(a) Utilisation de lois usuelles (voir titre 11, ainsi que loi multinomiale, hypergéométrique, Gamma, du χ^2) pour modéliser certains phénomènes aléatoires. Exemples : temps d'attente ou durée de vie, erreurs de mesure, sondages... Méthodes de simulation de variables aléatoires.

(b) Chaînes de Markov à espace d'états fini ou dénombrable. Propriétés de Markov faible et forte. Classification des états, transience, récurrence positive ou nulle. Communication entre états et irréductibilité. Mesure stationnaire (existence et unicité). Théorèmes de convergence : loi des grands nombres, apériodicité et convergence en loi.
Exemple de la marche aléatoire simple.

(c) Construction du processus de Poisson sur $\mathbf{R}^+$ à partir de variables exponentielles. Indépendance, stationnarité et loi des accroissements.

(d) Espérance conditionnelle, définition des (sur/sous-)martingales à temps discrets, temps d'arrêt. Exemples d'utilisation des théorèmes d'arrêt et de convergence presque sûre et L^2.

(e) Échantillons, moments empiriques, loi et fonction de répartition empiriques. Applications des théorèmes de convergences à l'estimation (lois des grands nombres, théorème central limite, utilisation du lemme de Slutsky). Définition et construction d'intervalles de confiance. Estimation paramétrique. Estimation par maximum de vraisemblance : définition et exemples.

(f) Vecteurs gaussiens : définition, simulation, théorème de Cochran. Théorème central limite dans $\mathbf{R}^n$.

(g) Modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression linéaire, exemples d'utilisation.

(h) Tests paramétriques. Tests d'ajustement (tests du χ^2, tests de Kolmogorov-Smirnov). Exemples d'utilisation.

Programme spécifique de l'option B

(a) Systèmes linéaires : mise en œuvre(*) de méthodes directes (pivot de Gauss, LU, Choleski), coût de calcul de ces méthodes ; mise en œuvre de méthodes itératives (Gauss-Seidel, Jacobi), mise en évidence de la vitesse de convergence.

(b) Équations et systèmes non linéaires : mises en œuvre des méthodes de Picard et de Newton, mise en évidence de la vitesse de convergence.

(c) Intégration numérique : méthode des trapèzes, utilisation de méthodes d'ordre élevé pour l'intégration numérique *via* les routines proposées par les logiciels.

(d) Équations différentielles ordinaires. Mise en évidence numérique de propriétés qualitatives des solutions. Aspects numériques du problème de Cauchy : mise en œuvre des méthodes d'Euler explicite et implicite, précision, consistance, stabilité, convergence, ordre. Utilisation de méthodes d'ordre élevé *via* les routines proposées par les logiciels.

(e) Notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles classiques en dimension un.

Équation de transport (advection) linéaire : méthode des caractéristiques.

Équations des ondes et de la chaleur : résolution par série de Fourier, transformée de Fourier et séparation des variables. Aspects qualitatifs élémentaires.

Équations elliptiques, utilisation du théorème de Lax-Milgram.

Exemples de discrétisation d'équations aux dérivées partielles en dimension un par la méthode des différences finies : notions de consistance, stabilité, convergence, ordre.

(f) Optimisation et approximation

Interpolation linéaire par morceaux. Interpolation de Lagrange.

Extremums des fonctions réelles de n variables réelles sans contraintes : mise en œuvre de l'algorithme de gradient à pas constant. Mise en œuvre de l'algorithme de gradient à pas optimal pour une fonctionnelle quadratique.

Extremums des fonctions réelles de n variables réelles avec contraintes : multiplicateurs de Lagrange et mise en œuvre numérique par la méthode de Newton.

Méthode des moindres carrés et applications.

(g) Traitement du signal : approximation par séries de Fourier, application de la transformée de Fourier rapide et mise en œuvre à l'aide des routines proposées par les logiciels.

(*) Dans toute cette section il est bien entendu que la mise en œuvre peut s'appuyer très largement sur les routines standards des logiciels fournis ; cependant les candidats devront connaître les principes des méthodes, les conditions de leur validité et pouvoir commenter leur coût et les possibles limitations qu'on peut rencontrer en pratique.

Programme spécifique de l'option C

(a) Représentation et manipulation des entiers, des flottants, des polynômes, des éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Calcul effectif : addition, multiplication, division. Coût de ces opérations$^{(*)}$.

(b) Algorithmes algébriques élémentaires.

Exponentiation rapide, algorithme d'Euclide étendu. Coût de ces algorithmes$^{(*)}$. Test de primalité de Fermat.

Application au chiffrement RSA.

(c) Corps finis.

Représentation des éléments d'un corps fini.

Calcul effectif : addition, multiplication, inversion. Coût de ces opérations$^{(*)}$.

(d) Matrices à coefficients dans un corps.

Résolution de systèmes linéaires, méthode du pivot de Gauss. Calcul effectif du rang, du déterminant. Coût de ces calculs$^{(*)}$.

(e) Codes correcteurs linéaires.

Distance de Hamming, distance minimale d'un code linéaire.

Codes de répétition, codes de Hamming binaires.

(f) Polynômes à une indéterminée.

Évaluation (schéma de Horner), interpolation. Coût de ces opérations$^{(*)}$.

Localisation des racines dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$: majoration en fonction des coefficients.

(g) Polynômes à plusieurs indéterminées.

Tout polynôme symétrique s'exprime en fonction des polynômes symétriques élémentaires.

Résultant, élimination. Applications : résolution de systèmes polynomiaux, calcul de l'intersection de courbes algébriques planes, passage d'une paramétrisation à une équation implicite. Calcul effectif du résultant, coût de ce calcul$^{(*)}$.

(*) Concernant les différentes mentions du coût d'un algorithme, aucune formalisation d'un modèle de calcul n'est exigée.