



**MINISTÈRE  
DE L'ÉDUCATION  
NATIONALE,  
DE LA JEUNESSE  
ET DES SPORTS**

*Liberté  
Égalité  
Fraternité*

---

## **Rapport du jury**

**Concours : AGREGATION INTERNE ET CAER-PA**

**Section : MATHEMATIQUES**

**Session 2021**

Rapport de jury présenté par : Françoise FLICHE, présidente de jury

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités et statistiques</b>	<b>3</b>
1.1	Déroulement de la session 2021	3
1.2	Préparation des candidats	3
1.3	Historique des concours (nombre de postes, d'admissibles ...)	4
1.4	Statistiques	5
1.4.1	Répartition femmes-hommes	5
1.4.2	Répartition par âge	5
1.4.3	Répartition par profession	6
1.4.4	Répartition par académie	7
1.4.5	Répartition des notes d'écrit	9
1.4.6	Répartition des notes d'oral	11
<b>2</b>	<b>Programme du concours pour la session 2022</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Rapport sur les épreuves écrites</b>	<b>14</b>
3.1	Première épreuve écrite	15
3.1.1	Statistiques de réussite	15
3.1.2	Analyse de l'épreuve et commentaires par questions	15
3.1.3	Quelques éléments de correction	18
3.2	Seconde épreuve écrite	33
3.2.1	Statistiques de réussite	33
3.2.2	Analyse de l'épreuve et commentaires par questions	33
3.2.3	Quelques éléments de correction	38
<b>4</b>	<b>Rapport sur les épreuves orales</b>	<b>55</b>
4.1	Considérations générales	59
4.1.1	Critères d'évaluation	59
4.1.2	Usage des moyens informatiques	60
4.2	L'épreuve orale d'exposé	61
4.2.1	Déroulement de l'épreuve	61
4.2.2	Plan	61
4.2.3	Développement	61
4.2.4	Niveau de la leçon	62
4.2.5	Questions du jury	62
4.3	L'épreuve orale d'exemples et exercices	63
4.3.1	Déroulement de l'épreuve	63
4.3.2	Présentation motivée des exercices ou exemples	63
4.3.3	Résolution détaillée d'un exercice ou d'un exemple	64
4.3.4	Questions du jury	65
<b>5</b>	<b>Liste des sujets d'oral</b>	<b>66</b>

# Chapitre 1

## Généralités et statistiques

### 1.1 Déroulement de la session 2021

Les épreuves écrites ont eu lieu les 30 et 31 janvier 2021, la liste d'admissibilité a été signée le 16 mars 2021 avec :

- agrégation interne : 360 admissibles ;
- CAERPA : 40 admissibles.

Les épreuves orales se sont déroulées du 17 au 27 avril 2021, ainsi que le 10 et le 11 mai 2021, à l'université Paris Diderot-Paris 7, bâtiment Sophie Germain, à Paris 13ème.

La liste d'admission a été signée le 12 mai 2021 avec l'inscription de :

- agrégation interne : 160 admis ;
- CAERPA : 18 admis.

Tous les postes mis au concours de l'agrégation interne et du CAERPA ont été pourvus.

### 1.2 Préparation des candidats

La plupart des candidats admissibles aussi bien à l'agrégation interne qu'au CAERPA ont montré un niveau de préparation honorable.

Concernant les épreuves écrites, le jury note cette année une moindre maîtrise des concepts d'algèbre linéaire pour une certaine partie des candidats.

Nombreux sont ceux qui se préparent sur plusieurs années, ce qui est tout à fait raisonnable compte tenu du niveau d'exigence du concours et de la charge de travail que cela suppose. Cette préparation sur plusieurs années porte ses fruits. On observe ainsi que :

- 58,6 % des présents à la session 2021 avaient déjà participé aux épreuves écrites de la session 2020, soit 818 candidats.
- 66,5% des admissibles de la présente session étaient déjà candidats l'an dernier (présents à l'écrit), soit 265 candidats parmi lesquels 82 ont été admis.
- Sur les 400 admissibles de la session 2021, 127 avaient déjà été admissibles à la session 2020. Parmi ces 127 admissibles, 65 ont été admis.
- Sur les 221 candidats admissibles mais non admis à la session 2020, 164 ont présenté le concours à la session 2021, 127 ont été une nouvelle fois admissibles parmi lesquels 65 ont été admis.

### 1.3 Historique des concours (nombre de postes, d'admissibles ...)

#### Agrégation interne

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
2002	129	1845	1400	288	129
2003	130	1842	1479	288	130
2004	130	1813	1382	287	130
2005	138	1897	1401	311	138
2006	110	2172	1599	273	110
2007	107	2198	1627	267	107
2008	107	2195	1682	257	107
2009	107	2124	1559	258	107
2010	114	2229	1426	267	114
2011	116	2442	1359	263	116
2012	125	2324	1589	281	125
2013	135	2266	1510	303	135
2014	130	2290	1495	302	130
2015	145	2317	1501	332	145
2016	148	2299	1510	333	148
2017	155	2248	1349	329	155
2018	155	2090	1280	330	155
2019	160	2071	1251	340	160
2020	165	1967	1250	358	165
2021	160	1951	1212	360	160

#### CAERPA

Année	Contrats	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
2002	23	326	229	22	10
2003	20	325	258	27	15
2004	24	311	241	21	9
2005	19	297	211	27	12
2006	19	329	240	18	13
2007	20	319	221	11	5
2008	15	356	258	22	11
2009	14	305	212	26	12
2010	12	346	207	17	8
2011	11	427	213	19	11
2012	13	350	228	29	13
2013	18	320	201	35	18
2014	19	317	217	32	14
2015	20	322	203	34	12
2016	13	335	214	35	13
2017	16	338	200	47	16
2018	17	353	205	55	17
2019	18	354	211	53	18
2020	19	303	199	56	19
2021	18	316	184	40	18

## 1.4 Statistiques

### 1.4.1 Répartition femmes-hommes

Pour l'ensemble des deux concours, le pourcentage de femmes parmi les candidats présents aux deux épreuves écrites reste stable par rapport à l'an dernier (34,3%). Cette proportion est à peu près identique lors de la phase d'admissibilité : 31,8% des candidats admissibles sont des femmes. En revanche, à l'issue des épreuves orales d'admission, on constate une hausse significative : 39,3% des candidats reçus sont des femmes.

	Agrégation interne			CAERPA		
	Femmes	Hommes	Total	Femmes	Hommes	Total
Inscrits	678	1273	1951	131	185	316
Présents	409	808	1212	69	115	184
Admissibles	115	245	360	12	28	40
Admis	63	97	160	7	11	18

### 1.4.2 Répartition par âge

#### Agrégation interne

Tranches d'âge	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Moins de 30 ans	113	56	12	3
Entre 30 et 35 ans	261	158	42	21
Entre 35 et 40 ans	386	229	74	33
Entre 40 et 45 ans	380	244	70	36
Entre 45 et 50 ans	396	253	89	39
Entre 50 et 55 ans	246	162	49	21
Supérieur à 55 ans	169	110	24	7

#### CAERPA

Tranches d'âge	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Moins de 30 ans	13	5		
Entre 30 et 35 ans	41	23	3	1
Entre 35 et 40 ans	60	32	12	8
Entre 40 et 45 ans	64	33	8	3
Entre 45 et 50 ans	65	42	5	2
Entre 50 et 55 ans	39	25	5	
Supérieur à 55 ans	34	24	7	4

### 1.4.3 Répartition par profession

Ce sont essentiellement les professeurs certifiés qui sont reçus à l'agrégation interne (plus de 95,6% des admis lors de cette session).

#### Agrégation interne

Professions	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AUTRES	32	14	6	3
AUTRES ENS. TIT.	140	68	9	1
CERTIFIE	1701	1089	334	153
PLP	78	41	11	3

#### CAERPA

Professions	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
CONT ET AGREE REM INSTITUTEUR	14	4		
MAITRE CONTR.ET AGREE REM MA	17	5		
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	285	175	40	18

#### 1.4.4 Répartition par académie

##### Agrégation interne

Académies	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	104	68	22	9
AMIENS	40	25	8	4
BESANÇON	24	15	4	2
BORDEAUX	73	40	15	8
CAEN	27	18	5	1
CLERMONT-FERRAND	29	18	6	3
CORSE	14	9	2	1
CRÉTEIL-PARIS-VERSAIL.	433	258	77	40
DIJON	36	23	8	3
GRENOBLE	74	49	19	11
GUADELOUPE	42	19	2	1
GUYANE	10	5	1	0
LA RÉUNION	68	45	12	3
LILLE	121	78	20	7
LIMOGES	35	22	1	1
LYON	86	61	23	13
MARTINIQUE	32	14	6	1
MAYOTTE	12	6	1	1
MONTPELLIER	79	44	12	5
NANCY-METZ	66	46	12	5
NANTES	77	47	9	4
NICE	72	47	13	4
NOUVELLE CALÉDONIE	17	12	1	0
ORLÉANS-TOURS	68	42	17	5
POITIERS	45	24	6	3
POLYNÉSIE FRANÇAISE	11	3	2	2
REIMS	34	23	9	2
RENNES	61	40	11	6
ROUEN	51	31	8	4
STRASBOURG	50	38	12	2
TOULOUSE	60	39	16	9

## CAERPA

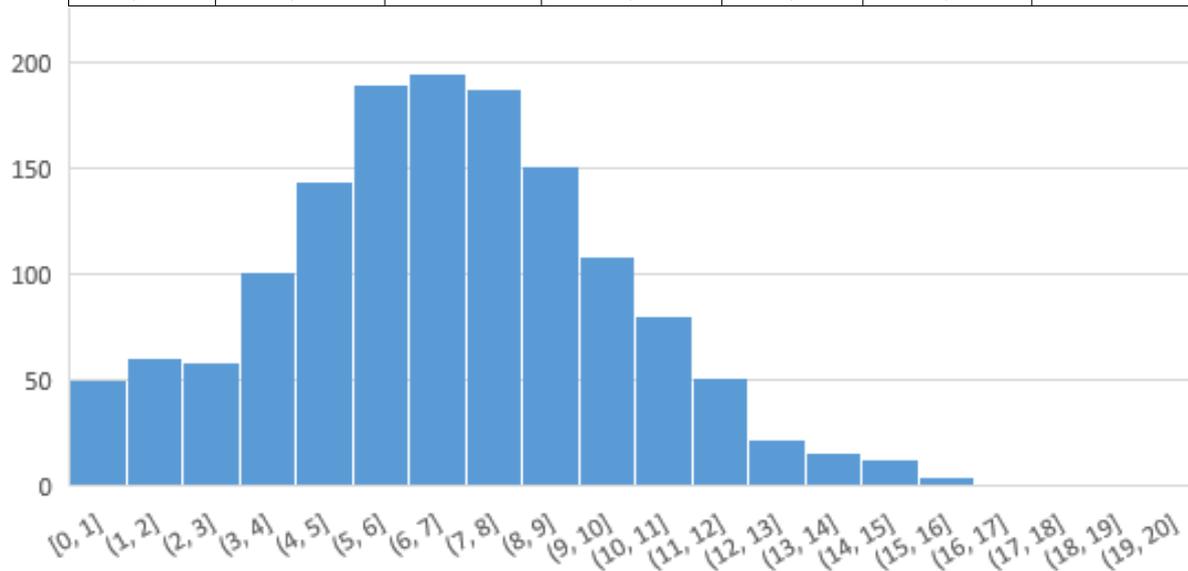
Académies	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	14	8		
AMIENS	5	4	1	1
BESANÇON				
BORDEAUX	7	4	2	2
CAEN	5	5	1	
CLERMONT-FERRAND	7	6	1	1
CORSE				
CRÉTEIL-PARIS-VERSAIL.	75	41	8	3
DIJON	5	1		
GRENOBLE	7	5	1	1
GUADELOUPE	1			
GUYANE	1			
LA RÉUNION	4	2		
LILLE	30	17	4	2
LIMOGES	3			
LYON	18	12	5	1
MARTINIQUE	2	1		
MAYOTTE				
MONTPELLIER	11	7	3	3
NANCY-METZ	5	4		
NANTES	22	13	2	1
NICE	10	6	1	
NOUVELLE CALÉDONIE	1	1		
ORLÉANS-TOURS	4	1		
POITIERS	10	7		
POLYNÉSIE FRANÇAISE	5	1		
REIMS	5	4		
RENNES	23	13	2	
ROUEN	8	4	1	
STRASBOURG	13	9	4	2
TOULOUSE	15	8	4	1

### 1.4.5 Répartition des notes d'écrit

Pour la session 2021, la barre d'admissibilité a été fixée à 87 points sur 200 pour l'agrégation interne et à 94 pour le CAERPA (la note de chacune des deux épreuves étant rapportée sur 100). Le nombre d'admissibles rapporté au nombre des postes offerts est identique pour les deux concours.

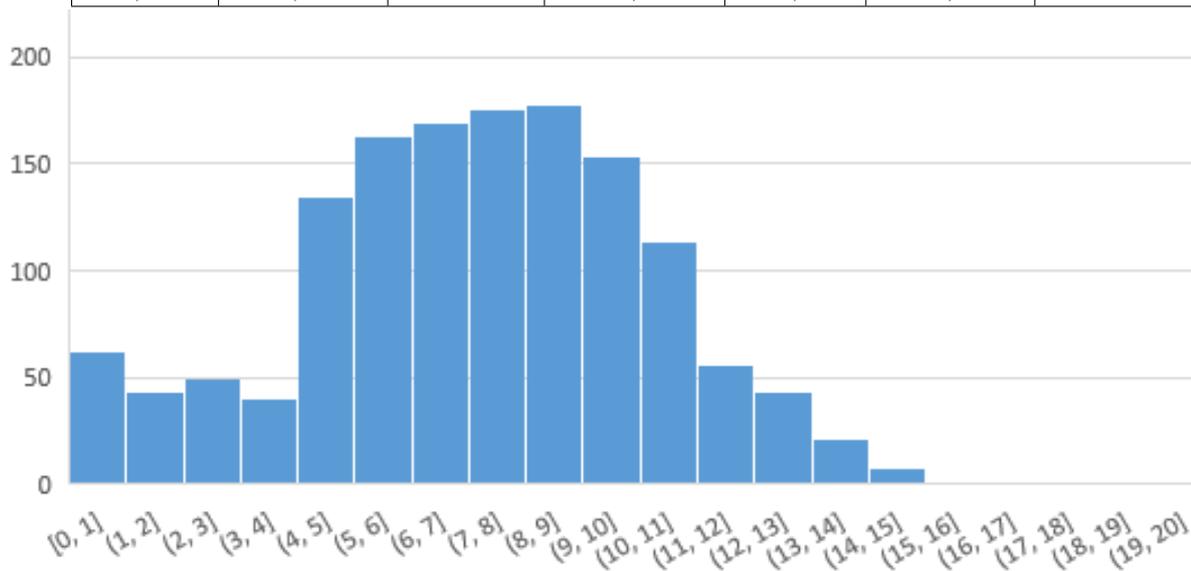
#### Histogramme des notes (sur 20) attribuées à l'épreuve 1

Moyenne	Écart type	Minimum	1er quartile	Médiane	3e quartile	Maximum
6,71	3,03	0	4,6	6,8	8,6	20



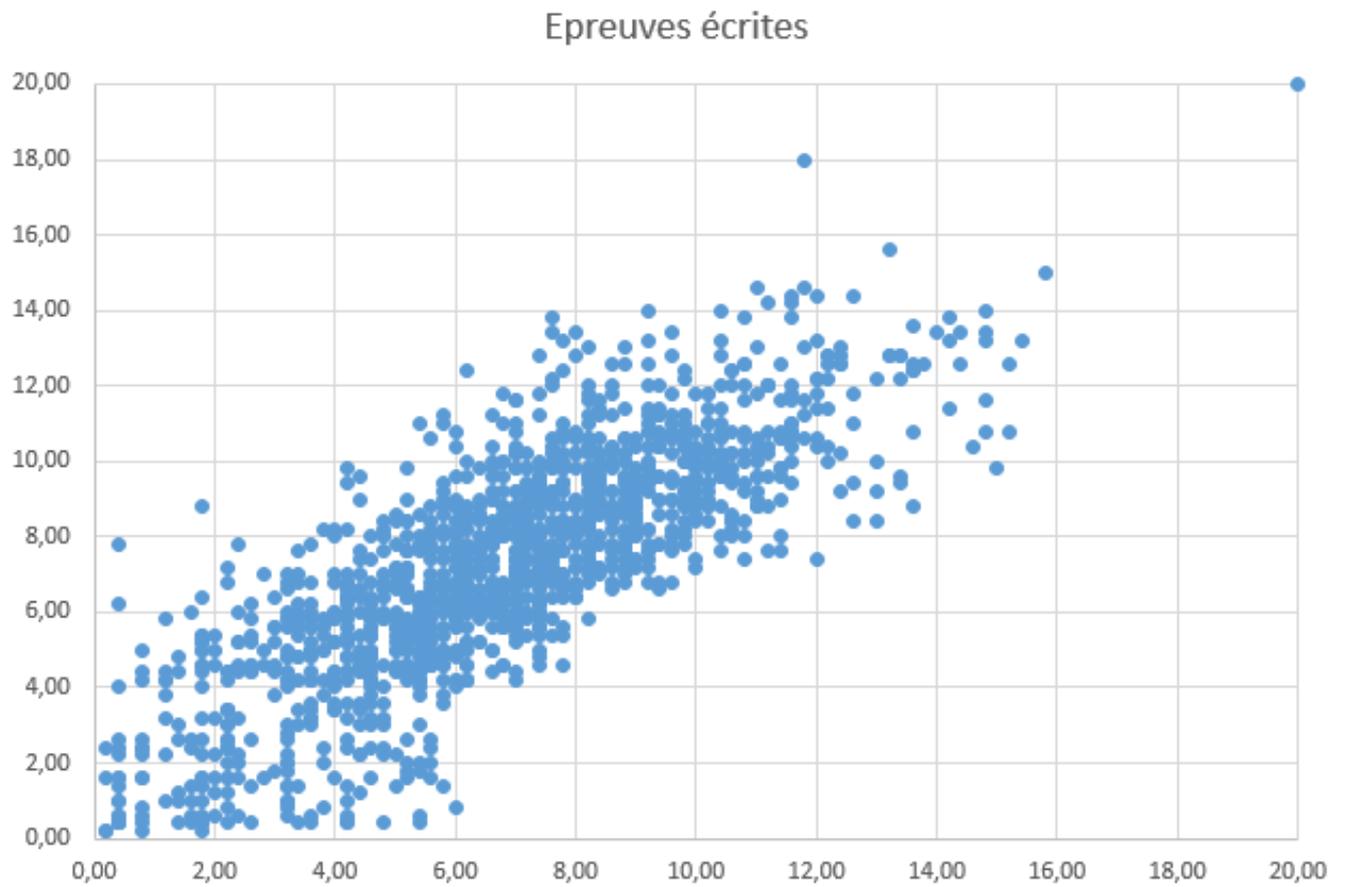
#### Histogrammes des notes (sur 20) attribuées à l'épreuve 2

Moyenne	Écart type	Minimum	1er quartile	Médiane	3e quartile	Maximum
7,25	3,09	0	5,4	7,4	9,4	20



## Nuage des notes d'écrit

Chaque candidat présent à l'écrit est repéré par le couple des notes (sur 20) qu'il a obtenues respectivement aux épreuves 1 et 2.

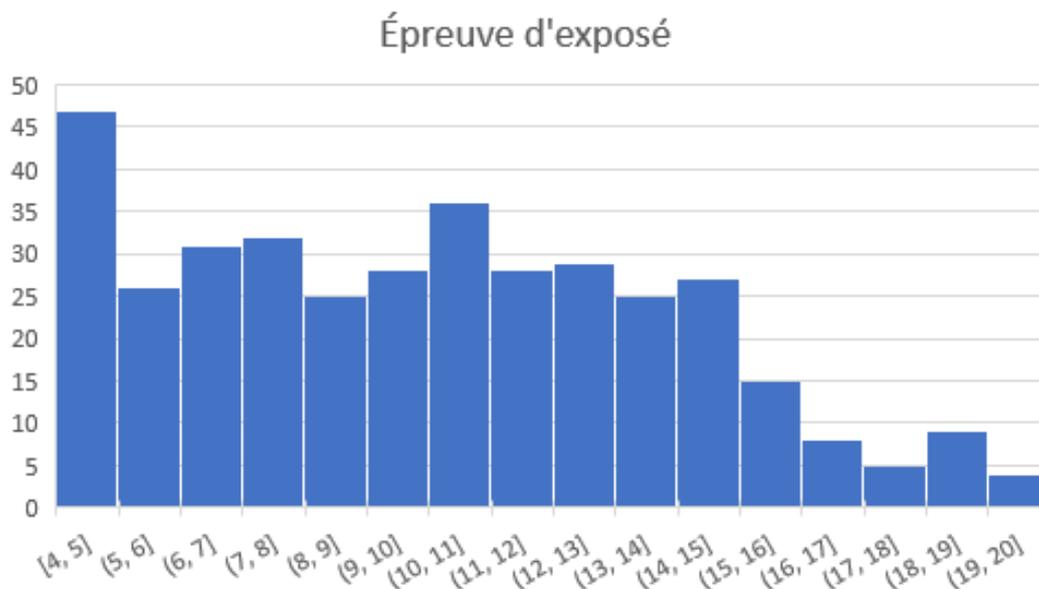


### 1.4.6 Répartition des notes d'oral

La barre d'admission (c'est-à-dire le total des points du dernier admis) a été cette année de 203 points pour le concours de l'agrégation interne et de 216 points pour le CAERPA (la note de chacune des quatre épreuves étant rapportée sur 100).

#### Histogramme des notes (sur 20) attribuées à l'épreuve d'exposé

La moyenne des notes vaut 10,13 et la médiane est égale à 10.



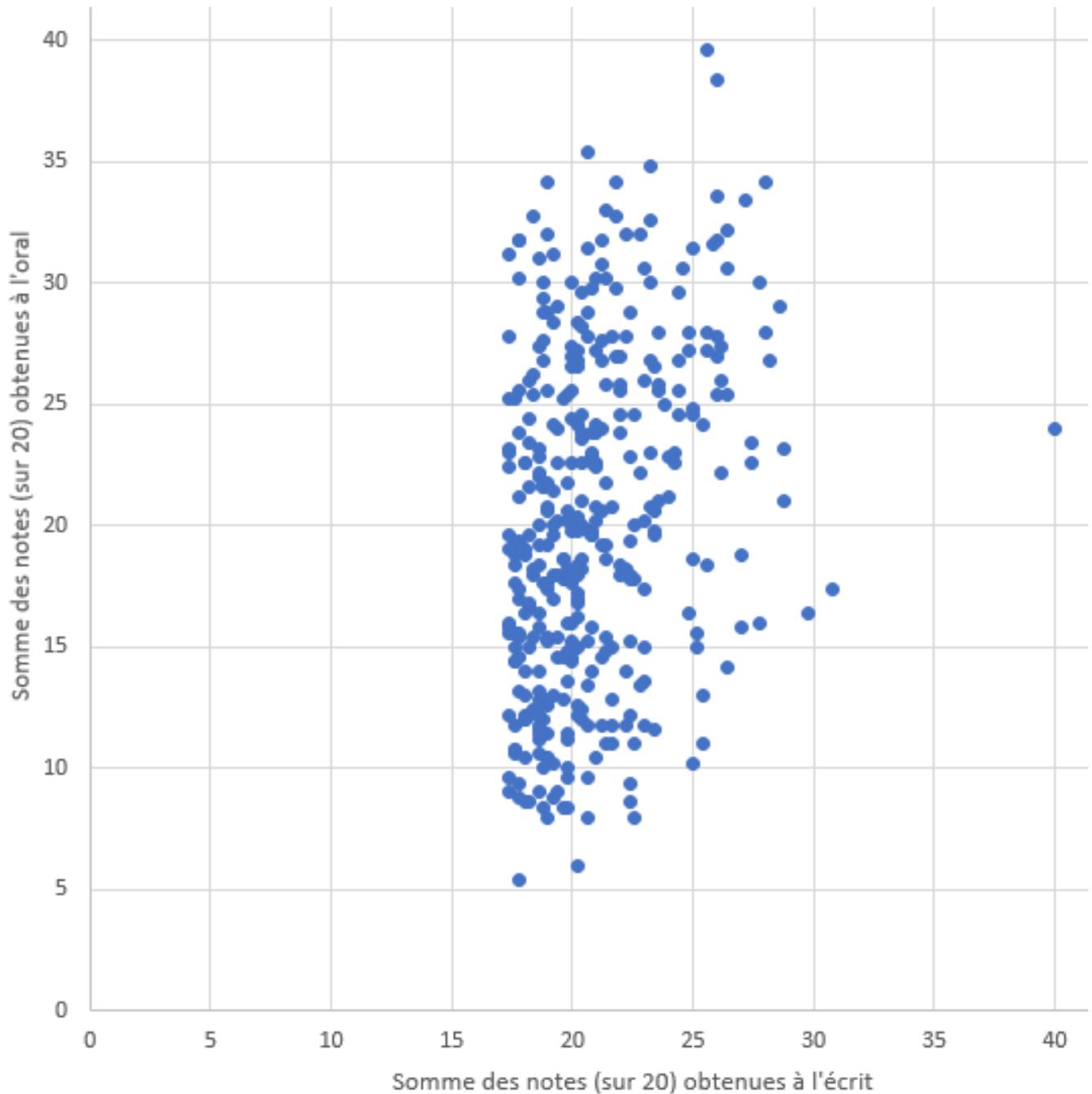
#### Histogrammes des notes (sur 20) attribuées à l'épreuve d'exemples et exercices

La moyenne des notes vaut 10,08 et la médiane est égale à 9,8.



## Nuage des notes d'écrit et d'oral

Le graphique ci-dessous, dans lequel chaque candidat présent à l'oral est repéré par le couple des totaux obtenus respectivement à l'écrit et à l'oral (sommés respectives des notes sur 20 obtenues aux deux épreuves écrites et aux deux épreuves orales), souligne toute l'importance qui s'attache à une solide préparation de l'oral. On observe ainsi que certains candidats avec un bon niveau à l'écrit ne sont pas admis et qu'*a contrario* des candidats proches de la barre d'admissibilité à l'écrit sont reçus, parfois dans un bon rang, grâce à de très bonnes prestations orales.



## Chapitre 2

# Programme du concours pour la session 2022

Le programme du concours pour la session **2022** est publié sur le site du ministère de l'Éducation nationale à l'adresse suivante :

<https://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid98492/programmes-concours-enseignants-session-2022.html>

## Chapitre 3

# Rapport sur les épreuves écrites

L'arrêté définissant le concours dispose que les épreuves écrites « ont pour objectif d'évaluer la maîtrise des connaissances mathématiques et la capacité de les mobiliser pour étudier des situations, ainsi que la solidité, sur le plan scientifique, des acquis professionnels ».

Aussi, une bonne connaissance d'un minimum d'outils théoriques est-elle indispensable à la réussite de ces épreuves, ce qui suppose un travail de préparation visant la maîtrise des théorèmes fondamentaux. Il est conseillé de travailler les preuves élémentaires qui, outre l'assimilation du programme, permettent de résoudre un bon nombre de questions en début de problème. Un entraînement régulier à la résolution de problèmes permet d'acquérir de bons réflexes intellectuels.

Il est attendu dans les copies les qualités exigibles d'un professeur de mathématiques, à savoir :

- le soin, la clarté de l'expression, la lisibilité de la présentation ainsi qu'une certaine attention à l'orthographe ;
- l'utilisation de quantificateurs appropriés. Trop nombreuses sont les copies dans lesquelles les démonstrations ne comportent aucun quantificateur. Ce manque de rigueur dans les preuves est à corriger ;
- la rigueur de la rédaction : choisir de façon pertinente les articles utilisés (singulier ou pluriel, défini ou indéfini) ; citer clairement les théorèmes ou résultats invoqués, en vérifier les hypothèses et s'abstenir de citer des hypothèses sans rapport avec le théorème ;
- la maîtrise des techniques usuelles de démonstration : raisonnement par équivalence, raisonnement par analyse-synthèse, démonstration par récurrence, par l'absurde, par contraposée etc. ;

Quelques conseils de méthode :

Avant de se lancer dans la résolution de la première question, a fortiori avant de commencer sa rédaction, il est recommandé aux candidats de prendre le temps de lire l'énoncé dans son intégralité afin d'identifier les thèmes abordés, de repérer la progressivité des questions et les notions nouvelles qui sont introduites. Cela permet en général de fixer un cadre clair dans lequel se situe l'épreuve. Cela évite en outre à un moment donné la "démonstration" de résultats manifestement en contradiction avec une question ultérieure.

Il est profitable de "prendre en main" les hypothèses des questions, par exemple en les notant au brouillon dans la phase de recherche. Cela clarifie le but à atteindre. Trop de candidats partent d'emblée sur des pistes qui ne peuvent aboutir en cherchant ce qui est déjà donné, sans objectif clair, ou encore sans recul par rapport aux (nouveaux) objets manipulés. Répétons-le : un objectif à atteindre clairement identifié est une condition nécessaire à la bonne résolution d'une question de

mathématiques.

Il convient notamment de rappeler que les symboles  $\Rightarrow$  et  $\Leftrightarrow$  sont des connecteurs logiques et qu'il est incorrect de les utiliser comme des abréviations.

Il est aussi apprécié que les candidats expliquent leur démarche, concluent les questions et accompagnent, si c'est pertinent, leurs démonstrations de figures, schémas ou autres illustrations géométriques.

### 3.1 Première épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :

<https://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep1/21-ep1.pdf>

#### 3.1.1 Statistiques de réussite

Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions des candidats déclarés admissibles.

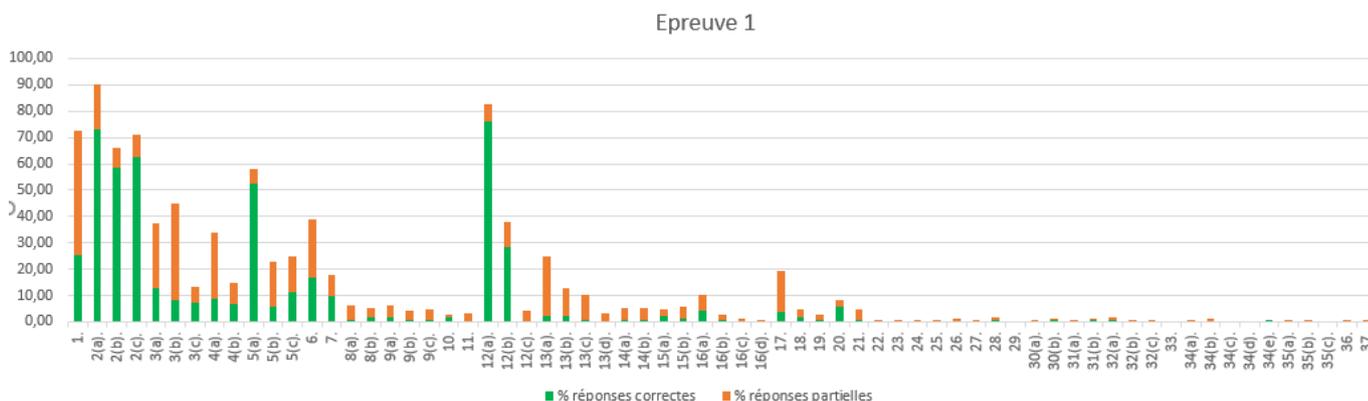


FIGURE 3.1 – Lecture : pour chaque question (ou item de correction lorsque plusieurs composantes sont évaluées dans une même question), la zone verte indique le pourcentage de candidats ayant fourni une bonne réponse, la zone orange représente le pourcentage de ceux ayant proposé une réponse partiellement juste.

#### 3.1.2 Analyse de l'épreuve et commentaires par questions

##### 1. Présentation du sujet

Le sujet de mathématiques 1 proposé cette année est constitué de 6 parties et porte sur l'algèbre générale et l'algèbre linéaire au programme de l'agrégation interne de mathématiques.

La première partie, très proche du cours, permet aux candidats de montrer leur maîtrise des bases de l'algèbre linéaire.

La seconde partie propose une preuve d'un théorème de Burnside sur les sous-algèbres irréductibles d'endomorphismes par une méthode faisant essentiellement manipuler les matrices par blocs. Cette partie demande davantage de recul. Cependant, comme indiqué dans l'énoncé, en admettant le résultat démontré dans cette partie, les quatre parties suivantes peuvent être abordées de manière indépendante.

La troisième partie propose d'examiner la pertinence des hypothèses du théorème de Burnside sur deux exemples en dimension 3. Elle fait appel à quelques résultats sur les polynômes à coefficients rationnels, la structure de corps et l'arithmétique des entiers.

La quatrième partie illustre l'application du théorème de Burnside à trois résultats sur des sous-groupes du groupe linéaire (le groupe unitaire, un groupe borné et un résultat de co-réduction dû à Kolchin).

La cinquième partie porte sur les matrices magiques, les matrices de permutation et leur lien.

La sixième partie fait établir avec des arguments de passage au quotient un lemme de co-trigonalisation qui, combiné au théorème de Burnside de la partie 2, permet de disposer d'un outil efficace de preuve de co-trigonalisabilité. Une des applications proposées est ensuite le théorème de Mc Coy.

## 2. Remarques d'ordre général

Nombreux sont les candidats qui ont abordé relativement peu de questions.

Certains points très classiques (essentiellement des questions de cours) n'ont pas rencontré le succès que l'on espérait.

Les réponses aux questions d'algèbre linéaire, même proches du cours, sont souvent très laborieuses et les démonstrations échouent parfois.

Les problèmes d'existence et d'unicité ne sont pas toujours clairement identifiés. Rappelons que l'unicité d'une étape de la construction d'un objet n'en prouve pas l'unicité.

D'une manière générale, la rédaction laisse souvent à désirer. Pas assez précise, pas assez explicite, elle figure sur la copie comme si on laissait au correcteur le soin de finir le raisonnement. Ce n'est pas ce qui est attendu.

## 3. Remarques question par question

**Q1** Très peu de preuves correctes pour cette question de cours. On trouve dans les preuves proposées des égalités fausses du type  $tr(A^p) = (tr A)^p$ , ou  $tr(A^p) = p(tr A)$ . Les affirmations vagues comme "la trace est la somme des valeurs propres" ne sont pas recevables en l'état. Des précisions sont attendues sur le corps de base et sur les multiplicités en jeu.

**Q2a** Question bien résolue. Le cas de trois matrices ne demande pas une preuve indépendante, ce qui a été bien vu en général.

**Q2b** Question bien résolue. Une erreur parfois rencontrée concerne l'égalité de deux objets de types différents : une matrice égale à un scalaire, souvent le symbole de Kronecker de l'énoncé.

**Q2c** Il s'agissait ici de fournir un exemple de trois matrices pour lesquelles les traces demandées étaient différentes. Attention donc à ne pas invoquer des considérations très générales ou vagues sur des objets "pas forcément égaux".

**Q3a** Très peu de candidats rédigent correctement la preuve de l'existence et de l'unicité. On note une utilisation fautive du théorème de représentation de Riesz sur les formes linéaires dans un espace muni d'un produit scalaire, ce qui n'est pas le cas de la forme bilinéaire qui à A et B associe  $tr(AB)$ . Attention en outre à l'orthographe du mot "existence" !

**Q3b** Peu de candidats ont abordé cette question. La base préduale n'est en général pas invoquée. La question est rarement traitée correctement et dans son intégralité quand elle est abordée.

**Q3c** Question peu abordée. Beaucoup de tentatives échouent, souvent noyées dans les calculs utilisant les matrices élémentaires.

**Q4a** Étonnamment, peu de candidats réussissent cette question qui semble pourtant accessible. Les points importants de la preuve (une sous-algèbre est un sous-espace vectoriel, un groupe contient l'élément neutre et est stable par produit) sont rarement mis en valeur.

**Q4b** Question peu et mal traitée. Les candidats sont nombreux à ignorer que les éléments de  $G$  fournissent une famille génératrice de  $\text{Vect}(G)$ . Le théorème de la "base extraite" est méconnu. Rappelons en outre que le groupe linéaire  $GL_n(\mathbf{K})$  n'est pas un espace vectoriel.

**Q5a** Question de cours bien faite en général.

**Q5b** Question de cours souvent mal rédigée et très rarement correcte. Beaucoup de preuves fausses "en prenant certains vecteurs propres". Rappelons que si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , espace vectoriel de dimension finie, l'assertion "de toute base de  $E$  on peut extraire une base de  $F$ " est fautive. L'exemple d'une droite dans le plan fournit un contre-exemple immédiat. L'usage d'un polynôme annulateur scindé à racines simples pour caractériser la diagonalisabilité semble méconnu.

**Q5c** Question bien faite en général. On note quelques confusions entre sous-espace stable et ensemble des vecteurs invariants (sous-espace propre pour la valeur propre 1). Une autre erreur courante consiste à considérer que toute base de vecteurs propres pour  $f$  est également base de vecteurs propres pour  $g$ .

**Q6** Question correctement abordée, même si beaucoup de candidats oublient la réciproque (élémentaire, mais néanmoins à mentionner) ou omettent de préciser qu'un endomorphisme admet au moins une valeur propre car le corps de base est algébriquement clos (ici  $\mathbf{C}$ ).

**Q7** On regrette ici très souvent un manque de clarté sur les objets manipulés. De quels objets parle-t-on dans cette question ?

**Q8a** Question parfois abordée. Dans les copies où elle l'est, le calcul par blocs pose problème. En général, la matrice (par blocs) proposée est fautive. Une erreur très souvent rencontrée est la suivante : un élément de  $L(E^n)$  est traité spontanément comme étant nécessairement du type  $(v_1, \dots, v_n) \mapsto (g_1(v_1), \dots, g_n(v_n))$  avec les  $g_i$  des endomorphismes de  $E$ .

**Q8b et 9a** Questions peu abordées.

**Q9b** Une erreur courante est de considérer que l'intersection d'un sous-espace avec une somme directe est la somme directe des intersections de ce sous-espace avec les facteurs de la somme directe. Il suffit par exemple de considérer une droite qui n'est contenue dans aucun des facteurs de la somme directe. En outre, signalons qu'un sous-espace d'un produit cartésien n'est pas nécessairement un produit de sous-espaces des espaces qui constituent le produit. Il suffit par exemple de considérer la première bissectrice dans  $\mathbf{R}^2$ .

**Q9c, 10 et 11** Questions peu abordées.

**Q12a** Question bien résolue dans la majorité des cas.

**Q12b** Question abordée de manière inégale. Beaucoup de candidats concluent prématurément, sans argument véritablement convaincant. Les calculs sont en outre assez souvent laborieux. L'utilisation pertinente d'arguments sur la dimension est rare.

**Q12c** Certains semblent penser que si aucune des droites engendrées par les vecteurs de la base canonique n'est stable, alors il n'existe aucune droite stable. Il y a en effet bien d'autres droites dans l'espace  $\mathbf{C}^3$ . On retrouve ici parfois la confusion entre sous-espace stable et sous-espace propre pour la valeur propre 1.

**Q13a** La rédaction de cette question classique est en général trop succincte. Le candidat doit expliquer pourquoi il est suffisant que le polynôme de degré 3 n'admette aucune racine rationnelle pour pouvoir conclure que le polynôme est irréductible sur  $\mathbf{Q}$ . Cette confusion entre l'irréductibilité et l'existence de racines est très courante, trop de candidats considérant qu'un polynôme est irréductible si et seulement si il est sans racines, quel que soit le contexte. Signalons enfin que le fait que  $p$  et  $q$  soient premiers entre eux n'est pas contradictoire avec le fait que  $q$  divise  $p$ . Il suffit de considérer le cas  $q = 1$ .

**Q13b** Le théorème de Cayley-Hamilton est rarement utilisé. Certains candidats écrivent qu'une base est  $(id, u, u^3)$ , alors qu'un minimum d'observation permet de s'apercevoir que c'est faux. L'espace vectoriel étudié ici est parfois l'objet de confusions sur la nature des objets manipulés.

**Q13c** Trop de candidats semblent considérer que si  $u$  est inversible alors tout élément de  $A$  l'est aussi. On rappelle également que dans un corps, tous les éléments non nuls sont inversibles.

**Q13d** On a observé de nombreux mélanges entre les matrices et l'espace sur lequel elles agissent.

**Q14a** Attention aux erreurs facilement évitables! Certains candidats expriment  $U$  à l'aide de l'inverse de  $X$ , ce qui n'a guère de sens,  $X$  étant une matrice non carrée.

**Q14b et 15a** Questions peu abordées.

**Q15b** Cette question a été bien résolue.

**Q16a** Cette question est en général bien faite, même si l'aspect algébriquement clos du corps de base est parfois passé sous silence.

**Q16b** Le produit de deux endomorphismes nilpotents n'est pas nécessairement nilpotent.

**Q16c et d** Questions peu abordées.

**Q17** Cette question est bien faite en général.

**Q18** La dimension est souvent devinée et assez rarement prouvée.

**Q19** Question très peu abordée.

**Q20 et 21** Questions correctement résolues quand elles sont abordées.

**Q22 à 37** Questions abordées de manière très peu significative.

### 3.1.3 Quelques éléments de correction

#### Préliminaires

1. Soit  $A$  un élément nilpotent de  $M_n(\mathbf{K})$ , c'est à dire pour lequel il existe un entier naturel  $p$  non nul tel que  $A^p = 0$ . Quelle est sa trace?

##### Éléments de solution

Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $X^n$ . Sa trace est donc nulle (coefficient lié à  $X^{n-1}$ ). Toute autre caractérisation des matrices nilpotentes est recevable.

2. Soient  $A, B, C$  trois éléments de  $M_n(\mathbf{K})$ .

- (a) Démontrer que  $tr(AB) = tr(BA)$  et  $tr(ABC) = tr(CAB)$ .

##### Éléments de solution

En notant  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$  on calcule

$$tr(AB) = \sum_{i,k} a_{i,k} b_{k,i} = tr(BA).$$

Il suffit en suite d'appliquer cela à  $AB$  et  $C$ .

- (b) Soient  $i, j, k, l$  quatre entiers tels que  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $1 \leq k \leq n$  et  $1 \leq l \leq n$ . Donner sans démonstration ce que vaut le produit  $E_{i,j} E_{k,l}$ . On utilisera le symbole de Kronecker.

##### Éléments de solution

Il est connu que, utilisant le symbole de Kronecker,

$$E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}.$$

- (c) Démontrer que pour  $n \geq 2$ , il peut arriver que  $tr(ABC) \neq tr(CBA)$ .

##### Éléments de solution

Il suffit de prendre  $A = E_{1,1}$ ,  $B = E_{1,2}$  et  $C = E_{2,1}$ . Dans ce cas,  $ABC = E_{1,1}$  et la trace vaut 1. Par ailleurs,  $CBA = 0$  et la trace est nulle.

3. Les formes linéaires sur  $M_n(\mathbf{K})$ .

- (a) Démontrer que si  $f$  est une forme linéaire sur  $M_n(\mathbf{K})$ , il existe une unique matrice  $A$  de  $M_n(\mathbf{K})$  telle que pour toute matrice  $M$  de  $M_n(\mathbf{K})$ , on ait  $f(M) = \text{tr}(AM)$ .

**Éléments de solution**

Une forme linéaire sur  $M_n(\mathbf{K})$  s'écrit, en notant  $M = (m_{i,j})$ ,

$$f(M) = \sum_{i,k} a_{i,k} m_{k,i}$$

avec les  $a_{i,k}$  des scalaires. Cela fournit une matrice  $A$  qui convient. En testant  $f$  pour les matrices élémentaires, on obtient pour tous  $i$  et  $j$ ,  $f(E_{i,j}) = a_{j,i}$  et on en déduit l'unicité cherchée.

- (b) Démontrer que si les matrices  $M_1, M_2, \dots, M_{n^2}$  forment une base de  $M_n(\mathbf{K})$ , alors les formes linéaires définies pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n^2$  par  $f_i(M) = \text{tr}(M_i M)$  forment une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $M_n(\mathbf{K})$ . En déduire qu'il existe une base  $(F_1, \dots, F_{n^2})$  de  $M_n(\mathbf{K})$  telles que pour toute matrice  $M$  de  $M_n(\mathbf{K})$ , on ait

$$M = \sum_{i=1}^{n^2} \text{tr}(M_i M) F_i.$$

**Éléments de solution**

La question précédente se traduit par le fait que l'application qui à  $A$  associe la forme linéaire  $f_A$  définie par  $f_A(M) = \text{tr}(AM)$  est un isomorphisme d'espace vectoriels entre  $M_n(\mathbf{K})$  et son dual (la linéarité étant claire). Un tel isomorphisme transforme une base de  $M_n(\mathbf{K})$  en base du dual, d'où le premier résultat. La base préduale de  $(f_1, \dots, f_{n^2})$  fournit  $(F_1, \dots, F_{n^2})$  voulue.

- (c) Démontrer que si  $f$  est une forme linéaire sur  $M_n(\mathbf{K})$  telle que  $f(MN) = f(NM)$  pour toutes matrices  $M$  et  $N$  de  $M_n(\mathbf{K})$ , alors  $f$  est proportionnelle à la trace. On pourra utiliser les matrices  $E_{i,j}$  et le symbole de Kronecker, définis au début de cette partie.

**Éléments de solution**

Une telle forme linéaire s'écrit donc  $f(M) = \text{tr}(AM)$  avec  $A \in M_n(\mathbf{K})$ . On a donc  $\text{tr}(AMN) = \text{tr}(ANM)$  pour toutes matrices  $M$  et  $N$ . Prenons  $M = E_{i,j}$  et  $N = E_{k,l}$ . Notons

$$A = \sum_{p,q} a_{p,q} E_{p,q}.$$

Alors

$$AMN = \sum_p a_{p,i} \delta_{j,k} E_{p,l},$$

de trace  $a_{l,i} \delta_{j,k}$ . De même, la trace de  $ANM$  est alors  $a_{j,k} \delta_{l,i}$ . Le choix  $i = l$  et  $j = k$  donne  $a_{l,l} = a_{k,k}$ . Le choix  $i = l$  et  $j \neq k$  donne  $a_{j,k} = 0$ . Ainsi,  $A$  est une matrice scalaire et en notant  $A = \alpha I_n$  avec  $\alpha \in \mathbf{K}$ , on obtient  $f = \alpha \text{tr}$ . Une preuve directe est aussi possible.

4. Soit  $G$  un sous-groupe de  $Gl_n(\mathbf{K})$ . On note  $\mathcal{G}$  la sous-algèbre de  $M_n(\mathbf{K})$  engendrée par  $G$ .

- (a) Démontrer que  $\mathcal{G} = \text{Vect}(G)$  où  $\text{Vect}(G)$  désigne le sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbf{K})$  engendré par  $G$ .

**Éléments de solution**  $\text{Vect}(G)$  est inclus dans  $\mathcal{G}$ . Comme  $G$  est un groupe, il contient  $I_n$ , donc  $I_n \in \text{Vect}(G)$ . En outre  $G$  étant un groupe, le produit de deux combinaisons linéaires d'éléments de  $G$  est encore une combinaison linéaire d'éléments de  $G$ . Ainsi,  $\text{Vect}(G)$  est une sous-algèbre de  $M_n(\mathbf{K})$  contenant  $G$ . On en déduit que  $\mathcal{G}$  est inclus dans  $\text{Vect}(G)$ , ce qui conclut.

- (b) Démontrer qu'il existe une base de  $\mathcal{G}$  formée d'éléments de  $G$ .

**Éléments de solution**

Avec la question précédente,  $G$  constitue une famille génératrice de  $\mathcal{G}$  en tant qu'espace vectoriel. On peut donc en extraire une base.

5. Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ . On suppose qu'ils commutent.

- (a) Démontrer que tout sous-espace vectoriel propre de  $f$  est stable par  $g$ .

**Éléments de solution**

C'est une question de cours. Si  $\lambda$  est valeur propre de  $f$  et  $x$  un vecteur propre associé, alors  $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$ , ce qui prouve que  $g(x)$  est dans le sous-espace vectoriel propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

- (b) Démontrer que si  $g$  est diagonalisable, alors sa restriction à tout sous-espace stable (par  $g$ ) est diagonalisable.

**Éléments de solution**

C'est une question de cours. Si  $g$  est diagonalisable, il est annulé par un polynôme de  $\mathbf{K}[X]$  scindé à racines simples. Ce polynôme est aussi annulateur de la restriction de  $g$ , qui est donc diagonalisable.

- (c) Démontrer que si  $f$  et  $g$  sont diagonalisables, alors ils sont co-diagonalisables, c'est à dire qu'ils possèdent une base commune de diagonalisation.

**Éléments de solution**

L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable donc  $E$  est somme directe des sous-espaces propres de  $f$ . Chacun de ces sous-espaces propres est stable par  $g$  car  $f$  et  $g$  commutent. La restriction de  $g$  à chaque sous-espace propre de  $f$  est donc diagonalisable. On dispose donc d'une base de chaque sous-espace propre de  $f$  formée de vecteurs propres de  $g$ . En rassemblant ces bases, on obtient une base qui diagonalise à la fois  $f$  et  $g$ .

**Un théorème de Burnside**

6. Démontrer que l'ensemble des éléments de  $L(E)$  qui commutent avec tous les éléments de  $\mathcal{A}$  sont exactement les homothéties. On pourra considérer une valeur propre d'un tel endomorphisme.

**Éléments de solution**

Soit  $v$  un endomorphisme de  $E$  qui commute avec tous les éléments de  $\mathcal{A}$ . Notons  $\lambda$  une valeur propre de  $v$ . Il en existe bien car  $\mathbf{C}$  est algébriquement clos. Le sous-espace propre correspondant est donc stable par tout élément  $u$  de  $\mathcal{A}$ . C'est donc nécessairement  $E$  d'après l'hypothèse car il n'est pas réduit à  $\{0\}$ . On en déduit que  $v$  est une homothétie. La réciproque est claire.

7. Démontrer à l'aide d'un exemple en dimension 2 que le résultat de la question précédente tombe en défaut si  $\mathbf{C}$  est remplacé par  $\mathbf{R}$ . On pourra utiliser des rotations de  $\mathbf{R}^2$ .

**Éléments de solution**

Prenons  $E = \mathbf{R}^2$  euclidien usuel et  $u$  une rotation d'angle distinct de 0 modulo  $\pi$ ,  $\mathcal{A} = \{u\}$ . Les seuls sous-espaces de  $\mathbf{R}^2$  stables par  $u$  sont  $\{0\}$  et  $\mathbf{R}^2$  et toutes les rotations commutent avec  $u$  car le groupe  $SO(\mathbf{R}^2)$  est commutatif. On dispose donc d'un exemple, comme demandé.

8. (a) Décrire dans la base ci-dessus la matrice par blocs d'un élément de  $L(E^n)$  qui commute avec tous les éléments  $\rho(a)$  pour  $a \in \mathcal{A}$ . On désigne par  $\mathcal{C}$  l'ensemble des endomorphismes de  $E^n$  qui commutent avec tous les éléments  $\rho(a)$  pour  $a \in \mathcal{A}$ .

**Éléments de solution**

Si  $a \in \mathcal{A}$  admet  $A$  comme matrice dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ , alors la matrice de  $\rho(a)$  dans la base de  $E^n$  correspondante est diagonale par blocs, tous les blocs étant égaux à  $A$ . Une

matrice écrite par blocs  $M = (M_{i,j})$  (tous de taille  $n$ ) commute avec la matrice diagonale par blocs ci-dessus si et seulement si pour tous  $i$  et  $j$ ,  $AM_{i,j} = M_{i,j}A$ . La question 6 donne donc que chaque  $M_{i,j}$  est une matrice scalaire, c'est à dire qu'il existe un scalaire  $\lambda_{i,j}$  tel que  $M_{i,j} = \lambda_{i,j}I_n$ . La réciproque est claire et on a donc la description voulue.

- (b) Démontrer que si  $f \in L(E)$ , alors  $\rho(f)$  commute avec tous les éléments de  $\mathcal{C}$ . On pourra considérer la matrice par blocs de  $\rho(f)$ .

**Éléments de solution**

Si  $f \in L(E)$  est de matrice  $A$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ , alors la matrice de  $\rho(f)$  dans la base de  $E^n$  correspondante est diagonale par blocs, tous les blocs étant égaux à  $A$ . Une telle matrice commute bien avec celles obtenues à la question précédente, tous les blocs étant des matrices scalaires. On a donc le résultat.

9. Soit  $W \subset E^n$  un sous-espace vectoriel stable par tous les  $\rho(a)$  pour  $a \in \mathcal{A}$ . On se propose de démontrer que  $W$  admet un supplémentaire dans  $E^n$  également stable par tous les  $\rho(a)$  pour  $a \in \mathcal{A}$ .

- (a) Démontrer que si  $i \in \{1, \dots, n\}$ , alors  $W \cap E_i = \{0\}$  ou  $W \cap E_i = E_i$ .

**Éléments de solution**

Le sous-espace  $W$  est stable par tous les  $\rho(a)$  et  $E_i$  aussi, donc  $W \cap E_i$  également. Pour  $x \in E$ ,  $\rho(a)((0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)) = (0, \dots, 0, a(x), 0, \dots, 0)$  (avec  $x$  et  $a(x)$  écrits en place  $i$ ) donc l'hypothèse faite sur  $\mathcal{A}$  conclut :  $W \cap E_i = \{0\}$  ou  $E_i$ .

- (b) Si  $W \cap E_1 = \{0\}$ , on pose  $W_2 = W \oplus E_1$  et si  $W \cap E_1 = E_1$ , on pose  $W_2 = W$ . Que vaut  $W_2 \cap E_2$ ?

**Éléments de solution**

Comme précédemment,  $W_2$  et  $E_2$  étant stables par tous les  $\rho(a)$ , cette intersection est  $\{0\}$  ou  $E_2$ .

- (c) En poursuivant comme ci-dessus, construire une suite croissante  $W_1 = W, W_2, \dots, W_n$  de  $n$  sous-espaces de  $E^n$  stables par tous les  $\rho(a)$  pour  $a \in \mathcal{A}$ , avec  $W_n = E^n$  et en déduire l'existence d'un supplémentaire de  $W$  dans  $E^n$  également stable par tous les  $\rho(a)$  pour  $a \in \mathcal{A}$ .

**Éléments de solution**

On continue le processus de proche en proche :  $W_3 = W_2 \oplus E_2$  si  $W_2 \cap E_2 = \{0\}$  et  $W_2$  si  $W_2 \cap E_2 = E_2$  etc...jusqu'à l'ordre  $n$ . Cette suite finie est clairement croissante et constituée de sous-espaces tous stables par les  $\rho(a)$ . On a bien  $W_n = E^n$  car par construction  $E^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_n \subset W_n \subset E^n$ . On dispose donc de  $W \subset W_2 \subset \dots \subset W_n = E^n$  tous stables par les  $\rho(a)$ . On part alors d'une base de  $W$  et on complète en base de  $W_2$  puis de  $W_3$  etc... jusqu'à obtenir une base de  $E^n$  ainsi : on ne rajoute rien quand  $W_i = W_{i+1}$  dans la construction précédente et on complète avec une base de  $E_i$  quand  $W_{i+1} = W_i \oplus E_i$ . Les vecteurs ainsi rajoutés à la base de  $W$  engendrent alors clairement un sous-espace supplémentaire de  $W$  dans  $E^n$  formé de la somme directe d'un certain nombre de  $E_i$ , donc bien stable par les  $\rho(a)$ .

10. Soit  $W \subset E^n$  un sous-espace vectoriel stable par tous les  $\rho(a)$  pour  $a \in \mathcal{A}$ . Soit  $W'$  un supplémentaire de  $W$  dans  $E^n$  également stable par tous les  $\rho(a)$  pour  $a \in \mathcal{A}$ . Notons  $p : E^n \rightarrow E^n$  la projection sur  $W$  parallèlement à  $W'$ . Démontrer que  $p$  commute avec tous les  $\rho(a)$  pour  $a \in \mathcal{A}$ .

**Éléments de solution**

Soit  $a$  dans  $\mathcal{A}$ .

Si  $x \in W$ , alors  $p \circ \rho(a)(x) = \rho(a)(x) = \rho(a) \circ p(x)$ .

Si  $x \in W'$ , alors  $p \circ \rho(a)(x) = 0 = \rho(a) \circ p(x)$ .

Ainsi on a bien  $p \circ \rho(a) = \rho(a) \circ p$  car  $W$  et  $W'$  sont supplémentaires dans  $E^n$ .

11. Soit  $W \subset E^n$  l'ensemble formé des éléments  $(a(e_1), \dots, a(e_n))$  quand  $a$  décrit  $\mathcal{A}$ . Vérifier que  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $E^n$  et qu'il est stable par tous les  $\rho(b)$  pour  $b \in \mathcal{A}$ . En utilisant la question précédente, démontrer que si  $f \in L(E)$ , il existe  $a \in \mathcal{A}$  tel que  $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (a(e_1), \dots, a(e_n))$ . Conclure que  $\mathcal{A} = L(E)$  et énoncer finalement le résultat obtenu.

**Éléments de solution**

Sans difficulté,  $W$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E^n$  en raison de la structure d'algèbre de  $\mathcal{A}$ .

Si  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathcal{A}$ , alors  $\rho(b)(a(e_1), \dots, a(e_n)) = (b \circ a(e_1), \dots, b \circ a(e_n)) \in W$  car  $b \circ a \in \mathcal{A}$ .

Notons  $p$  un projecteur sur  $W$  construit comme à la question précédente. Soit  $f \in L(E)$ .

On a alors  $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \rho(f)(e_1, \dots, e_n) = \rho(f)(p(e_1), \dots, p(e_n)) = \rho(f) \circ p(e_1, \dots, e_n)$  car  $e_1, \dots, e_n$  sont dans  $W$  (il suffit de prendre pour  $a$  l'identité).

Avec la question 10,  $p$  est donc dans l'ensemble  $\mathcal{C}$  et avec la question 8b,  $p$  commute avec  $\rho(f)$ . Ainsi,  $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = p \circ \rho(f)(e_1, \dots, e_n) = p(f(e_1), \dots, f(e_n)) \in W$  car  $p$  est un projecteur sur  $W$ .

Il existe donc  $a \in \mathcal{A}$  tel que  $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (a(e_1), \dots, a(e_n))$ . On conclut que  $f = a$  car ils coïncident sur une base de  $E$ . Finalement,  $\mathcal{A} = L(E)$ . C'est le théorème de Burnside.

12. Dans cette question, on illustre l'importance du fait que  $\mathcal{A}$  soit une sous-algèbre dans le théorème de Burnside. On confond matrice de  $M_3(\mathbf{C})$  et endomorphisme de  $\mathbf{C}^3$  canoniquement associé. On définit

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbf{C}^2 \right\}.$$

- (a) Démontrer que tous les éléments de  $\mathcal{A}$  sont nilpotents.

**Éléments de solution**

Si  $A$  est dans  $\mathcal{A}$ , on peut par exemple calculer  $A^3$  pour trouver 0 ou aussi calculer le polynôme caractéristique qui est  $X^3$ .

- (b) Démontrer que la sous-algèbre de  $M_3(\mathbf{C})$  engendrée par  $\mathcal{A}$  contient toutes les matrices diagonales. On pourra considérer  $A$  dans  $\mathcal{A}$  formée avec  $a = 0$  et  $b = 1$  et  $B$  formée avec  $a = 1$  et  $b = 0$ .

**Éléments de solution**

Notons  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On vérifie alors que  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . La famille  $(I_3, AB, BA)$  est libre et forme donc une base du sous-

espace des matrices diagonales. Ces matrices sont dans l'algèbre engendrée par  $\mathcal{A}$ , ce qui prouve le résultat voulu.

- (c) Déterminer les sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{C}^3$  stables par tous les éléments de  $\mathcal{A}$ . Que peut-on en déduire quant aux hypothèses du théorème de Burnside?

**Éléments de solution**

Si une droite  $D$  est stable par tous les éléments de  $\mathcal{A}$ , elle est dirigée par un vecteur non nul qui est propre pour tous les éléments de  $\mathcal{A}$ . La seule valeur propre d'un élément de  $\mathcal{A}$  est 0 et donc ce vecteur est dans le noyau de tous les éléments de  $\mathcal{A}$ . Il est nul en examinant par exemple  $A$  et  $B$  ci-dessus. Il n'y a donc pas de droite stable.

Si un plan  $P$  est stable par tous les éléments de  $\mathcal{A}$ , il l'est par tous les éléments de l'algèbre engendrée. Il admet une équation cartésienne du type  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$  avec

$(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ . Par exemple,  $\alpha \neq 0$ . La stabilité par l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice élémentaire  $E_{1,1}$  (qui est diagonale) assure que ce plan est le plan dont une équation est  $x = 0$ . Il n'est pas stable par l'endomorphisme canoniquement associé à  $B$  ci-dessus. Il n'y a donc pas de plan stable. On peut aussi utiliser le lien entre plan stable et vecteur propre d'une transposée.

Finalement, les seuls sous-espaces stables par tous les éléments de  $\mathcal{A}$  sont  $\{0\}$  et  $\mathbf{C}^3$ . Comme  $\mathcal{A} \neq M_3(\mathbf{C})$ , la structure d'algèbre dans le théorème de Burnside s'avère nécessaire. La seule structure d'espace vectoriel ne suffit pas.

- 13.** Dans cette question, on note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbf{Q}^3$  canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $\mathcal{A}$  la sous-algèbre de  $L(\mathbf{Q}^3)$  engendrée par  $u$ .

- (a) Démontrer que le polynôme  $X^3 + X + 1$  est irréductible dans  $\mathbf{Q}[X]$ .

**Éléments de solution**

Si ce polynôme n'était pas irréductible dans  $\mathbf{Q}[X]$ , il serait divisible par un facteur de degré 1 car il est de degré 3. Il aurait donc une racine rationnelle, disons  $p/q$ , avec  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $q \in \mathbf{N}^*$  et  $p \wedge q = 1$ . En injectant, on trouve donc  $p^3 + pq^2 + q^3 = 0$ . Cela conduit à  $p|q^3$  et  $q|p^3$  et donc  $p = 1$  ou  $-1$  et  $q = 1$  car  $p \wedge q = 1$ . Ni 1 ni  $-1$  ne sont racines, d'où l'irréductibilité annoncée.

- (b) Expliciter une base de  $\mathcal{A}$  en fonction de  $u$ .

**Éléments de solution**

Le polynôme précédent est le polynôme caractéristique de  $u$  (le calculer ou remarquer que la matrice proposée est une matrice compagnon). Le théorème de Hamilton-Cayley assure donc par division euclidienne que l'on dispose de  $\mathcal{A} = \mathbf{Q}[u] = \mathbf{Q}_2[u]$ . La famille  $(id_{\mathbf{Q}^3}, u, u^2)$  est donc génératrice de  $\mathcal{A}$ . Le polynôme précédent est le polynôme caractéristique de  $u$  et est irréductible, c'est donc aussi son polynôme minimal. Il n'existe donc pas de polynôme annulateur non nul de degré  $\leq 2$ . Cela garantit la liberté de la famille ci-dessus. C'est donc une base de  $\mathcal{A}$ .

- (c) Démontrer que  $\mathcal{A}$  est un corps.

**Éléments de solution**

Seul le caractère inversible dans  $\mathcal{A}$  de tout élément non nul est à examiner. Un élément non nul de  $\mathcal{A}$  s'écrit  $P(u)$  avec  $P \in \mathbf{Q}_2[X]$  non nul. Ce polynôme est premier avec  $X^3 + X + 1$  car ce dernier est irréductible dans  $\mathbf{Q}[X]$ . Le théorème de Bezout fournit donc  $A$  et  $B$  dans  $\mathbf{Q}[X]$  tels que  $AP + (X^3 + X + 1)B = 1$ . L'évaluation en  $u$  donne  $A(u)P(u) = id_{\mathbf{Q}^3}$ , ce qui montre que  $\mathcal{A}$  est bien un corps.

- (d) Déterminer les sous-espaces de  $\mathbf{Q}^3$  stables par  $u$ . Que peut-on en déduire quant aux hypothèses du théorème de Burnside ?

**Éléments de solution**

Si un sous-espace est stable par  $u$  et de dimension 1 ou 2, le polynôme caractéristique de la restriction de  $u$  à ce sous-espace divise  $X^3 + X + 1$  et est degré 1 ou 2, ce qui est impossible par irréductibilité de  $X^3 + X + 1$ . Les seuls sous-espaces stables par  $u$  sont donc  $\{0\}$  et  $\mathbf{Q}^3$ . Le théorème de Burnside tombe en défaut dans ce cas car  $\mathcal{A} \neq L(\mathbf{Q}^3)$ . L'hypothèse sur le corps de base  $\mathbf{C}$  s'avère nécessaire.

On note  $U_n(\mathbf{C})$  le groupe unitaire de taille  $n$ . On munit  $\mathbf{C}^n$  de son produit scalaire canonique.

- (a) Démontrer que si  $X$  et  $Y$  sont deux vecteurs de  $\mathbf{C}^n$  de norme (associée au produit scalaire canonique) valant 1, il existe  $U \in U_n(\mathbf{C})$  telle que  $UX = Y$ .

**Éléments de solution**

Il suffit d'utiliser le théorème de la base incomplète et que les éléments de  $U_n(\mathbf{C})$  sont caractérisés par le fait qu'ils envoient bon sur bon.

- (b) Démontrer que le sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbf{C})$  engendré par  $U_n(\mathbf{C})$  est  $M_n(\mathbf{C})$  tout entier. On pourra utiliser la question 4(a) du préliminaire.

**Éléments de solution**

La sous-algèbre engendrée par  $U_n(\mathbf{C})$  est  $Vect(U_n(\mathbf{C}))$  car  $U_n(\mathbf{C})$  est un groupe. Si un sous-espace de  $\mathbf{C}^n$  est stable par tous les éléments unitaires, il l'est par ceux de l'algèbre engendrée. Si un tel sous-espace est non réduit à  $\{0\}$ , il contient un vecteur de norme 1, donc tous les vecteurs de norme 1, donc c'est  $\mathbf{C}^n$ . On en déduit que  $Vect(U_n(\mathbf{C})) = M_n(\mathbf{C})$  avec le théorème de Burnside.

14. Un sous-groupe nécessairement borné.

Soit  $G$  un sous-groupe de  $Gl_n(\mathbf{C})$ . On suppose que  $G$  est irréductible et que les valeurs propres des éléments de  $G$  sont toutes de module égal à 1. On désire démontrer que le groupe  $G$  est borné.

- (a) Démontrer qu'il existe une base  $(M_1, \dots, M_{n^2})$  de  $M_n(\mathbf{C})$  formée d'éléments de  $G$ . On pourra utiliser la question 4(a) du préliminaire.

**Éléments de solution**

La structure de groupe de  $G$  donne que  $Vect(G)$  est la sous-algèbre engendrée par  $G$  avec la question 4a du préliminaire. Le théorème de Burnside assure alors que c'est  $M_n(\mathbf{C})$  et le résultat en découle.

- (b) Démontrer que pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n^2$  et tout élément  $M$  de  $G$ , on a  $|tr(M_i M)| \leq n$ . En déduire que le groupe  $G$  est borné pour toute norme sur  $M_n(\mathbf{C})$ . On pourra utiliser la question 3(b) du préliminaire.

**Éléments de solution**

Pour  $M$  dans  $G$  et tout  $i$ , la matrice  $MM_i$  est dans  $G$ , donc  $|tr(M_i M)| \leq n$  puisque la trace est la somme des valeurs propres. Avec la question 3b du préliminaire et ses notations, on écrit pour toute matrice  $M$  de  $G$

$$M = \sum_{i=1}^{n^2} tr(M_i M) F_i.$$

Le résultat suit par équivalence des normes en dimension finie.

15. Un résultat de co-trigonalisation.

Soit  $G$  un sous-groupe de  $Gl(\mathbf{C}^n)$  formé d'éléments tous unipotents, c'est à dire tel que pour tout  $g \in G$ , la seule valeur propre de  $g$  soit 1. On désire démontrer que les éléments de  $G$  sont co-trigonalisables, ce qui constitue un théorème dû à Kolchin. On note  $\mathcal{G}$  la sous-algèbre de  $L(\mathbf{C}^n)$  engendrée par  $G$ .

- (a) Démontrer qu'un endomorphisme  $g$  de  $\mathbf{C}^n$  admet 1 comme seule valeur propre si et seulement si  $g - id_{\mathbf{C}^n}$  est nilpotent.

**Éléments de solution**

C'est une conséquence du fait que l'on travaille dans  $\mathbf{C}$  et du théorème de Cayley-Hamilton.

**On suppose que  $\mathcal{G}$  est irréductible.**

Soit  $a$  un élément de  $G$ . On écrit  $a = id_{\mathbf{C}^n} + b$  avec  $b$  nilpotent.

- (b) Démontrer que pour tout élément  $f$  de  $G$ ,  $tr(b \circ f) = 0$ .

**Éléments de solution**

Si  $f$  est un élément de  $G$ , alors  $tr(a \circ f) = tr(f) + tr(b \circ f)$ . Comme  $a \circ f$  et  $f$  sont dans  $G$  et que les éléments de  $G$  sont unipotents, leur trace vaut  $n$ . On déduit que  $tr(b \circ f) = 0$ .

- (c) En déduire que  $b = 0$  puis que l'hypothèse faite sur l'irréductibilité de  $\mathcal{G}$  est absurde.

**Éléments de solution**

On déduit de la question précédente que  $tr(b \circ f) = 0$  pour tout élément  $f$  de  $G$ , donc pour tout élément  $f$  de  $Vect(G) = \mathcal{G}$  par linéarité de la trace et car  $G$  est un groupe. Le théorème de Burnside donne que  $\mathcal{G} = \mathbb{L}(\mathbb{C}^n)$  et on en déduit encore comme ci-dessus que  $b = 0$ . Finalement,  $G$  est réduit à l'identité et par irréductibilité  $n = 1$ , ce qui est exclu. On ne peut donc pas avoir  $\mathcal{G}$  irréductible.

**D'après la question précédente,  $\mathcal{G}$  n'est pas irréductible.**

- (d) Démontrer le théorème de Kolchin énoncé ci-dessus en procédant par récurrence.

**Éléments de solution**

Comme  $\mathcal{G}$  n'est pas irréductible, on peut trouver un sous-espace vectoriel distinct de  $\{0\}$  et  $\mathbb{C}^n$  stable par tous les éléments de  $G$ . Dans une base adaptée les éléments  $g$  de  $G$  ont une matrice triangulaire par blocs, c'est à dire sous la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec  $A$  et  $C$  carrées de tailles  $\leq n - 1$ .

Si  $n = 2$ , cela montre que les éléments de  $G$  sont bien co-trigonalisables. Supposons donc  $n \geq 3$ . On raisonne par récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 2$  est acquis et on suppose le résultat prouvé pour les dimensions  $\leq n - 1$ . L'ensemble des  $A$  et l'ensemble des  $C$  obtenus ci-dessus quand  $g$  décrit  $G$  sont des sous-groupes de groupes linéaires convenables auxquels on peut appliquer l'hypothèse de récurrence (car les valeurs propres de la matrice par blocs ci-dessus sont les valeurs propres de  $A$  et celles de  $C$ ), donc que l'on peut chacun co-trigonaliser. En raisonnant par blocs, on peut donc co-trigonaliser les éléments de  $G$  car si  $P$  et  $Q$  sont des matrices inversibles qui trigonalisent respectivement  $A$  et  $C$ , alors

la matrice inversible  $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$  trigonalise bien  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ .

**Autour des matrices magiques et des matrices de permutation**

16. Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $f_i$  (resp  $g_i$ ) la forme linéaire qui à une matrice de  $M_n(\mathbb{C})$  associe la somme des coefficients de la ligne  $i$  (resp la colonne  $i$ ).

Démontrer que la famille  $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$  est liée mais que  $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_{n-1})$  est libre.

**Éléments de solution**

La première famille est liée car on dispose clairement de l'égalité  $f_1 + \dots + f_n = g_1 + \dots + g_n$ , ce qui revient à sommer tous les coefficients de deux manières.

Pour la seconde famille, prenons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, Mu_1, \dots, Mu_{n-1}$  dans  $\mathbb{C}$  tels que

$$(*) : \sum_1^n \lambda_i f_i + \sum_1^{n-1} Mu_i g_i = 0.$$

On évalue cela en  $E_{k,n}$  pour  $k$  de 1 à  $n$  (base canonique usuelle) et on obtient donc  $\lambda_k = 0$  pour tout  $k$ . L'égalité  $(*)$  devient alors

$$\sum_1^{n-1} Mu_i g_i = 0.$$

On évalue cette fois en  $E_{1,k}$  pour  $k$  entre 1 et  $n - 1$  et cela donne  $Mu_k = 0$  pour tout  $k$ .

17. Déterminer la dimension du sous-espace  $\mathcal{M}_0$  de  $\mathcal{M}$  formé des matrices dont la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne vaut 0.

**Éléments de solution**

Le sous-espace  $\mathcal{M}_0$  est défini par les équations

$$f_1 = \dots = f_{n-1} = f_n = g_1 = \dots = g_{n-1} = 0.$$

La dernière équation  $g_n = 0$  est inutile car conséquence de la relation de liaison ci-dessus. Les formes linéaires en jeu ci-dessus sont indépendantes.

La dimension cherchée est donc  $n^2 - (2n - 1) = (n - 1)^2$ .

18. En déduire la dimension de  $\mathcal{M}$ .

**Éléments de solution**

Un élément de  $\mathcal{M}$  est défini par les équations

$$f_1 - f_n = \dots = f_{n-1} - f_n = g_1 - f_n = \dots = g_{n-1} - f_n = 0.$$

Comme ci-dessus, ces formes linéaires forment une famille libre et la dimension cherchée est donc  $n^2 - (2n - 2) = n^2 - 2n + 2$ . Il est aussi possible de remarquer que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus Vect(J)$  avec  $J$  la matrice dont les coefficients valent tous 1. La dimension suit.

19. Justifier que l'espace vectoriel engendré par les matrices de permutation  $P_\sigma$  est inclus dans  $\mathcal{M}$ .

**Éléments de solution**

Une telle matrice  $P_\sigma$  étant une matrice ayant un seul coefficient non nul par ligne et par colonne, ce coefficient valant 1, le résultat est évident. La structure d'espace vectoriel admise permet de conclure.

20. Démontrer que si  $m$  est un endomorphisme de  $\mathbf{C}^n$  de matrice  $M$  dans la base  $\mathcal{C}$ , alors  $M \in \mathcal{M}$  si et seulement si  $H$  et  $D$  sont stables par  $m$ .

**Éléments de solution**

Si  $M$  est magique,  $D$  est stable par  $m$  car la somme des éléments des lignes de  $M$  est constante. Comme  $\overline{M}^T$  est magique aussi,  $D$  est stable par l'endomorphisme associé et donc son orthogonal  $H$  (pour le produit scalaire canonique de  $\mathbf{C}^n$ ) est stable par  $m$ . (On peut dire que si un sous-espace est stable par un endomorphisme, son orthogonal l'est par l'adjoint).

Réciproquement, si  $D$  et  $H$  sont stables par  $m$ , la somme des éléments des lignes de  $M$  est constante. Comme avant,  $D$  est stable par l'endomorphisme associé à  $\overline{M}^T$ , donc la somme des éléments de ses lignes est constante. La somme des éléments des colonnes de  $M$  l'est donc aussi. C'est la même constante que pour ses lignes : il suffit de sommer tous les coefficients de  $M$  pour s'en apercevoir.

21. Démontrer que les seuls sous-espaces de  $\mathbf{C}^n$  stables par tous les endomorphismes  $p_\sigma$  quand  $\sigma$  décrit toutes les permutations de  $\{1, \dots, n\}$  sont  $\{0\}$ , la droite  $D$ , l'hyperplan  $H$  et  $\mathbf{C}^n$ . On pourra traiter le cas d'une droite puis celui d'un sous-espace non inclus dans  $D$ .

**Éléments de solution**

Si une droite est stable par tous les endomorphismes  $p_\sigma$  et dirigée par  $a_1e_1 + \dots + a_n e_n$ , alors  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  en utilisant les transpositions  $(1, 2), \dots, (1, n)$ . C'est donc  $D$ .

Si un sous-espace est stable par tous les endomorphismes  $p_\sigma$  et n'est pas inclus dans  $D$ , il contient un vecteur  $a_1e_1 + \dots + a_n e_n$  tel qu'il existe  $i < j$  avec  $a_i \neq a_j$ . Par stabilité (transposition  $(i, j)$ ), il contient  $a_1e_1 + \dots + a_j e_i + \dots + a_i e_j + \dots + a_n e_n$  et donc  $e_i - e_j$  par différence. Par stabilité (transpositions), il contient tous les  $e_1 - e_k$  avec  $k$  dans  $\{2, \dots, n\}$ , donc  $H$ . C'est donc soit  $H$  soit  $\mathbf{C}^n$  (dimension).

La réciproque est claire.

22. Pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on note  $p_{\sigma|_H}$  la restriction de  $p_\sigma$  à  $H$ . Démontrer que tout endomorphisme  $f$  de  $H$  peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^N \lambda_i p_{\sigma_i|_H}$$

avec  $N \in \mathbf{N}^*$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  des éléments de  $\mathbf{C}$  et  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  des permutation de  $\{1, \dots, n\}$ . On utilisera le théorème de Burnside.

### Éléments de solution

Soit  $f \in L(H)$ . La sous-algèbre engendrée par les  $p_{\sigma|_H}$  quand  $\sigma$  varie est l'espace vectoriel engendré par ces  $p_{\sigma|_H}$  car les  $p_\sigma$  forment un groupe. Si un sous-espace de  $H$  est stable par tous les éléments de cette sous-algèbre, il l'est par tous les  $p_{\sigma|_H}$  et la question précédente donne que c'est  $\{0\}$  ou  $H$  car  $H$  et  $D$  sont supplémentaires. Elle est donc irréductible et c'est  $L(H)$  avec le théorème de Burnside. On a le résultat.

23. Soit  $M \in \mathcal{M}$  et  $m$  l'endomorphisme de  $\mathbf{C}^n$  canoniquement associé. Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbf{C}^n$  canoniquement associé à la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Démontrer l'existence de  $N$  dans  $\mathbf{N}^*$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  dans  $\mathbf{C}$ ,  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$  des permutation de  $\{1, \dots, n\}$  et  $\alpha$  dans  $\mathbf{C}$  tels que

$$m = \sum_{i=1}^N \lambda_i p_{\sigma_i} + \alpha u.$$

### Éléments de solution

Soit  $m$  comme indiqué.

Il stabilise  $H$  donc on peut écrire avec ce qui précède

$$m \text{Mid}_H = \sum_{i=1}^N \lambda_i p_{\sigma_i} \text{Mid}_H.$$

Notons  $s$  la somme des éléments d'une ligne de  $M$ .

Pour  $x \in D$ ,  $m(x) = sx$  et  $\sum_{i=1}^N \lambda_i p_{\sigma_i}(x) = (\sum_{i=1}^N \lambda_i)x$ . (Il suffit de le vérifier avec le vecteur dont les composantes valent toutes 1 et se rappeler que les matrices de permutations sont celles qui comportent exclusivement un coefficient non nul par ligne et par colonne, ce coefficient valant 1).

On remarque que pour  $x \in H$ ,  $u(x) = 0$  et pour  $x \in D$ ,  $u(x) = nx$ . On obtient donc bien

$$m = \sum_{i=1}^N \lambda_i p_{\sigma_i} + \alpha u$$

en prenant

$$\alpha = \frac{1}{n} \left( s - \sum_{i=1}^N \lambda_i \right),$$

car il y a égalité sur  $D$  et sur  $H$ , qui sont supplémentaires.

24. Etablir un lien entre l'endomorphisme  $u$  et la somme des endomorphismes  $p_\sigma$  quand  $\sigma$  parcourt l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  et en déduire que l'espace vectoriel  $\mathcal{M}$  formé des matrices magiques est exactement l'espace vectoriel engendré par les matrices de permutation  $P_\sigma$ .

### Éléments de solution

Notons  $P = (p_{i,j})$  la somme de toutes les  $P_\sigma$ . Pour  $i$  fixé, il y a exactement  $(n-1)!$  permutations  $\sigma$  fixant l'élément  $i$  et on a donc  $p_{i,i} = (n-1)!$ . Pour  $i$  et  $j$  distincts, l'ensemble des permutations fixant  $i$  est en bijection avec celui des permutations envoyant  $i$  sur  $j$  (il suffit de composer par la transposition  $(i, j)$ ), donc les coefficients de  $P$  valent tous  $(n-1)!$  et la somme de tous les  $p_\sigma$  vaut  $(n-1)!u$ . La question précédente donne alors que  $u$ , donc  $m$ , est combinaison linéaire des  $p_\sigma$ . L'espace  $\mathcal{M}$  est donc bien l'espace engendré par les matrices de permutation.

### Passage au quotient et co-trigonalisation

25. Soit  $\mathcal{F}$  une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ , vérifiant une propriété  $\mathcal{P}$  transmise par passage au quotient. Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par tous les éléments de  $\mathcal{F}$ . Démontrer que la famille formée des restrictions des éléments de  $\mathcal{F}$  à  $F$  vérifie encore la propriété  $\mathcal{P}$ .

### Éléments de solution

Le sous-espace  $F$  est stable par tous les éléments de  $\mathcal{F}$ , tout comme le sous espace  $G = \{0\}$ . La propriété  $\mathcal{P}$  étant transmise par passage au quotient, la famille obtenue par passage au quotient avec  $F/G = F$  est exactement celle des restrictions.

26. Démontrer que si  $f$ , endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ , laisse stable un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$ , alors l'endomorphisme  $\bar{f}$  de  $E/F$  défini par  $\bar{f}(\bar{x}) = \overline{f(x)}$  vérifie  $rg\bar{f} \leq rgf$ .

### Éléments de solution

Notons  $r$  le rang de  $\bar{f}$  et  $(\bar{f}(\bar{e}_1), \dots, \bar{f}(\bar{e}_r))$  une base de son image. Supposons  $\alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_r f(e_r) = 0$  avec les  $\alpha_i$  des scalaires. On a alors  $\alpha_1 \bar{f}(\bar{e}_1) + \dots + \alpha_r \bar{f}(\bar{e}_r) = \bar{0}$ . Ainsi  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$  et la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_r))$  est libre. Aussi,  $rg\bar{f} \leq rgf$ .

27. Démontrer que si  $F$  est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel  $E$  et  $L'$  est un sous-espace vectoriel de  $E/F$  non nul et distinct de  $E/F$ , alors  $L = \{x \in E, \bar{x} \in L'\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  distinct de  $F$  et de  $E$ .

### Éléments de solution

La surjection canonique  $s$  de  $E$  sur  $E/F$  a comme noyau  $F$  et  $L$  est l'image réciproque de  $L'$ . Alors, d'après les hypothèses,  $L$  contient strictement  $F$  et n'est pas égal à  $E$ .

28. **Le lemme fondamental de co-trigonalisation.**

On se donne une propriété  $\mathcal{P}$  transmise par passage au quotient et on suppose qu'elle vérifie la condition suivante : toute famille d'endomorphismes définis sur un même espace vectoriel de dimension au moins 2 et vérifiant la propriété  $\mathcal{P}$  est réductible.

Démontrer qu'une famille  $\mathcal{F}$  d'endomorphismes qui vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  est co-trigonalisable.

**Ce résultat constitue le lemme fondamental de co-trigonalisation.**

On pourra noter  $E$  l'espace vectoriel sur lequel sont définis les endomorphismes de la famille  $\mathcal{F}$  et envisager une suite strictement croissante  $\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_m = E$  de sous-espaces de  $E$  tous stables par les éléments de  $\mathcal{F}$  et de cardinal maximal.

### Éléments de solution

On considère une suite  $\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_m = E$  de sous-espaces tous stables par les éléments de  $\mathcal{F}$  de taille maximale, avec pour tout  $k$ ,  $L_k \neq L_{k+1}$ . Une telle suite existe bien en raison de la dimension finie de  $E$ . Pour démontrer la co-trigonalisabilité des éléments de  $\mathcal{F}$ , il suffit de démontrer que pour tout  $k$ , la dimension de  $L_{k+1}/L_k$  vaut 1. Si pour un  $k$  donné, elle valait au moins 2, alors la réductibilité donnerait un sous-espace  $L'$  de  $L_{k+1}/L_k$  stable par tous les éléments de la famille quotient obtenue et donc  $L = \{x \in L_{k+1}, \bar{x} \in L'\}$  serait un sous-espace stable par tous les éléments de  $\mathcal{F}$  et strictement compris entre  $L_k$  et  $L_{k+1}$ . Cela contredirait le caractère maximal de la suite.

29. Le cas commutatif.

Soit  $\mathcal{C}$  une famille d'endomorphismes qui commutent 2 à 2.

- (a) Démontrer que toute famille d'endomorphismes d'un espace de dimension au moins 2 et qui commutent 2 à 2 est réductible. On pourra considérer un sous-espace propre d'un de ces endomorphismes.

**Éléments de solution**

Si tous les éléments de la famille sont des homothéties, toute droite de  $E$  fournit un sous-espace stable par les éléments de cette famille et prouve donc la réductibilité.

Supposons donc l'existence d'un élément  $f$  de la famille qui soit distinct d'une homothétie. Notons  $\lambda$  une valeur propre de  $f$  (c'est possible, le corps de base est  $\mathbf{C}$ ). Le sous-espace propre correspondant est stable par tout élément de la famille (elle est commutative) et distinct de  $\{0\}$  et de  $E$ . Cela conclut.

- (b) En déduire que les éléments de  $\mathcal{C}$  sont co-trigonalisables.

**Éléments de solution**

La commutativité est une propriété stable par passage au quotient (c'est indiqué par l'énoncé). La question précédente et le lemme de co-trigonalisation permettent de conclure.

30. Le cas nilpotent.

On suppose que  $\mathcal{A}$  est une algèbre d'endomorphismes formée d'éléments tous nilpotents.

- (a) Démontrer que dans un espace vectoriel de dimension au moins 2, une telle algèbre est réductible. On peut utiliser le théorème de Burnside et la propriété  $\mathcal{P}$  définie par : être une algèbre d'endomorphismes formée d'éléments tous nilpotents.

**Éléments de solution**

La propriété  $\mathcal{P}$  proposée est stable par passage au quotient (c'est indiqué dans l'énoncé). Dans tout espace vectoriel de dimension au moins 2, il existe des endomorphismes non nilpotents. Ainsi, une telle algèbre est réductible d'après le théorème de Burnside.

- (b) En déduire que les éléments de  $\mathcal{A}$  sont co-trigonalisables.

**Éléments de solution**

La question précédente combinée au lemme de co-trigonalisation donne le résultat demandé.

31. Le cas des commutateurs nilpotents.

On suppose que  $\mathcal{A}$  est une algèbre d'endomorphismes telle que pour tous  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{A}$ ,  $f \circ g - g \circ f$  (appelé commutateur de  $f$  et  $g$ ) soit nilpotent.

- (a) Démontrer que si  $n \geq 2$ , il existe deux matrices  $B$  et  $C$  de  $M_n(\mathbf{C})$  telles que la matrice  $BC - CB$  ne soit pas nilpotente. On pourra commencer par le cas  $n = 2$ .

**Éléments de solution**

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  donnent  $BC - CB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , dont le carré vaut  $-I_2$ .

Cela fournit un exemple en dimension 2. En dimension quelconque, il suffit de placer ces deux matrices en haut à gauche et de les gonfler pour en faire des matrices de taille  $n$  en complétant avec des 0 partout ailleurs.

- (b) Vérifier que la propriété  $\mathcal{P}$  définie par : être une algèbre constituée d'endomorphismes telle que pour tous  $f$  et  $g$  dans cette algèbre,  $f \circ g - g \circ f$  est nilpotent est une propriété transmise par passage aux quotients.

**Éléments de solution**

Vérification immédiate avec les exemples de l'énoncé lors de la définition de la stabilité par passage aux quotients.

- (c) Démontrer que les éléments de  $\mathcal{A}$  sont co-trigonalisables.

**Éléments de solution**

L'algèbre  $\mathcal{A}$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  ci-dessus. Cette propriété est transmise par passage aux quotients. La question 32a assure que pour un espace de dimension au moins 2,  $\mathcal{A}$  n'est pas tout  $L(E)$  et le théorème de Burnside garantit donc que  $\mathcal{A}$  est réductible. Le lemme de co-trigonalisation conclut.

- 32.** Le cas d'une algèbre.

Démontrer que si  $\mathcal{A}$  est une algèbre d'endomorphismes, ses éléments sont co-trigonalisables si et seulement si, pour tous  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{A}$ ,  $f$  et  $g$  sont co-trigonalisables.

**Éléments de solution**

Supposons que pour tous  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{A}$ ,  $f$  et  $g$  soient co-trigonalisables. En raisonnant dans une base commune de trigonalisation, on constate donc que  $f \circ g - g \circ f$  est représenté par une matrice triangulaire strictement supérieure. On en déduit que  $f \circ g - g \circ f$  est nilpotent. La question précédente assure que les éléments de  $\mathcal{A}$  sont donc co-trigonalisables. La réciproque est évidente.

- 33.** Un théorème de Mc Coy.

On se donne deux matrices  $A$  et  $B$  de  $M_n(\mathbf{C})$ . On désire démontrer le théorème suivant, dû à Mc Coy.

**Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :**

(1) : Les deux matrices  $A$  et  $B$  sont co-trigonalisables dans  $M_n(\mathbf{C})$ .

(2) : Pour tout polynôme  $p(X, Y)$  à coefficients dans  $\mathbf{C}$  en deux variables  $X$  et  $Y$  non commutatives, la matrice  $p(A, B)(AB - BA)$  est nilpotente.

- (a) Démontrer l'implication (1) $\Rightarrow$ (2).

**Éléments de solution**

Il suffit de co-trigonaliser  $A$  et  $B$  et de constater que  $p(A, B)(AB - BA)$  est toujours triangulaire supérieure stricte.

On suppose désormais la propriété (2) vérifiée et on désire démontrer la propriété (1).

- (b) Que dire dans le cas où  $AB = BA$ ?

**Éléments de solution**

On a déjà vu plus haut que dans ce cas, (1) est vérifié.

**On suppose donc désormais  $AB \neq BA$ .**

- (c) Démontrer l'existence d'un vecteur colonne non nul  $X$  et d'une matrice  $C$  de  $M_n(\mathbf{C})$  tels que

$$C(AB - BA)X = X.$$

**Éléments de solution**

On peut trouver un vecteur colonne  $X$  non nul tel que  $Y = (AB - BA)X \neq 0$ . On peut trouver une matrice  $C$  telle que  $CY = X$ .

- (d) En déduire que l'algèbre  $\mathcal{A}$  engendrée par  $A$  et  $B$  est réductible.

**Éléments de solution**

Confondons matrices et endomorphismes canoniquement associés. Si cette algèbre était irréductible, le théorème de Burnside donnerait que  $\mathcal{A} = M_n(\mathbf{C})$ . En particulier  $C$  ci-dessus serait dans  $\mathcal{A}$ , donc s'écrirait  $p(A, B)$  et  $C(AB - BA)$  serait nilpotente. C'est exclu car 1 est valeur propre de cette matrice. L'algèbre  $\mathcal{A}$  est donc réductible.

(e) Conclure.

**Éléments de solution**

La propriété (2) est clairement transmise par passage aux quotients. Il suffit donc de démontrer pour avoir la co-trigonalisabilité de  $A$  et  $B$  que l'algèbre  $\mathcal{A}$  engendrée par  $A$  et  $B$  est, en dimension  $\geq 2$ , réductible. C'est assuré par les questions précédentes.

**34.** On désire dans cette question améliorer le théorème de Mc Coy en se limitant aux monômes, c'est à dire en remplaçant la condition (2) par la condition plus faible (3) suivante :

**(3) : Pour tout  $m \geq 0$  et tout  $(M_1, \dots, M_m) \in \{A, B\}^m$ , la matrice  $M_1 M_2 \dots M_m (AB - BA)$  est nilpotente.**

On suppose donc la propriété (3) vérifiée et on désire démontrer la propriété (1). On peut supposer que  $AB \neq BA$ , le cas  $AB = BA$  ayant déjà été traité.

(a) Que dire de la trace des éléments du type  $M_1 M_2 \dots M_m (AB - BA)$  avec  $m \geq 0$  et  $(M_1, \dots, M_m) \in \{A, B\}^m$ ?

**Éléments de solution**

La trace est nulle car les éléments sont nilpotents (question 1 du préliminaire).

(b) Démontrer que l'algèbre  $\mathcal{A}$  engendrée par  $A$  et  $B$  est réductible.

**Éléments de solution**

Les éléments de  $\mathcal{A}$  sont les combinaisons linéaires des éléments ci-dessus et la trace étant linéaire, les éléments de  $\mathcal{A}$  sont de trace nulle. Comme il existe des éléments de  $M_n(\mathbf{C})$  de trace non nulle, le théorème de Burnside conclut.

(c) Conclure.

**Éléments de solution**

La propriété (3) est transmise par passage au quotient, en confondant matrices et endomorphismes canoniquement associés. Comme avant, la réductibilité prouvée à la question précédente montre que les éléments de  $\mathcal{A}$  sont co-trigonalisables. Ainsi,  $A$  et  $B$  le sont.

**35.** Application 1.

Démontrer en utilisant le théorème de Mc Coy qu'une matrice  $A \in M_n(\mathbf{C})$  est normale, c'est à dire commute avec son adjointe  $A^* = \overline{A}^T$ , si et seulement si elle est diagonalisable via le groupe unitaire  $U_n(\mathbf{C})$ , c'est à dire si et seulement si il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice unitaire  $P$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . On pourra utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

**Éléments de solution**

Si  $A$  est diagonalisable via le groupe unitaire, il existe  $D$  diagonale et  $P$  unitaire telle que  $A = PDP^{-1}$ . Dire que  $P$  est unitaire, c'est dire que  $P^{-1} = \overline{P}^T$ . On a donc aussi  $A^* = P\overline{D}P^{-1}$ . Ainsi,  $A^*A = AA^*$ .

Supposons que  $A^*A = AA^*$ . Le théorème de Mc Coy (elles commutent!) assure que  $A$  et  $A^*$  sont co-trigonalisables dans  $M_n(\mathbf{C})$  car  $A^*A - AA^* = 0$  et donc (2) est clairement vérifié. Le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la base de co-trigonalisation donne une matrice unitaire qui convient.

**36.** Application 2.

Dans cette question, on se donne deux éléments  $A$  et  $B$  de  $M_n(\mathbf{C})$ . Dans les différents cas suivants, démontrer que  $A$  et  $B$  sont co-trigonalisables dans  $M_n(\mathbf{C})$ .

(a)  $AB = 0$ .

(b)  $A$  et  $B$  commutent avec  $AB - BA$ .

(c)  $AB - BA = B$ .

(d) Il existe  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbf{C}$  tels que  $AB - BA = \alpha A + \beta B$ .

Pour le (c), on exprimera  $AB^k - B^k A$  à l'aide de  $B^k$  pour tout  $k$  dans  $\mathbf{N}$  et on montrera que  $B^k$  est nilpotente. Pour le (d), on se ramènera au cas (c).

### Éléments de solution

Pour le (a) : on applique le raffinement du théorème de Mc Coy. Un mot en  $A, B$  s'écrit alors  $A^p B^q$  avec  $p$  et  $q$  entiers. Si  $q$  est non nul,  $A^p B^q (AB - BA) = 0$  et si  $q = 0$ , alors  $A^p B^q (AB - BA) = A^{p+1} B$ . Cette dernière matrice est de carré nul donc nilpotente. On a donc le résultat.

Pour le (b) : on vérifie qu'en posant  $C = AB - BA$ , alors pour tout  $k \geq 1$ ,  $C^k = AC^{k-1}B - BAC^{k-1}$ . On en déduit que la trace de  $C^k$  est nulle pour tout  $k \geq 1$ , donc que  $C$  est nilpotente. Ainsi, pour tout polynôme  $p(X, Y)$  en deux indéterminées non commutatives,  $(p(A, B)C)^n = p(A, B)^n C^n = 0$  car  $p(A, B)$  et  $C$  commutent. Le théorème de Mc Coy conclut.

Pour le (c) : facilement,  $AB^k - B^k A = kB^k$  pour tout  $k$ . On en déduit la nilpotence de  $B$  avec le fait que  $MMqapstoAM - MA$  admet un nombre fini de valeurs propres et donc que  $B^k = 0$  pour  $k$  assez grand. Si  $M$  est un mot en  $A, B$ , il s'agit de prouver que  $MB$  est nilpotente. L'égalité  $BA = (A - I_n)B$  prouve que  $MB = p(A)B^{k+1}$  avec  $p \in \mathbf{C}[X]$  et  $k$  le nombre d'occurrences de  $B$  dans  $M$ . Ainsi,  $MB$  est clairement nilpotente.

Pour le (d) : on suppose que  $AB - BA = \alpha A + \beta B$ . Il suffit de traiter le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas tous les deux nuls. Par exemple,  $\beta \neq 0$ . On écrit alors  $A'B' - B'A' = B'$  avec  $A' = \frac{1}{\beta}A$  et  $B' = B + \frac{\alpha}{\beta}A$ . L'algèbre engendrée par  $A'$  et  $B'$  est la même que celle engendrée par  $A$  et  $B$ , donc le cas précédent conclut :  $A'$  et  $B'$  sont co-trigonalisables, donc  $A$  et  $B$  aussi.

Bien sûr, des preuves directes sont possibles.

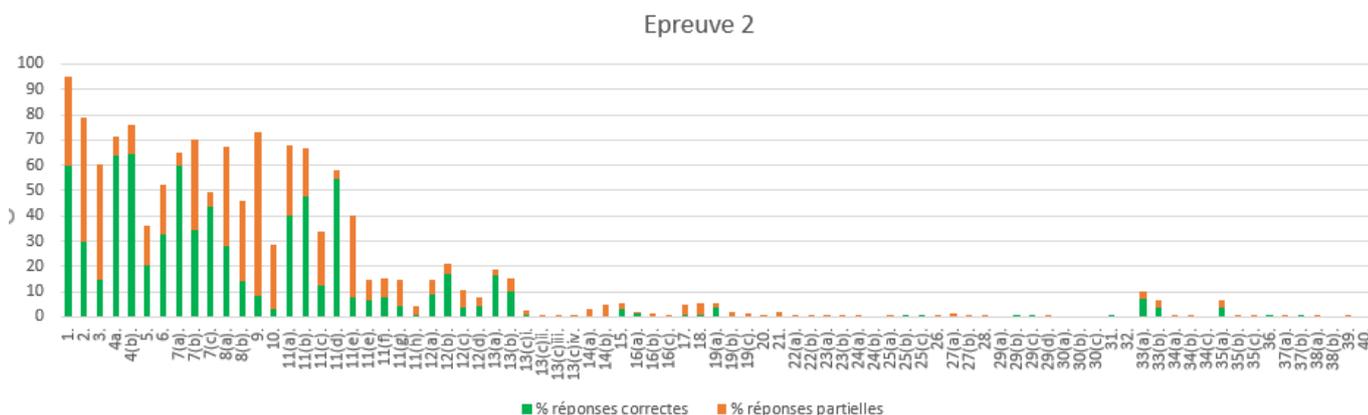
## 3.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :

<https://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep2/21-ep2.pdf>

### 3.2.1 Statistiques de réussite

Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions des candidats déclarés admissibles.



des systèmes à dichotomie exponentielle, on peut montrer l'existence et l'unicité d'une solution p.p. lorsqu'un second membre l'est.

Après l'établissement de quelques résultats pour la suite dans la partie **I** et une étude du cas périodique dans le **II**, le cœur du sujet se situe dans les parties **III** et **IV**, en allant jusqu'au **V.A.** (avec la question **34(c)**). La suite du problème consiste à développer le thème des équations différentielles.

Comme à l'accoutumée, le sujet est d'une longueur certaine, permettant à chaque candidat d'exprimer sa palette de compétences, et il n'est pas nécessaire de traiter une énorme partie du problème pour avoir une très bonne note.

## 2. Remarques d'ordre général

Le premier conseil que nous pourrions donner aux candidats est la lecture des rapports des années précédentes, dont les contenus demeurent d'actualité.

Il semble utile de préciser qu'un soin minimal est attendu lors de la présentation des copies, et qu'il est conseillé de bannir les encres claires qui peuvent être difficiles à lire. Ces points devraient être une évidence pour des candidats dont beaucoup sont déjà des enseignants en exercice, amenés à corriger des copies.

La présence de quantificateurs est souvent utile, voire nécessaire pour qu'une phrase soit comprise. Par exemple, étant donné un réel strictement positif  $T$ , écrire  $f(x + T) = f(x)$  sans quantificateur sur  $x$  ne traduit pas que  $f$  est  $T$ -périodique. Ceci serait vrai avec  $x = 0$  et  $T = 2$  avec la fonction non périodique  $f : u \mapsto \sin(u - 2)$ . Si l'on souhaite raisonner par exemple avec un  $x$  arbitraire dans toute une question, on peut la commencer par "soit  $x$  fixé dans ..."

Le jury est surpris de voir des difficultés sur des notions qui ont longtemps figuré dans les programmes du secondaire ou qui y figurent encore. Il est fortement conseillé aux candidats de réviser ces parties du programme, même si elles leur semblent élémentaires. Ainsi, les bases de la trigonométrie et des nombres complexes semblent parfois mal maîtrisés. Par exemple :

- plusieurs candidats semblent ignorer que si  $\beta$  est un nombre réel, le complexe  $e^{i\beta}$  est de module 1. Certains ont même pensé que son module pouvait être égal à  $|\sin(\beta t)|$  ;
- rappelons que par défaut il n'y a pas de relation d'ordre sur  $\mathbf{C}$ . Ainsi, on évitera d'écrire  $1 - i \leq e^{ix} \leq 1 + i$  ou des choses similaires ;
- certaines copies laissent un  $\sin(j\pi)$  (avec  $j$  entier) dans des expressions, voire leur trouvent une valeur fautive.

Le jury attire l'attention des candidats sur l'utilisation de la variable muette. Par exemple il est déconseillé d'écrire  $\int_0^t f(t)dt$ , ce qui a parfois mené à des confusions. Le jury a pu lire des copies

dans lesquelles des candidats trouvaient deux valeurs différentes de la somme  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n \frac{\sin(j\pi)}{j\pi}$ , selon que  $j$  soit nul ou non.

Parmi les erreurs relevées, certaines démontrent de graves lacunes sur les suites. Même si les deux citées ci-dessous concernent des suites de fonctions, ce qui est conceptuellement plus complexe que les suites de nombres réels, la connaissance des suites de nombres réels devrait permettre de les éviter :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 1/n$  ;
- $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  a parfois été traduit en  $f_1$  converge uniformément vers  $f$ , et que  $f_2$  converge uniformément vers  $f$ , etc...

Il convient de s'assurer de l'existence d'une limite avant de manipuler son symbole.

### 3. Remarques question par question

**1.** Question élémentaire pour s'appropriier les notions, mais qui a déjà permis de départager les candidats. Rappelons au passage que l'égalité impliquant l'inégalité large, il suffit d'écrire que  $|e^{ix}| = 1$  pour tout  $x$  réel pour en conclure que  $e_1$  est bornée. Il n'est pas nécessaire d'écrire une majoration. Au demeurant, contrairement à l'égalité, une majoration de  $|e_1(x)|$  ne permet pas de conclure quant au caractère non borné de  $e_{1+i}$ , puisque le produit d'une fonction non bornée par une fonction bornée peut être borné. Ces remarques sont aussi valables plus loin dans le sujet.

**2.** Il est demandé de démontrer d'une part que la suite est une suite d'éléments de  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ , puis qu'elle converge uniformément et de donner sa limite. L'aspect continu se traite aisément. On peut aborder le reste par la majoration de  $\|f_n\|_\infty$  par  $1/n$ , le passage par la limite simple n'est pas nécessaire. Les majorations ont souvent été obtenues avec  $|x|$  au dénominateur, sans penser à traiter à part le cas  $x = 0$ . Parfois la continuité est signalée comme se déduisant d'une composition. Si techniquement ce n'est pas inexact, c'est moins trivial que par quotient et donc la composition devrait être écrite. Rappelons que *composée de fonctions* a un sens précis en mathématiques et ne signifie pas *fabriqué à partir de fonctions*. Enfin, rappelons que les phrases  $(f_n)_n$  bornée et  $\forall x \in \mathbf{R}, (f_n(x))_n$  bornée ne sont pas équivalentes, leurs sens respectifs étant  $\sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty$  et  $\sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)| < +\infty$ .

**3.** Question plus difficile que les deux précédentes, mais classique. Notons que l'on a parfois vu des max à la place des sup, ce qui "simplifie" leur côté réel. Le sup existe toujours dans  $\overline{\mathbf{R}}$ , et non le max. Cette question a cependant été rarement réussie, du fait d'une rédaction souvent trop imprécise, ou plus souvent encore de l'espoir de majorer  $\|f_n\|_\infty$  indépendamment de  $n$  en expliquant simplement que  $(f_n)_n$  est bornée (confusion déjà signalée dans la question précédente, encore plus présente ici).

**4.** Le **(a)** sert uniquement à préparer à la question suivante, et a été en général bien traité, quoique quelques candidats n'y voient que la continuité. Le **(b)** ne pose pas de difficulté grâce à la question (indication?) précédente.

**5.** La question a souvent été bien traitée par les candidats lorsqu'ils ont choisit se ramener à un système de Van der Monde. Le résultat est classique et ne demande pas à être re-démontré, sauf si on ne reconnaît pas le système. Ceux qui ont choisi une démonstration par récurrence ont souvent du mal à écrire proprement l'hypothèse de récurrence : elle porte sur le nombre de complexes  $\lambda_j$  deux à deux distincts et arbitraires, ces  $\lambda_j$  sont donc amenés à être présents dans l'écriture de l'hypothèse. Lors de la dérivation des exponentielles, le  $i$  est souvent oublié. Une très belle démonstration consiste à faire apparaître ces fonctions comme vecteurs propres pour l'endomorphisme de dérivation (ce qui rend la famille libre car associée à des valeurs propres distinctes). La principale difficulté consiste alors à se placer dans un espace où  $f \text{ mapsto } f'$  est réellement un endomorphisme.

**6.** Attention à ne pas lire trop rapidement la question, ce qui amènerait à procéder à un changement de variable qui n'aboutirait pas directement, la fonction  $h$  étant supposée  $T$ -périodique

et non  $t$ -périodique. On peut utiliser la relation de Chasles, un changement de variables, la périodicité, ou bien par exemple la dérivation. Certains ne modifient pas les bornes d'intégration lors d'un changement de variables, ou ne modifient pas l'intégrande. Rappelons que si l'on choisit la technique de dérivation, la condition  $H' = 0$  implique  $H$  constante que si on est sur un connexe (ici intervalle).

**7.** Cette question avait pour but d'aider les candidats à avoir une intuition de la condition attendue en **24(b)**, mais elle a été beaucoup moins réussie qu'attendu. Dans le **(a)**, peu de candidats pensent à se demander si les deux fonctions ont une période commune. Le **(b)** a été mieux réussi, mais on attend une explication claire de la conclusion. Quelques candidats trouvent que l'équation n'a aucune solution et en déduisent que la fonction n'est pas périodique ! Dans cette question, on a parfois vu que les conditions  $\cos(x) = 1$  et  $\cos(\alpha x) = 1$  impliquent que  $x = 2k\pi$  et  $\alpha x = 2k\pi$  avec le même entier relatif  $k$ . Le **(b)** permet de répondre immédiatement au **(c)** ; rappelons à cet effet que pour démontrer que l'ensemble n'est pas un s.e.v., il *suffit* de nier *une* propriété.

**8.** Dans le **(a)**, il ne faut pas oublier l'aspect sous-ensemble, qui est le moins trivial. Cela se fait par périodicité couplée à la continuité sur un compact  $[0; T]$ . Notons que la fonction  $\cos$  n'est pas nécessairement  $T$ -périodique (pour un  $T > 0$  fixé arbitraire), et que l'identité ne l'est jamais. Le début du **(b)** est basé sur le fait que la convergence uniforme (qui est celle en jeu ici) implique la convergence simple. Souvent les candidats ne font pas le début, mais connaissent l'énoncé qui permet de conclure. On a parfois vu une confusion entre les termes "complet" et "compact", et le jury a été surpris de lire que  $C_T^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  était un borné de  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ . Un s.e.v. d'un e.v. n'est borné que dans une situation triviale, lorsque la topologie de l'e.v. ambiant est issue d'une norme. La confusion vient peut-être du fait que l'on travaillait avec un espace de fonctions bornées. Mais comme déjà signalé (avec des suites) dans la question **2**, le fait qu'un élément  $f$  de  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  soit borné signifie que  $\sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$  est fini, tandis que  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  soit borné signifie que  $\sup_{f \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})} \|f\|_\infty$  est fini. Enfin, pour montrer qu'une partie est un s.e.v., dans l'aspect non vide, *qu'il convient de ne pas oublier*, il est souvent facile de démontrer que l'élément neutre de l'addition (donc ici la fonction nulle) est dans la partie. La confusion semblait venir du fait que  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  est un espace de *fonctions bornées*, ce qui ne rend pas l'espace lui-même borné.

**9.** Cette question se traite bien grâce à la question **6** et l'aspect borné des fonctions continues périodiques, mis à part l'implication **(A2)** $\Rightarrow$ **(A3)** plus difficile et rarement vue. Cependant, elle n'a pas eu le succès escompté, parfois en raison de rédaction déficiente. Les hypothèses n'apparaissent pas clairement lorsqu'elles sont utilisées, quelques-uns utilisent l'assertion  $Q$  comme prémisses pour démontrer directement que  $P \Rightarrow Q$ . Enfin, rappelons que si  $F$  est une primitive de  $f$ , elle ne s'exprime pas nécessairement sous la forme

*mapsto*  $\int_a^x f(t)dt$  : la deuxième expression s'annule, ce qui n'est pas nécessairement le cas d'une primitive. Certains tentent directement des équivalences, sans se rendre compte qu'à un moment (et parfois seulement à la conclusion) ils n'obtiennent qu'une implication.

**10.** Les candidats ayant abordé cette question ont souvent pensé à se ramener à un compact et à utiliser le théorème de Heine. Si l'on choisit un compact du type  $[0, T]$ , la conclusion sur  $\mathbf{R}$  nécessite une argumentation en 0 et en  $T$ , puisque deux nombres réels  $x, y$  satisfaisant  $|x - y| \leq \eta$  n'ont aucune raison d'appartenir au même  $[kT, (k + 1)T]$ .

**11.** Cette question est un grand classique, on introduit le noyau de Féjer, qui est une moyenne de Césaro du noyau de Dirichlet (celui qui est fourni par les sommes partielles de Fourier). Le fait que ce noyau soit positif fait bien fonctionner la convolution et on obtient la convergence uniforme des  $(f_n)_n$  (qui sont donc des moyennes de Césaro des sommes partielles de Fourier) vers la fonction  $f$ . Le **(a)** se traite par un changement de variable puis par périodicité, à condition de bien préciser la fonction périodique en jeu (qui n'est pas le produit de  $K_n$  par  $f$ , mais par  $f(x - \cdot)$ ). Le début du **(b)** a souvent donné des  $j$  au dénominateur, sans que le candidat ne pense à traiter le cas  $j = 0$ . Le jury a pu lire des expressions  $\sin(j\pi)$  non simplifiées voire fausses. Certains candidats, qui ont trouvé 0 pour toute valeur de  $j$  dans la première partie de la question, réussissent à transformer une somme de zéros en 1 sans isoler le  $e_0$ , ce qui n'est guère apprécié des correcteurs. Le **(c)** amène à des calculs non compliqués, mais qui doivent être menés avec soin. Cette question a été rarement menée à son terme. Certains tentent une récurrence, parfois menée avec succès. Le **(e)** demande beaucoup de soin. Il s'agit de bien découper l'intégrale (le découpage est suggéré par le début de la question), de constater que  $K_n(t)$  est positif et donc sort des valeurs absolues, le reste apparaît alors souvent. La question suivante consiste en une interversion de somme ; on a parfois vu l'idée intéressante d'interpréter le terme de droite comme la série de Fourier de  $K_n$ , et donc de calculer les  $\beta_{n,j}$  comme les coefficients de Fourier. Ce qui est fait dans ces questions permet d'arriver à la question **(g)**, puis le **(h)** se déduit facilement du **(g)** si l'on sait transformer une fonction  $T$ -périodique en une fonction  $2\pi$ -périodique. La convergence uniforme demandée dans la question **(g)** a rarement été réussie ; le plus simple est d'abord de constater que la majoration dans **(e)** est uniforme en  $x$ , puis,  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire, de choisir un  $N$  à partir duquel  $\|f_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$ . On a parfois vu des passages à la limite ; tant qu'on ne sait pas que la limite existe, la seule chose qui puisse être déduite est que  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ . Un travail d'argumentation supplémentaire est nécessaire pour dire que cette limsup est nulle, et qu'il s'agit d'une vraie limite.

**12.** Le **(a)** est souvent correctement traité par ceux qui l'ont abordé, quoique la démonstration est la plupart du temps trop compliquée. Souvent, les candidats laissent le lecteur choisir les fonctions dans le **(b)** ; sur une question aussi facile, une rédaction incomplète sera nécessairement sanctionnée. Quoique guidé par ce qui précède, le **(c)** n'a pas souvent été correctement traité, parfois certains faisant comme hypothèse de récurrence que chaque fonction de la somme admet une limite. Pour le **(d)**, on attend autre chose qu'un seul mot, même si un argument court convaincant permet de répondre très rapidement.

**13.** Sauf exception, cette question n'a pas été abordée au delà du **(b)**. On notera que dans **(A5)**, l'alternative "soit" est après le "pour tout  $j$ ", ce qui signifie que l'alternative ne porte pas sur le fait que tous les  $P_j$  sont nuls ou tous les  $\mu_j$  sont imaginaires purs affectés d'un polynôme  $P_j$  constant, mais bien que pour chaque  $j$  l'une des deux est vraie. Ces questions sont bien traitées par ceux qui ont compris l'alternative.

Les parties suivantes, on été très peu abordées, sauf ponctuellement quelques questions de début de partie.

**III.** Cette partie a été parfois abordée par quelques candidats. La question **16** est découpée, avec une partie **(c)** plus ardue.

**IV.** Souvent seulement le tout début a été abordé. Le **17** est assez intuitif mais il s'agit de correctement justifier le passage à la limite. Certains justifient l'existence de  $a_\lambda$  en expliquant que  $e_{-\lambda}f$  est p.p. par composition de  $e_{-\lambda}$  et de  $f$  grâce à la question **16**, malheureusement il s'agit là d'un mauvais emploi du terme composition. Ceux qui ont abordé la question **22** n'ont pas vu que le résultat découlait des questions **17**, de la linéarité et d'un calcul similaire à celui fait au début du **11(b)**. Le reste n'a pas été réellement abordé.

**V.** Cette partie permet d'exprimer ses compétences sur les équations différentielles. Les candidats l'ayant abordée ont surtout testé les questions **33** et début du **35**. Dans la question **33** (ou même **35(a)**), il était autorisé de rappeler sans démonstration l'expression des solutions puisqu'elles font partie d'un cours basique d'équations différentielles linéaires. N'importe, si le candidat choisit de faire une démonstration, le jury attend qu'elle soit menée en toute rigueur. Ainsi, si on choisit de résoudre  $x' = ax$  par séparation (ce qui va exiger une division par  $x(t)$ ), le candidat doit expliquer que les solutions ne s'annulent jamais (mis à part la solution nulle). Rappelons au passage que pour une fonction, être non nul est différent de ne jamais s'annuler (cf. sin). Parfois la (les) constante(s) intervi(enn)ent de manière incorrecte, voire est (sont) absente(s). Dans le **33(b)**, la discussion selon le signe de la partie réelle de  $a$  n'a pas toujours été abordée. La question **35** a été largement préparée dans le **(a)**, et aussi dans le **(b)** pour ceux qui l'ont abordé, même s'il s'agit de correctement justifier la majoration de l'intégrale (ce qui exige que les bornes soient dans le bon sens), et si bien entendu il ne s'agit pas de diviser abusivement par  $x(s)$ , ni de multiplier des inégalités sans s'assurer du signe des termes par lesquels on multiplie (il fallait donc travailler sur la valeur absolue des termes, et non sur les termes).

### 3.2.3 Quelques éléments de correction

#### – I. Préliminaires. –

1. Les fonctions  $e_\lambda$  sont toutes continues de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  par composition de  $x \mapsto e^{i\lambda x}$  avec l'exponentielle. Pour tout  $x$  réel,  $|e_1(x)| = |e^{ix}| = 1$ , de sorte que la fonction  $e_1$  est bornée. Ainsi,  $e_1 \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ . Par ailleurs,  $|e_{1+i}(x)| = |e^{i(1+i)x}| = e^{-x}$ , donc en faisant tendre  $x$  vers  $-\infty$ , nous constatons que  $e_{1+i}$  n'est pas bornée ; ce n'est donc pas un élément de  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ .
2. Lorsque  $x$  est réel, le complexe  $nx + i$  est de partie imaginaire égale à 1, donc il est non nul, ce qui justifie que  $f_n$  est bien définie et continue de  $\mathbf{R}$  vers  $\mathbf{C}$  (en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbf{R}$ ). Nous avons, pour  $x$  non nul et  $n \geq 1$  :

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{(nx)^2 + 1}} \leq \frac{|x|}{|nx|} = \frac{1}{n},$$

la majoration étant encore valable si  $x = 0$ , ce qui justifie d'une part que chaque fonction  $f_n$  est un élément de  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ , et d'autre part que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ . Cette inégalité démontre que la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers 0.

3. D'après le rappel, les fonctions  $f$  et  $g$  sont nécessairement continues bornées. Nous avons, pour tout  $x \in \mathbf{R}$  et tout  $n \geq 1$  :

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = |f_n(x)(g_n(x) - g(x)) - (f(x) - f_n(x))g(x)| \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty.$$

De plus, puisque la suite  $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \geq 1}$  converge vers 0 et que pour tout entier  $n$ ,  $\|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty$ , on en déduit que la suite  $(\|f_n\|_\infty)_{n \geq 1}$  est majorée par une constante  $M$  (on peut également remarquer qu'elle converge vers  $\|f\|_\infty$  pour conclure). Nous obtenons ainsi :

$$\|f_n g_n - f g\|_\infty \leq M \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty,$$

et on conclut en constatant que le terme de droite tend vers 0.

4. (a) Il s'agit de l'uniforme continuité de la fonction  $f_n$ .  
 (b) On écrit, pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$  satisfaisant  $|x_1 - x_2| \leq \eta_\varepsilon$  :

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(x_2) - f_n(x_2)| + |f_n(x_2) - f_n(x_1)| + |f_n(x_1) - f(x_1)| \leq 2\|f - f_n\|_\infty + \varepsilon/3 \leq \varepsilon.$$

Ceci donne bien l'uniforme continuité de la fonction  $f$ .

5. Nous proposons deux démonstrations.

**Première démonstration.** Cet énoncé se démontre par récurrence sur  $n$ . L'hypothèse de récurrence au rang  $n$ ,  $H(n)$  est la suivante :

soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$  tous distincts. Alors la famille  $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$  est libre dans  $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ .

Puisque la fonction exponentielle est non nulle, l'énoncé est vrai pour  $n = 1$ . S'il est vrai pour  $n - 1$ , supposons que l'on ait une relation  $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_{\lambda_k} = 0$ , en dérivant cette relation on obtient

$$i \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k e_{\lambda_k} = 0, \text{ et donc par combinaison linéaire :}$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (\lambda_n - \lambda_k) e_{\lambda_k} = 0.$$

Dans cette relation, le terme pour  $k = n$  est nul, l'hypothèse de récurrence permet donc d'obtenir que tous les  $\alpha_k (\lambda_n - \lambda_k)$ , et donc tous les  $\alpha_k$ , sont nuls lorsque  $k \leq n - 1$ , puisque  $\lambda_k \neq \lambda_n$  si  $k < n$ . Il ne reste donc qu'un seul terme, le coefficient devant est donc nécessairement nul.

**Deuxième démonstration.** Supposons que nous ayons une relation  $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_{\lambda_k} = 0$ . Les fonctions étant toutes de classe  $C^\infty$ , on peut dériver autant de fois que nécessaire, et nous obtenons, en dérivant  $\ell$  fois, après division par  $i^\ell$  :

$$\forall \ell \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k^\ell e_{\lambda_k} = 0.$$

On évalue cette relation en 0, pour chaque  $\ell \in \{0, \dots, n - 1\}$ , on obtient ainsi un système de Van der Monde dont il est connu que la matrice est inversible lorsque les  $\lambda_k$  sont deux à deux distincts.

– II. Quelques propriétés concernant les fonctions périodiques. –

6. Nous proposons deux démonstrations.

**Première démonstration.** Introduisons la fonction  $H : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  d'expression  $H(t) = \int_t^{T+t} h(s)ds = \int_0^{T+t} h(s)ds - \int_0^t h(s)ds$ . La seconde forme montre que  $H$  est de classe  $C^1$  puisque  $h$  est continue, puis que  $H'(t) = h(t+T) - h(t)$ . Or la fonction  $h$  étant  $T$ -périodique, il vient que  $H' = 0$  sur l'intervalle  $\mathbf{R}$ , et donc que  $H$  est constante sur  $\mathbf{R}$ .

**Deuxième démonstration.** La relation de Chasles permet d'écrire que :

$$\int_t^{t+T} h(s)ds = \int_t^0 h(s)ds + \int_0^T h(s)ds + \int_T^{t+T} h(s)ds.$$

Dans la dernière intégrale, on pose  $s = u + T$ , puis on utilise la périodicité de  $h$  pour écrire que  $h(u + T) = h(u)$ . Il vient alors :

$$\int_T^{t+T} h(s)ds = \int_0^t h(u + T)du = \int_0^t h(u)du.$$

Reportant ceci dans l'expression précédente, en changeant la lettre muette  $u$  en  $s$ , le résultat s'ensuit.

7. (a) L'ensemble des périodes de la fonction  $\cos$  est  $2\pi\mathbf{Z}$ , celui de la fonction  $t \mapsto \cos\left(\frac{p}{q}t\right)$  est  $2\pi\frac{q}{p}\mathbf{Z}$ , donc  $2\pi q$  est une période commune aux deux fonctions, et donc une période de  $g_\alpha$ .
- (b) Puisque  $\cos(t) \leq 1$  pour tout réel  $t$ ,  $g_\alpha(x) = 2$  équivaut aux deux assertions  $\cos(x) = 1$  et  $\cos(\alpha x) = 1$ . La première équivaut à l'existence d'un  $k \in \mathbf{Z}$  de sorte que  $x = 2k\pi$  et la seconde à l'existence d'un  $\ell \in \mathbf{Z}$  de sorte que  $\alpha x = 2\ell\pi$ . Bien entendu,  $x = 0$  convient. Cherchons les autres solutions. Si  $x$  est une solution non nulle, alors  $k$  est non nul, et donc par division des relations, nous obtenons  $\alpha = \frac{\ell}{k}$ , ce qui signifie que  $\alpha$  est rationnel, ce qui n'est pas. Ainsi, l'équation  $g_\alpha(x) = 2$  a une solution et une seule, qui est 0, ce qui interdit la fonction  $g_\alpha$  d'être périodique, car si elle admettait une période  $T > 0$ , nous aurions  $g_\alpha(T) = g_\alpha(0) = 2$ , et nous savons qu'il n'existe aucun nombre  $T > 0$  satisfaisant cette relation.
- (c) La question précédente démontre que  $Per(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  n'est pas stable par somme, ce n'est donc pas un s.e.v. de  $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ .
8. (a) Tout d'abord, constatons que  $C_T^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  est un sous ensemble de l'e.v.  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ ; en effet, tout élément  $f$  de  $C_T^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  est borné sur  $[0; T]$  par compacité de cet intervalle et continuité de  $f$ , puis la périodicité assure que  $f(\mathbf{R}) = f([0; T])$ , donc  $f$  est bien bornée sur  $\mathbf{R}$ . Par ailleurs, introduisons pour tout  $x$  réel la forme linéaire  $\varphi_x : BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$  d'expression  $\varphi_x(f) = f(x+T) - f(x)$ . Dire que  $f \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  est  $T$ -périodique consiste à dire que  $\varphi_x(f) = 0$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Ainsi :

$$C_T^0(\mathbf{R}, \mathbf{C}) = \bigcap_{x \in \mathbf{R}} \text{Ker}(\varphi_x),$$

de sorte que  $C_T^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  est bien un s.e.v. comme intersection de s.e.v.

- (b) Puisque  $|\varphi_x(f)| \leq 2\|f\|_\infty$ , on voit que les formes linéaires  $\varphi_x$  sont continues de sorte que leurs noyaux sont fermés comme images réciproques du fermé  $\{0\}$  par des fonctions continues. Ainsi  $C_T^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  est fermé comme intersection de fermés (on peut vérifier également à la main que  $C_T^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ , en se souvenant que la convergence uniforme implique la convergence simple). Étant un fermé du complet  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ , il est donc lui-même complet.

9. **(A1)** implique **(A2)** : en effet, si  $F$  est périodique, elle est bornée car continue (cf question 8(a)). Démontrons que **(A2)** implique **(A3)**. Soit  $M$  un majorant de  $|f|$ . Par la relation de Chasles et la question 6, nous avons pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :

$$F(nT) - F(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq \left| \int_0^T f(t) dt \right| \leq \frac{2M}{n},$$

ce qui donne le résultat en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ . On démontre que **(A3)** implique **(A1)** en s'appuyant de nouveau sur la question 6. Pour tout réel  $t$ , nous avons :

$$F(t+T) - F(t) = \int_t^{t+T} f(s) ds = \int_0^T f(s) ds = 0,$$

ce qui conclut.

10. On remarque tout d'abord que  $f$  est continue sur le compact  $K = [-1, T+1]$  donc elle y est uniformément continue en raison du théorème de Heine :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (x, y) \in K^2, \quad (|x - y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Quitte à le diminuer, on peut supposer que  $\delta$  est inférieur à 1. Soit désormais  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  satisfaisant  $|x - y| \leq \delta$ , introduisons  $k$  la partie entière de  $y/T$ , et posons enfin  $x' = x - kT$  et  $y' = y - kT$ . Tout d'abord, nous avons  $|x' - y'| = |x - y| \leq \delta$ . De plus, par définition de  $k$ , nous avons  $y' \in [0; T[$  donc  $y' \in K$ , et  $|x' - y'| \leq \delta \leq 1$  de sorte que  $x'$  est minoré par  $y' - 1$ , donc par  $-1$ , et majoré par  $y' + 1$ , donc par  $T + 1$ . Ainsi,  $x' \in K$ . Nous pouvons en conclure que :

$$|f(x') - f(y')| \leq \varepsilon.$$

On remarque enfin par la périodicité de  $f$  que  $f(x') = f(x)$  et  $f(y') = f(y)$ , ce qui nous donne le résultat escompté.

**N.B.** : On peut également appliquer Heine sur  $[0; T]$  et conclure par périodicité, en prenant soin de constater que si seul l'un des deux translatés est dans  $[0; T]$ , on aurait un coup d'inégalité triangulaire à appliquer en 0 ou en  $T$ .

11. (a) En posant  $z = x - t$ , puis en utilisant la question 6 (la fonction  $z \mapsto K_n(x - z)f(z)$  est  $2\pi$ -périodique), nous avons :

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x - t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} K_n(z) f(x - z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(z) f(x - z) dz.$$

- (b) Supposons en premier  $j$  non nul. Nous avons alors :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_j = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{ijt}}{ij} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

et lorsque  $j = 0$ , on a  $e_0 = 1$  d'où  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_j = 1$ . Par conséquent, en appliquant deux

fois la linéarité de l'intégrale, nous obtenons d'abord que  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{j=-k}^k e_j \right)$  vaut 1, puis

le résultat demandé.

- (c) À l'aide des sommes de suites géométriques, en remarquant que  $e^{ix}$  est différent de 1, nous obtenons successivement :

$$\sum_{j=-k}^k e_j(x) = \sum_{j=-k}^k e^{ijx} = \frac{e^{(k+1)ix} - e^{-ikx}}{e^{ix} - 1}$$

puis

$$nK_n(x) = \frac{1}{e^{ix} - 1} \left( e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} - \frac{1 - e^{-inx}}{1 - e^{-ix}} \right) = \frac{e^{ix}}{(e^{ix} - 1)^2} (e^{inx} + e^{-inx} - 2) = \frac{2 \cos(nx) - 2}{(2i \sin(x/2))^2} = \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}$$

- (d) Le (b) permet de constater que  $f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt$ , on conclut alors par (a) et la linéarité de l'intégrale.
- (e) La question 10 assure que  $f$  est uniformément continue, ce qui donne la première partie. Ensuite, grâce au (d), puis en notant que  $K_n(t)$  est positif en vertu de (c), nous obtenons :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt.$$

On découpe l'intégrale en deux morceaux, selon que  $|t| < \eta_\varepsilon$  ou que  $\eta_\varepsilon \leq |t| \leq \pi$ . Pour la première intégrale, nous avons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \eta_\varepsilon} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \eta_\varepsilon} \varepsilon K_n(t) dt \leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \pi} K_n(t) dt = \varepsilon.$$

Pour la seconde, en remarquant que  $\sin^2$  est strictement positive et croissante sur  $[\eta_\varepsilon/2, \pi/2]$ , nous avons, pour tout  $t$  satisfaisant  $\eta_\varepsilon \leq |t| \leq \pi$  :

$$K_n(t) \leq \frac{1}{n \sin^2(t/2)} \leq \frac{1}{n \sin^2(\eta_\varepsilon/2)}.$$

Le résultat s'ensuit, puisque  $|f(x-t) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ .

Nous constatons que l'on en déduit que  $\|f_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$  pour tout  $n$  dépassant  $\frac{4\|f\|_\infty}{\varepsilon \sin^2(\eta_\varepsilon/2)}$ , de sorte que  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$ .

- (f) Nous avons :

$$nK_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=-k}^k e_j = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} 1_{|j| \leq k} e_j = \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \left[ e_j \sum_{k=0}^{n-1} 1_{|j| \leq k} \right] = \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} (n - |j|) e_j,$$

d'où  $\beta_{n,j} = 1 - \frac{|j|}{n}$  pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $j \in \{-(n-1), \dots, n-1\}$ .

- (g) La question précédente démontre que chaque  $f_n$  est un polynôme trigonométrique généralisé. Soit  $\varepsilon > 0$  arbitraire. Le (e) démontre en particulier que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n \sin^2(\eta_\varepsilon/2)}.$$

On choisit un entier  $n_\varepsilon$  de sorte que  $\frac{2\|f\|_\infty}{n_\varepsilon \sin^2(\eta_\varepsilon/2)} \leq \varepsilon$ . Alors pour tout  $n \geq n_\varepsilon$ , nous avons  $\|f_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$ . Ceci est bien la convergence uniforme de la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  vers  $f$ .

- (h) Pour pouvoir appliquer le (g), on se ramène à une fonction  $2\pi$ -périodique. On pose ainsi  $f(x) = g\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ , ce qui définit une fonction continue  $T$ -périodique, à laquelle on associe la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  qui converge uniformément vers elle. On pose ensuite  $g_n(x) = f_n\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$  pour chaque  $x \in \mathbf{R}$  et  $n \in \mathbf{N}^*$ . Puisque  $x \mapsto \frac{T}{2\pi}x$  est une bijection de  $\mathbf{R}$  sur lui-même, nous avons  $\|g_n - g\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty$ , ce qui démontre que  $(g_n)_n$  converge uniformément vers  $g$ . On explicite enfin  $g_n$  :

$$g_n(x) = f_n\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|j| \leq n-1} \beta_{n,j} e_j\left(\frac{2\pi}{T}x - t\right) f(t) dt = \sum_{|j| \leq n-1} \left( \beta_{n,j} e_{2\pi j/T}(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_j(-t) f(t) dt \right)$$

Or :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_j(-t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_j(-t) g\left(\frac{T}{2\pi}t\right) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e_{-\frac{2\pi j}{T}}(z) g(z) dz = c_j(g),$$

où l'on a posé  $z = \frac{T}{2\pi}t$ . Rassemblant, nous obtenons :

$$g_n = \sum_{|j| \leq n-1} \beta_{n,j} c_j(g) e_{\frac{2\pi j}{T}},$$

ce qui démontre que  $g_n$  est bien un polynôme trigonométrique, dont on a exprimé les coefficients en fonction des coefficients de Fourier de  $g$ .

12. (a) Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  une fonction périodique continue ayant une limite en  $+\infty$ , que l'on note  $\ell$ . Soit  $x \in \mathbf{R}$  arbitraire et  $n \in \mathbf{N}^*$ . La périodicité de  $f$  assure que  $f(x) = f(x + nT)$ , et en faisant tendre  $n$  vers l'infini, nous obtenons  $f(x) = \ell$ , ce qui démontre que  $f$  est constante.
- (b) Je note  $g_j = f_j(\cdot + T_{N+1}) - f_j$ . D'une part, on remarque que  $g_j$  est  $T_j$ -périodique et d'autre part que  $g = \sum_{j=1}^{N+1} g_j$ . De plus, par  $T_{N+1}$ -périodicité de  $f_{N+1}$ , nous avons  $g_{N+1} = 0$ . Ainsi,  $g$  apparaît comme la somme des  $N$  fonctions périodiques  $g_j$ , pour  $1 \leq j \leq N$ .
- (c) L'énoncé à démontrer par récurrence est vrai pour  $N = 1$ , en vertu du (a). S'il est vrai au rang  $N$ , prenons une fonction  $f$  somme de  $N$  fonctions périodiques et ayant une limite  $\ell$  en  $+\infty$ . On écrit  $f = f_1 + \dots + f_{N+1}$ , et, avec les notations du (b), la fonction  $g$  est somme de  $N$  fonctions continues périodiques, et a pour limite  $\ell - \ell = 0$  en  $+\infty$ . Grâce à l'hypothèse de récurrence,  $g$  est constante et donc nulle. Cela signifie que  $f$  est en fait  $T_{N+1}$ -périodique, et puisqu'elle a une limite, l'hypothèse au rang 1 conclut que  $f$  est constante.
- (d) Soit  $f$  une telle fonction. On définit  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  d'expression  $g(x) = f(-x)$ . La fonction  $g$  est une somme finie de fonctions continues périodiques, et a la limite  $\ell$  en  $+\infty$ . Le point précédent assure que  $g$ , et donc  $f$ , est constante.
13. (a) Soit  $p_0$  la valeur de la constante. Nous avons pour tout réel  $t : |\varphi_{\mu, P}(t)| = |P(t)| = |p_0|$ .
- (b) On commence par enlever les termes pour lesquels  $P_j$  est nul, ce qui ne change rien à la somme, puis on se retrouve avec une somme (finie) de termes tous bornés en raison du (a). La somme est par conséquent bornée.
- (c) i. Si  $Q$  est constant (non nul), il suffit de prendre par exemple  $\varepsilon_0 = |Q(0)|/2$ . Sinon, par la contraposée de la question 12,  $Q$  étant une somme finie de fonctions périodiques et qui n'est pas nulle, elle ne tend donc pas vers 0 en  $+\infty$ , ce qui donne un  $\varepsilon_1 > 0$  et une suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  tendant vers  $+\infty$  telle que  $|Q(t_n)| \geq \varepsilon_1$ . De même, il existe  $\varepsilon_2 > 0$  et une suite  $(t'_n)_{n \geq 1}$  tendant vers  $-\infty$  telle que  $|Q(t'_n)| \geq \varepsilon_2$ . On pose enfin  $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ .

- ii. Commençons par le second cas. On décompose la somme de gauche avec les indices  $j$  variant de 1 à  $m$ , puis de  $m + 1$  à  $N$ . Nous avons tout d'abord :

$$\sum_{j=1}^m e^{\mu_j t} P_j(t) = e^{\alpha_1 t} \sum_{j=1}^m e^{i\beta_j t} P_j(t).$$

Soit  $N'$  le maximum des degrés de  $P_1, \dots, P_m$ , ce qui est un entier puisque les  $P_j$  sont supposés non nuls. On écrit  $P_j(t) = \sum_{k=0}^{N'} \gamma_{j,k} t^k$ , de sorte qu'au final :

$$\sum_{j=1}^m \varphi_{\mu_j, P_j}(t) = e^{\alpha_1 t} \sum_{k=0}^{N'} t^k Q_k(t),$$

où l'on a posé  $Q_k(t) = \sum_{j=1}^m \gamma_{j,k} e^{i\beta_j t}$ .  $Q_j$  est un polynôme trigonométrique (généralisé),

et par définition de  $N'$ , au moins un des  $\gamma_{j, N'}$  est non nul ce qui assure que  $Q_{N'}$  n'est pas nul. Passons à la dernière somme. Nous pouvons l'écrire sous la forme  $e^{\alpha_1 t} \psi(t)$ , avec :

$$\psi(t) = \sum_{j=m+1}^N e^{i\beta_j t} e^{(\alpha_j - \alpha_1)t} P_j(t).$$

Les  $e^{i\beta_j t}$  sont de module 1, et puisque  $\alpha_j - \alpha_1 < 0$ , chaque terme de la somme tend vers 0 en  $+\infty$ . Dans le premier cas, on peut prendre en fait  $\psi = 0$  et on fait le même raisonnement en remplaçant  $m$  par  $N$ .

- iii. Le terme précédent peut s'écrire sous la forme  $e^{\alpha_1 t} t^{N'} (Q_{N'}(t) + R(t))$  avec  $R$  qui tend vers 0 en  $+\infty$ . Supposons que  $\alpha_1 > 0$ , ou bien  $\alpha_1 = 0$  et  $N' > 0$ , alors  $e^{\alpha_1 t_n} t_n^{N'}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,  $|R(t_n)| \leq \varepsilon/2$ , et donc  $|Q_{N'}(t_n) + R(t_n)| \geq |Q_{N'}(t_n)| - |R(t_n)| \geq \varepsilon_0/2$  pour  $n$  assez grand, ce qui démontre que  $\left| \sum_{j=1}^N \varphi_{\mu_j, P_j}(t_n) \right|$  tend vers  $+\infty$  et donc n'est pas borné. Nécessairement il vient alors soit  $\alpha_1 < 0$ , soit  $\alpha_1 = 0$  et  $N' = 0$ .
- iv. Cette fois, on regroupe ensemble les (derniers) indices  $j$  pour lesquels  $\alpha_j = \alpha_N$ , et l'on regarde en  $-\infty$ . Un raisonnement analogue permet d'obtenir que  $\alpha_N \geq 0$  (et même d'être plus précis, mais ce ne sera pas utile). Par conséquent, nous avons :

$$0 \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_N \geq 0,$$

ce qui démontre que tous les  $\alpha_j$  sont nuls. Ensuite, on récupère  $N' = 0$ , et donc que tous les polynômes sont constants.

### – III. Étude de $PP$ et de ses éléments. –

14. (a) Puisque tout polynôme trigonométrique généralisé est dans  $Vect(Per(\mathbf{R}, \mathbf{C}))$ , toute limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques généralisés sera presque-périodique. Réciproquement, étant donné  $f \in PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $g \in Vect(Per(\mathbf{R}, \mathbf{C}))$  telle que  $\|f - g\| \leq \varepsilon/2$ . Alors il existe un entier  $n \geq 1$  et  $n$  fonctions continues périodiques  $g_1, \dots, g_n$  telles que  $g = \sum_{j=1}^n g_j$ . Appliquant la question 11 à chaque  $g_j$ , on trouve pour

chaque  $j$  un polynôme trigonométrique généralisé  $Q_j$  tel que  $\|g_j - Q_j\|_\infty \leq \varepsilon/(2n)$ . Alors, en posant  $Q = \sum_{j=1}^n Q_j$ , nous obtenons un polynôme trigonométrique généralisé pour lequel  $\|f - Q\|_\infty \leq \varepsilon$ , puisque :

$$\|f - Q\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty + \|g - Q\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty + \sum_{j=1}^n \|g_j - Q_j\|_\infty \leq \varepsilon.$$

(b) Passant à l'adhérence dans la relation entre espaces vectoriels  $PTG(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \subset BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ , nous obtenons que  $PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  est un s.e.v. fermé de  $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  (l'adhérence d'un s.e.v. est bien un s.e.v.). Comme fermé d'un complet, il est alors complet.

15.  $f$  (resp.  $g$ ) apparaît comme limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques généralisés  $(f_n)_n$  (resp.  $(g_n)_n$ ). L'espace des polynômes trigonométriques généralisés étant stable par produit interne,  $f_n g_n$  en est un pour chaque  $n$ . Alors la suite de polynômes trigonométriques généralisés  $(f_n g_n)_n$  converge uniformément vers  $f g$  en vertu de la question 3, d'où le résultat.

16. (a) On écrit  $\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Alors  $\tilde{f} \circ \tilde{g} : x$

mapsto  $\sum_{k=0}^n a_k (\tilde{g}(x))^k$ .  $\tilde{g}$  étant un élément de  $PTG(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ , e.v. stable par produit interne, on en déduit que  $\tilde{f} \circ \tilde{g}$  est également un élément de  $PTG(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ .

(b)  $\tilde{g}(\mathbf{R})$  est un borné, son adhérence est donc compacte. Prenons une suite de polynômes  $(f_n)_n$  convergeant uniformément sur  $K$  vers  $f$ . Nous avons alors :

$$|\tilde{f}_n(\tilde{g}(x)) - f(\tilde{g}(x))| \leq \sup_{y \in K} |\tilde{f}_n(y) - f(y)|,$$

ce qui démontre, en passant au sup à gauche, que  $(\tilde{f}_n \circ \tilde{g})_n$  converge uniformément sur  $\mathbf{R}$  vers  $f \circ \tilde{g}$ . En vertu du (a),  $\tilde{f}_n \circ \tilde{g}$  est un polynôme trigonométrique généralisé pour tout  $n$ , ce qui permet de conclure.

(c) La fonction  $g$  est bornée sur  $\mathbf{R}$ , on introduit  $M = \|g\|_\infty + 1$  et  $K_1 = [-M, M]$ , qui est un compact de  $\mathbf{R}$ . En raison du théorème de Heine, sur ce compact  $f$  est uniformément continue. Soit  $\varepsilon > 0$  arbitraire. Il existe  $\delta_\varepsilon \in ]0; 1[$  tel que pour tous  $(u, v) \in K_1^2$ , l'hypothèse  $|u - v| \leq \delta_\varepsilon$  assure que  $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$ .

On peut alors trouver un polynôme trigonométrique  $g_\varepsilon$  tel que  $\|g - g_\varepsilon\|_\infty \leq \delta_\varepsilon$ . En vue d'appliquer le (b), notons que l'on peut toujours supposer que  $g_\varepsilon$  est à valeurs réelles. En effet, si  $\|g - g_\varepsilon\|_\infty \leq \delta_\varepsilon$ , nous avons également  $\|\bar{g} - \bar{g}_\varepsilon\|_\infty \leq \delta_\varepsilon$ , et donc, en notant que  $g = \bar{g}$ , il vient :

$$\left\| g - \frac{1}{2}(g_\varepsilon + \bar{g}_\varepsilon) \right\|_\infty \leq \delta_\varepsilon.$$

Ainsi,  $\frac{1}{2}(g_\varepsilon + \bar{g}_\varepsilon)$  est un polynôme trigonométrique généralisé à valeurs réelles convenant, et quitte à remplacer dans ce qui suit  $g_\varepsilon$  par ce dernier, nous supposons que  $g_\varepsilon$  est à valeurs réelles.

Soit  $x$  dans  $\mathbf{R}$  arbitraire. On choisit  $u = g(x)$  et  $v = g_\varepsilon(x)$ , qui sont bien des éléments de  $K_1$ , et l'on obtient  $|f(g(x)) - f(g_\varepsilon(x))| \leq \varepsilon$ , d'où  $\|f \circ g - f \circ g_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ . Par la question précédente,  $f \circ g_\varepsilon$  est presque-périodique pour chaque  $\varepsilon > 0$ . Or, l'espace des telles fonctions presque-périodiques étant fermé, on peut en conclure que  $f \circ g$  est presque-périodique.

– IV. Moyennes et coefficients de Fourier-Bohr. –

IV. A) Moyennes.

17. Soit  $\tau > 0$  et  $N$  la partie entière de  $\tau/T$ , et  $\tau' = \tau - NT \in [0; T[$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \right| &= \left| \frac{1}{\tau} \int_0^{NT} f(t)dt + \frac{1}{\tau} \int_{NT}^\tau f(t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{NT + \tau'} \int_0^{NT} f(t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \right| + \frac{1}{\tau} \int_{NT}^\tau |f(t)|dt \leq \\ \left| \frac{N}{NT + \tau'} \int_0^T f(t)dt - \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \right| + \frac{\tau - NT}{\tau} \|f\|_\infty &\leq \frac{|NT - (NT + \tau')|}{T(NT + \tau')} \int_0^T |f(t)|dt + \frac{T}{\tau} \|f\|_\infty \leq \\ \frac{\tau'}{\tau} \|f\|_\infty + \frac{T}{\tau} \|f\|_\infty &\leq \frac{2T}{\tau} \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Ceci démontre que  $\mathcal{M}_\tau(f)$  tend vers  $\frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$  lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$ .

18. Le début se déduit de la linéarité de l'intégrale et du passage à la limite (si existence des limites).  $\mathcal{M}$  apparaît comme une limite simple d'une suite de formes linéaires, elle est donc linéaire (unicité de la limite). Enfin, nous avons pour tout  $\tau > 0$  :

$$\left| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)dt \right| \leq \frac{1}{\tau} \tau \|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Puisque cette relation est vraie pour tout  $\tau$ , par continuité du module on peut passer à la limite à gauche pour obtenir que  $\mathcal{M}$  est une forme linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1. La valeur 1 est atteinte par la fonction constante 1, il s'agit donc bien de sa norme.

19. (a) Nous avons :

$$|\mathcal{M}_\tau(f) - \mathcal{M}_{\tau'}(f)| \leq |\mathcal{M}_\tau(f) - \mathcal{M}_\tau(f_n)| + |\mathcal{M}_\tau(f_n) - \mathcal{M}_{\tau'}(f_n)| + |\mathcal{M}_{\tau'}(f_n) - \mathcal{M}_{\tau'}(f)|.$$

On conclut en constatant que

$$|\mathcal{M}_\tau(f) - \mathcal{M}_\tau(f_n)| = |\mathcal{M}_\tau(f - f_n)| \leq \|f - f_n\|_\infty$$

et la même relation avec le dernier terme.

(b) On choisit un indice  $n$  de sorte que  $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon/3$ . Puisque  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{M}_\tau(f_n)$  existe, on sait qu'il existe un  $A_\varepsilon > 0$  de sorte que si  $\tau, \tau' \geq A_\varepsilon$ , nous aurons  $|\mathcal{M}_\tau(f_n) - \mathcal{M}_{\tau'}(f_n)| \leq \varepsilon/3$ . On conclut alors avec la relation du (a).

(c) Il s'agit du critère de Cauchy au voisinage de  $+\infty$ , que nous redémontrons ici. Si on prend une suite  $(\tau_n)_n$  de réels strictement positifs tendant vers  $+\infty$ , la question précédente démontre que la suite  $(\mathcal{M}_{\tau_n}(f))_n$  converge. A priori la limite dépend de la suite  $(\tau_n)_n$ , mais en fait il n'en n'est rien car si  $(\tau'_n)_n$  est une autre telle suite, pour tout  $\varepsilon > 0$  nous aurons  $|\mathcal{M}_{\tau_n}(f) - \mathcal{M}_{\tau'_n}(f)| \leq \varepsilon$  à partir d'un certain rang. On en conclut que la limite existe bien lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$ .

20. Même argument que dans 18.

IV. B) Coefficients de Fourier-Bohr.

- 21.** Soit  $f \in PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ ;  $e_{-\lambda}f$  est dans  $PP(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  comme produit de deux éléments de cet espace (cf question **15**), donc  $a_\lambda(f)$  a bien un sens. De plus, en vertu de la question **20** :

$$|a_\lambda(f)| = |\mathcal{M}(e_{-\lambda}f)| \leq \mathcal{M}(|e_{-\lambda}f|) = \mathcal{M}(|f|) \leq \|f\|_\infty,$$

de sorte que  $f$

mapsto  $a_\lambda(f)$  est bien continue de norme inférieure ou égale à 1 (en fait, sa norme est 1, ce qui se voit par exemple avec  $f = e_\lambda$ , mais ce n'est pas demandé).

- 22. (a)**  $e_{-\lambda}f = \sum_{j=1}^N \alpha_j e_{\lambda_j - \lambda}$ , or la fonction  $e_{\lambda_j - \lambda}$  est périodique, de moyenne égale à 1 si  $\lambda_j - \lambda = 0$  et de moyenne nulle sinon. Par conséquent  $a_\lambda(f) = \alpha_j$  si  $\lambda = \lambda_j$  et  $a_\lambda(f) = 0$  si  $\lambda$  n'est aucun des  $\lambda_j$ .

- (b)** Nous avons

$$|f|^2 = \bar{f}f = \sum_{j=1}^N \bar{\alpha}_j e_{\lambda_j} f = \sum_{j=1}^N \bar{\alpha}_j e_{-\lambda_j} f,$$

de sorte que, à l'aide de la question précédente :

$$\mathcal{M}(|f|^2) = \sum_{j=1}^N \bar{\alpha}_j \alpha_j = \sum_{j=1}^N |\alpha_j|^2.$$

- 23. (a)** En utilisant la relation de Chasles puis la périodicité de  $f$ , nous avons :

$$\mathcal{M}_{NT}(e_{-\lambda}f) = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} e^{-i\lambda t} f(t) dt = \frac{1}{NT} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jT}^{(j+1)T} e^{-i\lambda t} f(t) dt = \frac{1}{NT} \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^T e^{-i\lambda(x+jT)} f(x+jT) dx$$

$$= \frac{1}{NT} \sum_{j=0}^{N-1} \left( e^{-i\lambda jT} \int_0^T e^{-i\lambda x} f(x) dx \right) = \left( \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\lambda x} f(x) dx \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda jT} \right).$$

- (b)** Lorsque  $\lambda \notin \frac{2\pi}{T}\mathbf{Z}$ , nous avons  $e^{-i\lambda T} \neq 1$  de sorte que

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda jT} \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (e^{-i\lambda T})^j \right| = \left| \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{-i\lambda NT}}{1 - e^{-i\lambda T}} \right| \leq \frac{2}{N2|\sin(\lambda T/2)|} = \frac{1}{N|\sin(\lambda T/2)|},$$

qui tend vers 0 lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , ainsi  $a_\lambda(f) = 0$ .

Supposons maintenant que  $\lambda = \frac{2\pi}{T}k$ , pour un certain  $k \in \mathbf{Z}$ . Dans ce cas,  $e^{-i\lambda T} = 1$ , de

sorte que  $\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda jT} = 1$ , et au final :

$$\mathcal{M}_{NT}(e_{-\lambda}f) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\frac{2\pi}{T}kx} f(x) dx = c_k(f).$$

- 24. (a)** Par l'injectivité de Fourier, une fonction périodique continue non constante a au moins un coefficient de Fourier d'indice non nul distinct de 0.

(b) Si  $\frac{T_1}{T_2}$  est rationnel, disons  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$ , avec  $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$  alors les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  ont toutes deux  $qT_1 = pT_2$  comme période, il en est donc de même de la somme. Supposons désormais que le rapport  $\frac{T_1}{T_2}$  soit irrationnel. Puisque  $\lambda_j \in \frac{2\pi}{T_j}\mathbf{Z}$ , cela implique d'une part que le rapport  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  est également irrationnel, mais aussi que  $a_{\lambda_1}(f_2) = a_{\lambda_2}(f_1) = 0$ . Par conséquent,  $a_{\lambda_1}(f_1 + f_2) = a_{\lambda_1}(f_1) + a_{\lambda_1}(f_2) = a_{\lambda_1}(f_1) \neq 0$  et pour les mêmes raisons  $a_{\lambda_2}(f_1 + f_2) \neq 0$ . Si  $f_1 + f_2$  avait une période non nulle  $T$ , nous aurions que chaque  $\lambda_j$  serait un élément de  $\frac{2\pi}{T}\mathbf{Z}$ , ce qui contredit l'irrationalité de leur rapport. Il ne reste alors que le cas où la somme serait constante, ce qui n'est pas possible puisque  $a_{\lambda_2}(f_1 + f_2) \neq 0$  avec  $\lambda_2$  non nul.

25. (a) Ceci provient de la continuité de la forme linéaire  $a_\lambda$ .

(b) Soit  $\lambda \in \Lambda(f)$ . On a  $a_\lambda(f) \neq 0$  et donc, via la question précédente,  $a_\lambda(f_n) \neq 0$  à partir d'un certain rang, *i.e.*  $\lambda \in \Lambda(f_n)$  à partir d'un certain rang.

(c) Chaque  $\Lambda(f_n)$  est fini, donc  $\Lambda(f)$  est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis.

26. Grâce à une intégration par parties, légitime car les fonctions  $f$  et  $e_{-\lambda}$  sont de classe  $C^1$ , nous avons :

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{-i\lambda x} f'(x) dx = \frac{1}{\tau} \left[ e^{-i\lambda x} f(x) \right]_0^\tau + i\lambda \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{-i\lambda x} f(x) dx.$$

De plus,  $f$  étant presque-périodique, elle est bornée (cf. 14(b)), et donc on peut écrire :

$$\frac{1}{\tau} \left| \left[ e^{-i\lambda x} f(x) \right]_0^\tau \right| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\tau},$$

de sorte que le terme tout intégré tend vers 0 lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$ . Le passage à la limite donne alors le résultat.

27. (a) Puisque  $|\alpha_n e_{\beta_n}(x)| = |\alpha_n|$ , la série définissant  $f$  est normalement convergente, ce qui démontre au passage que  $f$  est continue (par convergence normale) et bornée. Soit  $f_N = \sum_{n=0}^N \alpha_n e_{\beta_n}$ .  $f_N$  est un polynôme trigonométrique généralisé, et nous avons pour tout réel  $x$  :

$$|f(x) - f_N(x)| \leq \sum_{n \geq N+1} |\alpha_n|.$$

Le majorant tend vers 0 lorsque  $N \rightarrow +\infty$  puisque la série  $\sum_n \alpha_n$  est absolument convergente. Ainsi,  $f$  est presque-périodique comme limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

(b) On constate tout d'abord que  $a_\lambda(f_N)$  vaut  $\alpha_n$  si  $\lambda = \beta_n$  pour un  $n \leq N$ , et vaut 0 dans tous les autres cas. Or,  $a_\lambda(f) = \lim_{N \rightarrow +\infty} a_\lambda(f_N)$ , de sorte que ce terme vaut  $\alpha_n$  si  $\lambda = \beta_n$  pour un  $n \in \mathbf{N}$ , et vaut 0 dans tous les autres cas. Ainsi  $\Lambda(f) \subset \{\beta_n, n \in \mathbf{N}\}$  et il y a même égalité puisque tous les  $\alpha_n$  sont supposés non nuls. De plus, nous avons obtenu que  $a_{\beta_n}(f) = \alpha_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

#### IV. C) Relation de Parseval.

**28.** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  est un polynôme trigonométrique généralisé. On écrit  $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_{\lambda_j}$ , et l'on

note  $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ . Nous avons  $\mathcal{M}(f) = \sum_{j=1}^m |\alpha_j|^2$  en vertu de la question **22(b)**. Soit  $J$  une partie finie arbitraire de  $\mathbf{R}$  :

$$S_J(f) = \sum_{\lambda \in J} |a_\lambda(f)|^2 = \sum_{\lambda \in J \cap S} |a_\lambda(f)|^2 \leq \sum_{\lambda \in S} |a_\lambda(f)|^2,$$

le dernier terme étant atteint par exemple pour  $J = S$ . Or, grâce à **22(a)**, nous avons

$$\sum_{\lambda \in S} |a_\lambda(f)|^2 = \sum_{j=1}^m |\alpha_j|^2,$$

ce qui conclut.

- 29.** (a) Puisque  $(f_n)_n$  converge vers  $f$ , la continuité des formes linéaires  $a_\lambda$  et le fait que la somme soit finie permet de conclure.
- (b) Puisque  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$ ,  $(\overline{f_n})_n$  converge uniformément vers  $\overline{f}$ , ce qui assure le résultat grâce à la question **3**.
- (c) De la question précédente et de la continuité de  $\mathcal{M}$ , on en déduit que  $(\mathcal{M}(|f_n|^2))_n$  converge vers  $\mathcal{M}(|f|^2)$ . Donc à partir d'un certain rang  $N_\varepsilon$ , nous avons  $\mathcal{M}(|f_n|^2) \leq \mathcal{M}(|f|^2) + \varepsilon$ . Or  $S_J(f_n) \leq S(f_n)$ , et  $S(f_n)$  est égal à  $\mathcal{M}(|f_n|^2)$  en vertu de **28**. Donc pour  $n \geq N_\varepsilon$ , nous avons bien  $S_J(f_n) \leq \mathcal{M}(|f|^2) + \varepsilon$ .
- (d) La relation précédente étant vraie pour tout  $J$  et tout entier  $n$  assez grand, on peut faire tendre  $n \rightarrow +\infty$ , ce qui permet grâce à (a) d'obtenir que  $S_J(f) \leq \mathcal{M}(|f|^2) + \varepsilon$  pour toute partie  $J$ . Ceci étant valable pour toute partie  $J$ , il vient  $S(f) \leq \mathcal{M}(|f|^2) + \varepsilon$ , puis il reste à faire tendre  $\varepsilon$  vers  $0^+$  pour conclure.

**30.** (a)

$$|f - P^*|^2 = |f|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{P^*}f) + |P^*|^2.$$

Or

$$\mathcal{M}(|P^*|^2) = \sum_{\lambda \in \Lambda(f) \cap \Lambda(P)} |a_\lambda(f)|^2.$$

De plus,  $\overline{P^*}f = \sum_{\lambda \in \Lambda(f) \cap \Lambda(P)} \overline{a_\lambda(f)} e_{-\lambda} f$ , de sorte que :

$$\mathcal{M}(\operatorname{Re}(\overline{P^*}f)) = \sum_{\lambda \in \Lambda(f) \cap \Lambda(P)} \operatorname{Re}(\overline{a_\lambda(f)} \mathcal{M}(e_{-\lambda} f)) = \sum_{\lambda \in \Lambda(f) \cap \Lambda(P)} \operatorname{Re}(|a_\lambda(f)|^2) = \sum_{\lambda \in \Lambda(f) \cap \Lambda(P)} |a_\lambda(f)|^2,$$

ce qui conclut.

(b) Nous avons, similairement à ce qui précède :

$$\left| f - \sum_{k=1}^n z_k e_{\mu_k} \right|^2 = |f|^2 + \left| \sum_{k=1}^n z_k e_{\mu_k} \right|^2 - 2\operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^n \overline{z_k} e_{-\mu_k} f \right),$$

ce qui donne le résultat en passant aux moyennes et en remarquant que :

$$\sum_{k=1}^n |z_k|^2 - 2\operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^n \overline{z_k} a_{\mu_k}(f) \right) = \sum_{k=1}^n |z_k - a_{\mu_k}(f)|^2 - \sum_{k=1}^n |a_{\mu_k}(f)|^2.$$

La valeur minimale est alors atteinte lorsque  $z_k = a_{\mu_k}(f)$  pour tout  $k$ , et vaut :

$$\mathcal{M}(|f|^2) - \sum_{k=1}^n |a_{\mu_k}(f)|^2.$$

(c) Notons  $\mu_1, \dots, \mu_n$  les éléments distincts de  $\Lambda(P)$ .  $P$  s'écrit alors sous la forme  $\sum_{j=1}^n \beta_j e_{\mu_j}$ .

Lorsque  $\lambda \in \Lambda(P) \setminus \Lambda(f)$ , nous avons  $a_\lambda(f) = 0$ . Lorsque  $\lambda \in \Lambda(P) \cap \Lambda(f)$ , disons  $\lambda = \mu_j$  pour un certain  $j$ , nous avons  $a_\lambda(f) = a_{\mu_j}(f)$ . Par conséquent :

$$P^* = \sum_{\lambda \in \Lambda(P) \cap \Lambda(f)} a_\lambda(f) e_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda(P)} a_\lambda(f) e_\lambda,$$

et

$$\mathcal{M}(|f - P|^2) = \psi_{(\mu_1, \dots, \mu_n)}(\beta_1, \dots, \beta_n) \geq \psi_{(\mu_1, \dots, \mu_n)}(a_{\mu_1}(f), \dots, a_{\mu_n}(f)) = \mathcal{M}\{|f - P^*|^2\}.$$

De ceci, on déduit que :

$$\mathcal{M}(|f - P^*|^2) \leq \mathcal{M}(|f - P|^2) \leq \|f - P\|_\infty^2 \leq \varepsilon^2,$$

c'est-à-dire grâce au (a) que :

$$\mathcal{M}(|f|^2) \leq \left( \sum_{\lambda \in \Lambda(P) \cap \Lambda(f)} |a_\lambda(f)|^2 \right) + \varepsilon^2 \leq S(f) + \varepsilon^2.$$

On conclut en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0.

**31.** Il s'agit simplement de combiner les résultats des deux questions précédentes.

**32.** On peut prendre par exemple la fonction  $f$  d'expression :

$$f = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} e_{1/n}.$$

Nous sommes dans les conditions d'applications de la question **27**, avec  $\alpha_n = 1/n^{3/2}$  et  $\beta_n = 1/n$  pour tout  $n \geq 1$ , en effet la série  $\sum_{n \geq 1} 1/n^{3/2}$  est (absolument) convergente (critère de Riemann avec  $3/2 > 1$ ). Nous avons alors une fonction presque-périodique, avec  $\Lambda(f) = \{1/n, n \geq 1\}$  et  $a_{1/n}(f) = \frac{1}{n^{3/2}}$ . Sa moyenne est égale à  $a_0(f)$ , donc à 0. Soit  $F$  la primitive de  $f$  de moyenne nulle, démontrons qu'elle n'est pas p.p., dans ce cas aucune primitive ne le sera. Nous avons  $a_0(F) = 0$  puisqu'elle est de moyenne nulle, et grâce à la question **26**,  $a_\lambda(F) = \frac{a_\lambda(f)}{i\lambda}$ , de sorte que  $\Lambda(F) = \{1/n, n \geq 1\}$  et  $a_{1/n}(F) = \frac{1}{i\sqrt{n}}$ . Si  $F$  est p.p., la série  $\sum_{\lambda \in \mathbf{R}} |a_\lambda(F)|^2$  converge, ce qui est faux, puisque :

$$\sum_{\lambda \in \mathbf{R}} |a_\lambda(F)|^2 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Donc les primitives de  $f$  ne sont pas presque-périodiques.

– **V. Solutions bornées d'équations différentielles.** –

**V. A) Solutions bornées d'équations différentielles autonomes.**

- 33. (a)** Les solutions de  $x' = ax$  sont les fonctions  $x : t \mapsto x_0 e^{at}$ . Dans notre cas,  $a = i\mu$  avec  $\mu \in \mathbf{R}$ , donc  $|x(t)| = |x_0|$ , de sorte que la fonction  $x$  est bien bornée.
- (b)** Supposons  $x_0 \neq 0$ .  $|x_0 e^{at}| = |x_0| e^{\operatorname{Re}(a)t}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (resp. lorsque  $t \rightarrow -\infty$ ) si  $\operatorname{Re}(a) > 0$  (resp.  $\operatorname{Re}(a) < 0$ ). Donc si  $\operatorname{Re}(a) \neq 0$ , aucune solution autre que la solution nulle n'est bornée.
- 34. (a)** Soit  $f$  l'endomorphisme représenté par la matrice  $A$  dans la base canonique.  $f$  laisse stable  $\operatorname{Ker}(f - \lambda_k id)$ , on peut donc considérer la restriction  $f_k$  de  $f$  à  $\operatorname{Ker}(f - \lambda_k id)$ , qui définit un endomorphisme de cet espace. Par définition de  $C_k$ , l'endomorphisme  $f_k - \lambda_k id_{C_k}$  est nilpotent d'indice au plus égal à  $n_k$ . On peut donc trouver une base dans laquelle  $f$  sera représentée par une matrice  $\Delta$  diagonale par blocs, les blocs étant des  $\Delta_k = \lambda_k I_{n_k} + N_k$ , avec  $N_k$  nilpotente d'indice au plus  $n_k$ . Soit  $P$  la matrice de passage de la base canonique à cette base adaptée. Nous avons  $X(t) = P \exp(t\Delta) P^{-1} X(0)$ , avec  $\exp(t\Delta)$  matrice diagonale par blocs, de blocs  $\exp(t\Delta_k) = e^{t\lambda_k} \sum_{\ell=0}^{n_k-1} \frac{1}{\ell!} N_k^\ell$ , puisque  $N_k$  est nilpotente et commute avec  $I_{n_k}$ . Ainsi, chaque composante sera une combinaison linéaire de termes de la forme  $\phi_{\lambda_k, P_k}$  (pour  $k \in \{1, \dots, r\}$ ), où chaque  $P_k$  est un polynôme de degré au plus  $n_k - 1$ , et donc une somme de tels termes en rentrant les constantes multiplicatives dans l'expression de  $P_k$ .
- (b)** S'il existe une valeur propre  $\lambda$  de partie réelle nulle, donnons nous  $X_0$  un vecteur propre associé à cette valeur propre. La fonction  $\phi : t \mapsto e^{t\lambda} X_0$  est une solution, puisque  $\phi'(t) = \lambda \phi(t)$  et

$$A\phi(t) = e^{t\lambda} AX_0 = e^{t\lambda} \lambda X_0 = \lambda \phi(t) = \phi'(t).$$

De plus, les composantes de  $\phi$  sont bornées, car majorées par  $\|\phi(t)\| = \|X_0\|$ , donc la fonction est elle-même bornée, et non nulle. Il est donc nécessaire que toutes les valeurs propres soient de partie réelle non nulle. Si cette condition est satisfaite, les composantes non nulles d'une solution sont des sommes de termes de la forme  $\varphi_{P, \lambda}$  avec  $P$  non nul et  $\lambda$  de partie réelle non nulle. L'assertion **(A4)** de la question **13** étant alors fausse, il en est de même de l'assertion **(A5)**, ainsi toute composante non nulle sera non bornée. Par conséquent, toute solution non nulle est non bornée. La CNS est donc qu'aucune valeur propre soit de partie réelle nulle.

- (c)** Par le **(a)**, chaque composante de la solution est de la forme  $\sum_{j=1}^r \varphi_{\lambda_j, P_j}$ . Toute solution bornée a ses composantes bornées, donc le fait que **(A5)** implique **(A4)** permet de dire que dans l'expression  $\sum_{j=1}^r \varphi_{\lambda_j, P_j}$  d'une composante,  $\lambda_j$  est un imaginaire pur (donc de la forme  $i\mu_j$  avec  $\mu_j$  réel) et  $P_j$  est constant. Écrivons  $\lambda_j$  sous la forme  $i\mu_j$ , avec  $\mu_j$  réel, et notons  $c_j$  la constante valeur du polynôme  $P_j$ . Finalement cette composante s'écrit donc  $\sum_{j=1}^r c_j e_{\mu_j}$ , ce qui est bien un polynôme trigonométrique généralisé.

**V. B) Équations exponentiellement stables.**

**35. (a)** Elles sont de la forme  $x : t$   
*mapsto*  $\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) x_0$ , avec  $x_0 \in \mathbf{C}$ .

**(b)** Nous avons :

$$|x(t)| = |x(s)| \cdot \left| \exp\left(\int_s^t a(u)du\right) \right| = |x(s)| \exp\left(\operatorname{Re}\left(\int_s^t a(u)du\right)\right) = |x(s)| \exp\left(\int_s^t \operatorname{Re}(a(u))du\right).$$

Posons  $S = \sup_{u \in \mathbf{R}} \operatorname{Re}(a(u))$ , qui est strictement négatif par hypothèse. Prenons  $s, t$  deux réels avec  $t > s$ . Puisque  $s < t$  et que  $\operatorname{Re}(a(u)) \leq S$ , par intégration nous avons

$$\int_s^t \operatorname{Re}(a(u))du \leq \int_s^t Sdu \leq S(t-s).$$

On utilise ensuite la croissance de l'exponentielle puis que  $|x(s)| \geq 0$  pour obtenir :

$$|x(t)| \leq |x(s)| \exp(S(t-s)).$$

On peut donc prendre  $M = 1$  et  $\alpha = -S$  qui est bien strictement positif.

**(c)** Soit  $b = a - \mathcal{M}\{a\}$ . Alors  $b$  est  $T$ -périodique. De plus, ses primitives sont bornées en raison de la question **9** puisque :

$$\int_0^T (a(s) - \mathcal{M}\{a\})ds = \left(\int_0^T a(s)ds\right) - T\mathcal{M}\{a\} = 0.$$

Les primitives de  $b$  étant bornées, il en est de même de celles de  $u$

*mapsto*  $\operatorname{Re}(b(u))$ . Introduisons alors le réel  $C = \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \int_0^x \operatorname{Re}(b(u))du \right|$ . Par la relation de

Chasles, nous avons pour tous  $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ ,  $\left| \int_s^t \operatorname{Re}(b(u))du \right| \leq 2C$ . De plus,  $|x(t)| =$

$|x(s)| \exp\left(\int_s^t \operatorname{Re}(a(u))du\right)$ . On en déduit, en tenant compte du fait que  $s < t$  :

$$\int_s^t \operatorname{Re}(a(u))du = \int_s^t (\operatorname{Re}(b(u)) + \operatorname{Re}(\mathcal{M}\{a\}))du = \left(\int_s^t \operatorname{Re}(b(u))du\right) + \operatorname{Re}(\mathcal{M}\{a\})(t-s) \leq 2C + \operatorname{Re}(\mathcal{M}\{a\})$$

Finalemment :

$$|x(t)| \leq e^{2C} e^{\operatorname{Re}(\mathcal{M}\{a\})(t-s)} |x(s)|,$$

et donc nous avons l'hypothèse avec  $M = e^{2C}$  et  $\alpha = -\operatorname{Re}(\mathcal{M}\{a\})$ .

**36.** Les solutions de  $X' = AX$  sont de la forme  $X(t) = \exp((t-s)A)X(s)$ . Supposons  $t > s$  :

$$\|X(t)\| = \|\exp((t-s)A)X(s)\| \leq \|\exp((t-s)A)\|_{\mathcal{M}} \|X(s)\| \leq Ce^{-\alpha(t-s)} \|X(s)\|$$

avec les notations de l'énoncé, ce qui donne le résultat.

**37. (a)** La fonction nulle étant solution, l'unicité dans Cauchy-Lipschitz linéaire assure que toute solution non nulle en un point ne s'annule jamais. Pour  $t > 0$  nous avons :

$$\|X(t)\| \leq Me^{-\alpha t} \|X(0)\|,$$

et donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$ . Pour  $t < 0$  nous avons :

$$\|X(0)\| \leq Me^{\alpha t} \|X(t)\|,$$

et donc

$$\|X(t)\| \geq M^{-1}e^{-\alpha t}\|X(0)\|,$$

ce qui démontre que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|X(t)\| = +\infty$ . En particulier cette solution n'est pas bornée (ce qui est utile pour la question suivante).

- (b) Supposons que l'on ait deux solutions bornées  $X_1$  et  $X_2$ . Alors  $X = X_2 - X_1$  est une solution bornée de l'équation homogène, elle est donc nulle en vertu de ce qui précède, d'où  $X_1 = X_2$ .

38. (a) Tout d'abord, nous avons :

$$\|\exp((t-s)A)B(s)\| \leq Ce^{-\alpha(t-s)}\|B(s)\| \leq Ce^{-\alpha(t-s)}\|B\|_\infty,$$

et l'intégrale  $\int_{-\infty}^t Ce^{-\alpha(t-s)}\|B\|_\infty ds$  converge (sa valeur est  $\frac{C\|B\|_\infty}{\alpha}$ ), donc chacune des composantes  $\exp((t-s)A)B(s)$  est en valeur absolue majorée par  $\|\exp((t-s)A)B(s)\|$ , et définit par conséquent une intégrale (absolument) convergente, l'expression a donc un sens. De plus :

$$\|X_B(t)\| \leq \frac{C\|B\|_\infty}{\alpha}.$$

Par ailleurs, on peut écrire :

$$X_B(t) = \exp(tA) \int_{-\infty}^t \exp(-sA)B(s)ds$$

ce qui donne que  $X_B$  est dérivable par produit, de dérivée :

$$X'_B(t) = A \exp(tA) \int_{-\infty}^t \exp(-sA)B(s)ds + \exp(tA) \exp(-tA)B(t) = AX_B(t) + B(t).$$

Le résultat est donc démontré.

- (b) On propose  $y_B(t) = \int_{-\infty}^t \exp\left(\int_s^t a(u)du\right) B(s)ds$ . L'hypothèse (ES) assure que pour  $s < t$ , nous avons :

$$\int_s^t a(u)du \leq Me^{-\alpha(t-s)},$$

puisque  $t$

mapsto  $\int_s^t a(u)du$  est la solution du système homogène valant 1 au point  $s$ . De ce fait, on peut reproduire le raisonnement de la question précédente, ce qui démontre que  $y_B(t)$  a un sens pour tout  $t$ , que la fonction  $y_B$  est bornée (par exemple par la constante  $\frac{M\|B\|_\infty}{\alpha}$ ), et que  $y_B$  est solution.

39.  $A$  et  $B$  étant  $T$ -périodiques, si  $X$  est la solution bornée, on vérifie que  $X(\cdot + T)$  est également solution :

$$(X(t+T))' = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) + B(t+T) = A(t)X(t+T) + B(t).$$

Nous avons donc deux solutions bornées, ce qui assure par l'unicité des solutions bornées que  $X(\cdot + T) = X$ , c'est-à-dire que  $X$  admet  $T$  pour période.

40. L'existence et l'unicité des solutions bornées à  $X' = AX + B(t)$  pour toute  $B$  bornée est assurée par les questions **37(b)** et **38(a)**.

La question **39** assure que si  $B$  est périodique, il en est de même de  $X_B$ .

Supposons maintenant que  $B \in VectPer(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$ . Soit  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{C})$ , et  $B_1, \dots, B_p$  les composantes de  $B$ . Nous avons  $B = \sum_{i=1}^p B_i \varepsilon_i$ . De plus, chaque  $B_i$

s'écrit comme somme finie de fonctions périodiques :  $B_i = \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j}$  avec  $h_{i,j} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  est périodique.

Au final,  $B$  est une somme finie de fonctions  $h_{i,j} \varepsilon_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{C})$  toutes périodiques, nommons-les  $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_k$ . Chaque solution bornée  $Y_j$  de  $X' = AX + \tilde{B}_j(t)$  est donc périodique

(question **39**), et par linéarité du système et unicité de la solution bornée,  $X_B$  est égale à  $\sum_{j=1}^k Y_j$ ,

ce qui démontre que  $X_B \in VectPer(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$ .

Soit enfin  $B \in PP(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$ . Chaque composante de  $B$  est une limite uniforme d'une suite d'éléments de  $Vect(Per(\mathbf{R}, \mathbf{C}))$ ,  $B$  est donc limite d'une suite  $(B_n)_n$  d'éléments de  $Vect(Per(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{C})))$ , de sorte que  $X_{B_j} \in VectPer(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$  pour tout  $j$  en vertu de ce qui précède. Le calcul fait en **38(a)** démontre que :

$$\|X_B - X_{B_n}\|_{\infty} \leq \frac{C}{\alpha} \|B - B_n\|_{\infty},$$

ce qui démontre que  $B \in PP(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{C}))$ .

## Chapitre 4

# Rapport sur les épreuves orales

Les épreuves orales ont pour objectif « d'évaluer la capacité de concevoir, de mettre en œuvre et d'analyser l'enseignement d'une question mathématique donnée », ainsi que l'énonce l'arrêté définissant les épreuves du concours.

Elles supposent une solide préparation car il faut savoir, sur un sujet précis, rassembler et structurer ses connaissances en vue d'exposer les notions mathématiques afférentes, de proposer des applications et des exemples illustratifs, de sélectionner des exercices formateurs et adaptés. Pour cela, les candidats sont notamment encouragés à faire de nombreux exercices d'entraînement afin d'acquérir une familiarité et une aisance suffisantes avec les notions mathématiques qu'ils n'ont pas l'occasion d'enseigner. Il est également important de préparer des plans possibles pour les différents sujets proposés dont la liste est donnée au chapitre 5. À ce propos, il est vivement déconseillé d'utiliser sans recul les ouvrages livrant des leçons « prêtes à l'emploi ». d'une part, parce que le but de l'épreuve orale est précisément de montrer sa propre capacité à structurer l'exposé d'une question donnée, ce qui suppose souvent de comparer plusieurs ouvrages et de faire des choix réfléchis, d'autre part, parce que le jury connaît parfaitement ces ouvrages, ce qui l'amène souvent à s'assurer de la bonne maîtrise par les candidats des passages délicats et bien identifiés par lui.

Enfin, le jury attend du candidat qu'il montre sa capacité à s'engager dans un véritable échange scientifique, ouvert et constructif. Il est conseillé de se montrer attentif aux questions, d'explicitier ses pistes de recherche et le fil de son raisonnement mathématique. Au delà de la maîtrise des connaissances du programme, c'est bien la maîtrise des compétences mathématiques et professionnelles du candidat qui pourra ainsi être valorisée.

Le déroulement des épreuves orales de la session 2021 sera reconduit en 2022. En particulier, la bibliothèque de l'agrégation sera dorénavant disponible sous format numérique.

La liste des ouvrages disponibles lors de la session 2021 est la suivante :

<b>Auteurs</b>	<b>Titre</b>	<b>Editions</b>
Michel Alessandri	Thèmes de géométrie	Dunod
Mohamed Amine Ben Boubaker	L'indispensable en analyse pour les Spé MP et MP*	Calvage et Mounet
Michèle Audin	Géométrie	EDP Sciences
Gilles Bailly-Maitre	Arithmétique et cryptologie, (2e édition)	Ellipses
Philippe Barbe et Michel Ledoux	Probabilité	EDP Sciences
Danièle Beauquier, Jean Berstel, Philippe Chrétienne	Eléments d'algorithmique	Masson
Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré	Objectif agrégation, (2e édition)	H&K
Sylvie Benzoni-Gavage	Calcul différentiel et équations différentielles (2e édition)	Dunod
Thomas Blomme, Louise Gassot, Quentin Guignard et Bernard Randé	Les clefs pour l'oral MP Mathématiques, ENS-X, sessions 2016 et 2017	Calvage et Mounet
Philippe Caldero	Carnet de voyage en Algèbre	Université Lyon 1
Philippe Caldero et al.	Carnet de voyage en Analystan	IREM de Lyon
Philippe Caldero et Jérôme Germoni	Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1 (2e édition)	Calvage et Mounet
Hervé Carrieu	Probabilité	EDP Sciences
Alexandre Casamayou-Boucau, Pascal Chauvin et Guillaume Connan	Programmation en Python pour les mathématiques (2e édition)	Dunod
Marie-Line Chabanol Jean-Jacques Ruch	Probabilités et statistiques	Ellipses
Djalil Chafai, Pierre-André Zitt	Probabilités	préparation à l'agrégation interne
Laurent Claessens, Lilan Besson et Bertrand Desmons	Le Frido	
Jean-François Dantzer	Mathématiques pour l'agrégation - Analyse et probabilités (1e édition)	De Boeck Supérieur - Vuibert
Gérard Debeaumarché	Manuel de mathématiques, volume 1	Ellipses
Gérard Debeaumarché	Manuel de mathématiques, volume 2	Ellipses
Gérard Debeaumarché	Manuel de mathématiques, volume 3	Ellipses
Gérard Debeaumarché	Manuel de mathématiques, volume 4	Ellipses
Jean-Pierre Demailly	Analyse numérique et équations différentielles (4e édition)	EDP Sciences
Jean-Denis Eiden	Espaces vectoriels euclidiens	Calvage et Mounet
Jérôme Escoffier	Probabilités et statistiques (3e édition)	Ellipses
Jacques Faraut	Calcul Intégral	EDP Sciences
Francis Filbet	Analyse numérique (2e édition)	Dunod
Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas	Oraux X-ENS mathématiques. Algèbre. tome 1 (3e édition)	Cassini
Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas	Oraux X-ENS mathématiques. Algèbre. tome 2 (2e édition)	Cassini
Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas	Oraux X-ENS mathématiques. Algèbre. tome 3	Cassini
Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas	Oraux X-ENS mathématiques. Analyse. tome 1 (3e édition)	Cassini
Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas	Oraux X-ENS mathématiques. Analyse. tome 2 (2e édition)	Cassini

Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas	Oraux X-ENS mathématiques. Analyse. tome 3 (2e édition)	Cassini
Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas	Oraux X-ENS mathématiques. Analyse. tome 4	Cassini
Olivier Garet et Aline Kurtzmann	De l'intégration aux probabilités (2e édition)	Ellipses
Stéphane Gonnord et Nicolas Tosel	Topologie et analyse fonctionnelle	Ellipses
Xavier Gourdon	Les maths en tête - Algèbre (2e édition)	Ellipses
Xavier Gourdon	Les maths en tête - Analyse (3e édition)	Ellipses
Quentin Guignard, Bernard Randé	Les clefs pour l'oral MP Mathématiques, ENS-X, exercices de la session 2015	Calvage et Mounet
Daniel Guin et Thomas Hausberger	Algèbre I - Groupes, corps et théorie de Galois	EDP Sciences
Daniel Guin	Algèbre II - Anneaux, modules, et algèbre multilinéaire	EDP Sciences
Jacques Harthong	Cours d'analyse	
Bertrand Hauchecorne	Les contre-exemples en Mathématiques (2e édition)	Ellipses
Jean-Baptiste Hiriart-Urruty	Optimisation et analyse convexe	EDP Sciences
Wieslawa J. Kaczor et Maria T. Nowak	Problèmes d'analyse I - Nombres réels, suites et séries	EDP Sciences
Wieslawa J. Kaczor et Maria T. Nowak	Problèmes d'analyse II - Continuité et dérivabilité	EDP Sciences
Wieslawa J. Kaczor et Maria T. Nowak	Problèmes d'analyse III - Intégration	EDP Sciences
Eric Kouris	Une année de colles en math sup MPSI (2e édition)	Calvage et Mounet
Guy Laville	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
Laurent Le Floch et Frédéric Testard	Probabilités 1	Calvage et Mounet
François Liret	Maths en pratique	Dunod
Thierry Meyre	Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 1	Calvage et Mounet
Thierry Meyre	Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 2	Calvage et Mounet
Thierry Meyre	Séries, intégrales et probabilités	Université Paris Diderot
Denis Monasse	Cours de Mathématiques (5e édition)	spartacusIDH
Jean-Marie Monier	Algèbre 1, MPSI-PCSI-PTSI	Dunod
Jean-Marie Monier	Algèbre 2, MP-PSI-PC-PT	Dunod
Jean-Marie Monier	Algèbre et géométrie, MP	Dunod
Didier Müller	Introduction à la théorie des graphes	Cahiers de la CRM
Didier Müller	Introduction à la théorie des graphes, solutions des exercices	Cahiers de la CRM
Jean-Yves Ouvrard	Probabilités. tome 1 (2e édition)	Cassini
Alain Pommelet	Agrégation de mathématiques, cours d'analyse	Ellipses
Hervé Queffélec	Topologie (6e édition)	Dunod
Hervé Queffélec, Josette Charles, Mostafa Mbekhta	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs	Dunod
Hervé Queffélec et Claude Zuily	Analyse pour l'agrégation - Agrégation (5e édition)	Dunod
Jean-Pierre Ramis, André Warusfel et al.	Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 1 (3e édition)	Dunod
Jean-Pierre Ramis, André Warusfel et al.	Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 2 (3e édition)	Dunod
Jean-Pierre Ramis, André Warusfel et al.	Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 3	Dunod

Bernard Randé	Les clefs pour l'oral MP Mathématiques, ENS-X, session 2018	Calvage et Mounet
Jean-Étienne Rombaldi	Analyse matricielle (2e édition)	EDP Sciences
Jean-Étienne Rombaldi	Eléments d'analyse réelle (2e édition)	EDP Sciences
Jean-Étienne Rombaldi	Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie (1e édition)	De Boeck Supérieur
Jean-Étienne Rombaldi	Thèmes pour l'Agrégation de mathématiques (2e édition)	EDP Sciences
François Rouvière	Petit guide de calcul différentiel (4e édition)	Cassini
Georges Skandalis	Algèbre générale et algèbre linéaire	Calvage et Mounet, université Paris Diderot
Georges Skandalis	Analyse résumés et exercices	Calvage et Mounet, université Paris Diderot
Georges Skandalis	Topologie et Analyse (3e année)	Dunod
Patrice Tauvel	Analyse complexe pour la License 3	Dunod
Félix Ulmer	Théorie des groupes	Ellipses
Damien Vergnaud	Exercices et problèmes de cryptographie (3e édition)	Dunod

Chacune des deux épreuves comporte un temps de préparation de trois heures. Les candidats reçoivent une convocation aux épreuves d'admission mentionnant l'heure du début des opérations (accueil, consignes pratiques, vérification d'identité et tirage du sujet ; il est recommandé par sécurité de se présenter un quart d'heure avant), ainsi que l'heure de passage devant la commission d'oral pour chacune des deux épreuves qui ont lieu, sauf exception, sur deux jours consécutifs y compris dimanches et jours fériés. À leur première épreuve orale (épreuve d'exposé), les candidats tirent un couplage de deux sujets (au choix) qui relève soit du domaine de l'algèbre et géométrie soit du domaine de l'analyse et probabilités. Pour leur seconde épreuve orale (exemples et exercices), ils tirent un couplage de deux sujets (au choix) pris dans le domaine complémentaire (analyse et probabilités si le domaine de l'exposé était en algèbre et géométrie et vice-versa). Les candidats ont accès en salle de préparation à la bibliothèque numérique de l'agrégation ainsi qu'à d'autres ressources numériques : ouvrages numériques, programmes scolaires et documents ressources, derniers rapports du jury, programme du concours, photocopiés numériques<sup>1</sup>. Ils ont également la **possibilité d'apporter leurs propres ouvrages sous réserve que ces derniers soient commercialisés<sup>2</sup> avec un numéro ISBN et qu'ils ne comportent aucune annotation, aucun surlignage, aucun marque page etc.**, faute de quoi ils pourraient être suspectés de tentative de fraude. Les candidats sont invités à bien s'en assurer avant de rejoindre le centre d'épreuves. Le jury insiste sur ce point, quelques candidats ne respectent toujours pas cette consigne.

Dans la salle de préparation, chaque candidat dispose d'un espace numérique de travail avec les ressources et logiciels prévus (*cf. infra* 4.1.2). Pour cela, des identifiants de connexion lui sont communiqués lors du tirage des sujets. Tous les fichiers qu'il crée sont enregistrés sur le réseau et, sous réserve de s'être deconnecté avant de quitter la salle de préparation, le candidat peut les retrouver dans la salle de jury en se reconnectant au réseau.

## 4.1 Considérations générales

Il appartient aux candidats de bien prendre connaissance des conditions de passation de chacune des épreuves orales (*cf. infra*), et notamment du fait qu'elles sont structurées en trois temps bien distincts et limités en durée : un temps de présentation ou d'exposé (avec notes), un temps de développement (sans notes) et un temps réservé aux questions du jury. Pendant les deux premières parties, le jury n'intervient pas, sinon en comptable du temps.

Comme pour les épreuves écrites, le jury attire l'attention sur la rigueur mathématique attendue, les énoncés des théorèmes et des définitions doivent être précis et complets, les quantificateurs ou connecteurs logiques doivent être rigoureusement utilisés.

Par ailleurs il convient de lire très attentivement le sujet et de bien en délimiter le périmètre pour éviter aussi bien des oublis que des hors sujets.

### 4.1.1 Critères d'évaluation

Le jury fonde son évaluation sur un ensemble de critères variés permettant d'apprécier à leur juste valeur les prestations des candidats. Il est particulièrement attentif :

- à la maîtrise mathématique du sujet :
  - maîtrise des contenus afférents au sujet et cela au niveau attendu par le concours ;

---

1. Liste publiée à l'adresse suivante : <http://interne.agreg.org>

2. Les impressions de livres numériques ainsi que les photocopiés ne sont pas autorisés.

- exactitude et précision des énoncés des définitions, théorèmes ou propriétés ;
  - rigueur des démonstrations et des raisonnements logiques, mise en évidence de l'utilisation des hypothèses ; maîtrise des quantificateurs, de la logique ;
  - capacité à mobiliser ses connaissances mathématiques en vue de résoudre un problème ou d'expliquer un phénomène ;
  - mise en lien des différentes idées et notions évoquées ;
  - etc.
- à la pertinence de la présentation au regard du sujet donné :
    - bonne couverture du thème avec un réel contenu mathématique et sans hors sujets ;
    - niveau auquel le candidat choisit de se placer (un niveau trop élémentaire est sanctionné de même qu'un niveau trop élevé si mal maîtrisé) ;
    - cohérence du plan et des articulations entre les différentes parties et notions présentées ;
    - choix du développement proposé ;
    - diversité, richesse, progressivité des exercices retenus (ces derniers devant se compléter pour couvrir l'ensemble des problématiques du sujet) ;
    - etc.
  - aux qualités pédagogiques :
    - clarté de l'expression orale ;
    - clarté et cohérence des notations employées ;
    - capacité à motiver ses choix et ses actions, à expliquer clairement les raisons de sa démarche ;
    - gestion du temps ;
    - capacité à communiquer efficacement en se servant de différents supports (tableau, écran de projection) ;
    - présentation et gestion du tableau, organisation des calculs, etc.
    - capacités d'interaction avec le jury (écoute, réactivité, prise d'initiatives, capacité à mobiliser ses connaissances et à rectifier une erreur etc. ) ;
    - utilisation convaincante, le cas échéant, des outils numériques ;
    - etc.

#### 4.1.2 Usage des moyens informatiques

Les candidats trouvent en salle de préparation leur propre environnement numérique de travail. En amont des épreuves orales, ils peuvent se familiariser à cet environnement à l'adresse suivante :

<https://interne.agreg.org/agregOS/>.

L'enseignement des mathématiques nécessite l'utilisation d'outils informatiques, qu'il s'agisse de logiciels prêts à l'emploi ou d'algorithmes résolvant des problèmes de manière effective. Certaines tâches techniques (longs calculs, tracés de courbes, résolutions approchées de problèmes, etc.) sont facilitées par des logiciels spécialisés et certains logiciels interviennent couramment comme outils pédagogiques (représentation dynamique de situations géométriques, simulation d'expériences aléatoires etc...). L'enseignement d'algorithmique et de programmation fait partie intégrante des programmes de mathématiques au collège comme au lycée ; les professeurs de mathématiques enseignant en classes préparatoires ont vocation à s'impliquer dans l'enseignement d'informatique inscrit dans les maquettes des formations.

C'est dans cet esprit que des moyens informatiques sont mis à disposition pour les deux épreuves orales afin que les candidats puissent valoriser leurs compétences dans ce domaine. Une utilisation pertinente en est attendue.

La liste des logiciels disponibles peut être consultée sur le site du jury à l'adresse suivante : <http://interne.agreg.org>.

## 4.2 L'épreuve orale d'exposé

### 4.2.1 Déroulement de l'épreuve

L'épreuve orale d'exposé se déroule en trois temps :

- présentation du plan (durée maximale de **15 minutes**) ;
- développement d'un élément du plan choisi par le candidat (durée maximale de **15 minutes**) ;
- questions du jury (pour la **durée complémentaire de l'épreuve**).

### 4.2.2 Plan

Il s'agit de présenter les notions et les principaux résultats liés au sujet. C'est un exercice de synthèse qui suppose de savoir mettre en évidence les articulations entre les objets présentés et de bien faire ressortir les enchaînements d'idées. Ce ne doit pas être un catalogue de définitions et de résultats sans véritables liens entre eux.

Il est inutile de détailler les notations et définitions élémentaires et de trop s'attarder sur les prérequis, afin de disposer d'un temps suffisant pour aborder la partie consistante et centrale du sujet. S'il n'est pas nécessaire de tout écrire en détail, les théorèmes importants ou les propriétés centrales du sujet doivent être énoncés avec précision (hypothèses, quantificateurs existentiels ou universels ...).

Le plan doit être cohérent sur l'ordre de présentation des différentes notions ou théorèmes. Il doit refléter les capacités de synthèse que l'on est en droit d'attendre d'un professeur de mathématiques. Il faut savoir prendre du recul et souligner oralement les liens entre les différents résultats présentés. Il est très apprécié d'être capable de fournir des exemples et contre-exemples des propriétés ou théorèmes cités. En particulier, il convient d'avoir réfléchi aux réciproques des conditions nécessaires ou suffisantes énoncées dans le plan. De même, les candidats sont invités, lorsque c'est pertinent, à proposer des applications, même si cela n'est pas explicitement demandé dans le libellé du sujet.

Une motivation **pertinente**, même orale, des notions fondamentales introduites est bienvenue, tout comme les exemples qui permettent d'illustrer les résultats théoriques. Le jury apprécie toute application dans des domaines variés témoignant d'une solide maîtrise mathématique et d'une bonne culture scientifique du candidat.

### 4.2.3 Développement

Le développement consiste à détailler et exposer une situation mathématique significative et importante de la leçon (souvent la démonstration d'un théorème), et **figurant explicitement dans le plan**. À ce titre le candidat doit s'assurer qu'il a prévu dans son plan le moment adéquat pour écrire proprement l'énoncé du développement. Ce développement se fait **sans notes**, celles-ci pouvant être consultées occasionnellement avec l'accord du jury (par exemple pour vérifier une hypothèse ou une notation). Il permet au jury d'apprécier les compétences mathématiques du candidat et sa capacité à effectuer une présentation vivante, claire et maîtrisée d'une question. Le développement ne doit pas se limiter à la « récitation » d'une démonstration apprise par cœur. Le candidat doit au contraire montrer qu'il domine son sujet en présentant le canevas de la démonstration, en annonçant avec

précision les résultats intermédiaires qu'il cherche à établir et le type de raisonnement qu'il met en œuvre (raisonnement par l'absurde, par analyse-synthèse, par récurrence, etc.), en indiquant les moments où interviennent les hypothèses, etc. Il est également attendu une présentation rigoureuse (quantificateurs appropriés, hypothèses de récurrence précises...).

Le choix du développement revient au candidat et non aux examinateurs. Rappelons que ce choix est en soi un élément de l'évaluation. Le point développé doit être substantiel, consistant et au cœur du sujet. Il n'est pas admissible de démontrer un théorème en admettant l'essentiel du contenu mathématique de sa preuve dans un lemme énoncé dans le plan et en se contentant de faire de simples vérifications. Il est conseillé de s'assurer des démonstrations de bases relatives à un exposé : par exemple, sur une leçon sur le théorème des accroissements finis (216), faire un développement compliqué mais ne pas connaître les grandes lignes de la démonstration du théorème des accroissements finis ne fait un bon effet.

Le jury a également sanctionné dans la notation les candidats qui ont proposé la résolution d'un exercice élémentaire ou la présentation d'un exemple inconsistant. Ce n'est pas ce qui est attendu, outre le fait que cette pratique biaise la nature complémentaire des deux épreuves orales et pourrait s'interpréter comme une stratégie d'optimisation consistant à préparer des développements susceptibles d'être présentés aussi bien en exposé qu'en exercices. Enfin, certains candidats ont visiblement préparé des développements « passe-partout » qu'ils considèrent comme interchangeables entre plusieurs exposés mais qui s'avèrent souvent n'avoir qu'un lien très ténu avec le sujet choisi, ce qui est sanctionné par le jury.

#### 4.2.4 Niveau de la leçon

Il convient d'éviter deux écueils : celui de se placer à un niveau trop élémentaire et celui de vouloir traiter des questions que l'on ne maîtrise pas ou mal. Il appartient au candidat de proposer un exposé en adéquation avec le niveau du programme de l'agrégation interne, en retenant des notions, théorèmes et exemples qu'il maîtrise.

Par ailleurs, se placer d'emblée dans un cadre plus vaste que celui qui est précisé dans l'intitulé du sujet n'est pas recommandé car c'est prendre le risque de ne pas développer des particularités spécifiques à la question posée ou de traiter des parties « hors sujet », inévitablement sanctionnées par le jury. Il est préférable, si on le souhaite, d'étendre les résultats présentés en fin d'exposé.

#### 4.2.5 Questions du jury

Les questions du jury visent à s'assurer de la bonne compréhension et d'une maîtrise suffisante des notions présentées par le candidat. Les premières permettent souvent de corriger les éventuelles imprécisions ou erreurs figurant dans le plan ou dans le développement. Elles peuvent aussi consister à appliquer un résultat de la leçon sur un exemple proposé par le jury. Elles ne sont pas posées dans le but de piéger les candidats et ne nécessitent que très rarement de longs arguments. Si le candidat n'a pas proposé d'exemple ou de contre-exemple, cela pourra lui être demandé à ce moment là de l'épreuve. De même, le candidat doit s'attendre à ce que le jury lui demande des justifications, voire des démonstrations, de points ou notions qu'il aura exposés.

Les capacités de recherche et d'interaction du candidat avec le jury sont particulièrement évaluées lors de ce temps de l'épreuve. Réfléchir à haute voix, reformuler la question posée, se placer dans un cas particulier quand on ne voit pas comment traiter le cas général, s'aider de figures ou de schémas sont autant d'attitudes qui sont valorisées par le jury.

## 4.3 L'épreuve orale d'exemples et exercices

L'épreuve d'exemples et exercices consiste à présenter une sélection de situations particulières d'enseignement sur un thème donné. Le candidat témoigne ainsi de sa maîtrise mathématique du sujet et de sa réflexion pédagogique relative à son enseignement.

### 4.3.1 Déroulement de l'épreuve

En réponse au sujet qu'il a retenu, le candidat propose trois à six exercices ou exemples dont il rédige l'énoncé sur des feuilles pré-imprimées qui lui sont remises. À l'issue de la préparation, des photographies de ce document sont réalisées et remises aux examinateurs.

L'épreuve orale se déroule en trois temps :

- présentation motivée de l'ensemble des exercices ou exemples sélectionnés par le candidat (durée maximale de **10 minutes**) ;
- résolution commentée d'un des exercices ou exemples au choix du candidat parmi ceux qu'il vient de présenter (durée maximale de **15 minutes**) ;
- questions du jury (pour la **durée complémentaire de l'épreuve**).

L'épreuve n'est pas censée représenter une séance devant une classe de collège ou de lycée ; des objectifs plus ambitieux et un rythme plus soutenu doivent être adoptés sous réserve d'une bonne maîtrise des notions mathématiques sous-jacentes et d'une certaine qualité d'exposition.

L'attention des candidats est appelée sur les deux points suivants :

- la formulation d'un énoncé est un acte pédagogique et le candidat est invité à modifier ceux des ouvrages qu'il consulte, en fonction de l'objectif pédagogique qu'il se fixe. Ainsi, par exemple, des énoncés segmentés en de trop nombreuses questions ne demandant que des vérifications élémentaires ne sont pas adaptés à cette épreuve ;
- la démonstration d'une propriété du cours nécessite, si le candidat souhaite la proposer dans sa liste d'exercices ou d'exemples, un réel travail de transformation pédagogique pour qu'elle devienne un véritable exercice, au risque sinon de dévoyer le sens de cette épreuve en reprenant à l'identique des énoncés qui ont en fait toute leur place dans l'épreuve d'exposé.

Cette épreuve nécessite un important travail de préparation en amont car elle suppose une réflexion transversale préalable sur les notions figurant au programme afin de pouvoir en présenter des illustrations variées. Elle demande du recul et il ne faut pas s'étonner de voir le jury demander le schéma général de résolution d'un exercice proposé par le candidat, sans en demander tous les détails : cela suppose de bien maîtriser les mathématiques sous-jacentes et exclut en particulier la copie d'exercices trouvés à la hâte dans divers recueils.

### 4.3.2 Présentation motivée des exercices ou exemples

Il s'agit d'expliquer soigneusement les raisons qui ont conduit au choix des exercices et il est inutile de recopier les énoncés au tableau, le jury en disposant déjà. Motiver le choix d'une liste d'exercices, c'est en expliquer la pertinence par des raisons d'ordre pédagogique ou mathématique (l'un n'excluant pas l'autre), préciser les prérequis, situer les exercices dans leur contexte, commenter leur apport sur le plan pédagogique, etc.

Voici quelques éléments de motivations possibles :

**Objectif** : S'il est important d'indiquer à quel public s'adressent les exercices et ce qu'ils supposent connu de ce public, ceci doit être fait brièvement. Il faut également décrire quel est l'objectif de chaque exercice : illustration ou complément d'un résultat de cours, entraînement à une technique de calcul particulière, mise en évidence d'une propriété remarquable, etc. Insistons : cette présentation doit être concise.

**Niveau** : Les difficultés éventuelles d'un énoncé doivent être mises en évidence. Le souci de graduer ces difficultés ou d'aider à les surmonter par des indications appropriées ou des questions intermédiaires constitue un aspect possible de la présentation des exercices. Il est important d'indiquer l'apport mathématique de chaque exercice choisi.

**Compétences mathématiques** : L'explicitation d'une ou plusieurs des six compétences mathématiques travaillées dans les exercices est appréciée.

**Cohérence** : Les énoncés ne doivent pas constituer une collection hétéroclite, sans que jamais ne se dégage une quelconque méthode un peu générale : leur ensemble doit posséder un certain degré de cohérence, variable selon les sujets. Il serait bon que les candidats puissent dégager les idées, méthodes générales qui entrent en jeu même si elles sont illustrées dans les exercices sur des cas particuliers. Indiquer les connexions pouvant relier certains énoncés est une démarche appréciée, de même que l'indication de la place de ces exercices dans une séquence d'enseignement. Dans tous les cas, il faut s'assurer que les exercices retenus sont en adéquation avec le sujet proposé et « balayent » effectivement l'ensemble du sujet.

**Intérêt** : Un exercice peut apporter un éclairage particulier sur une notion ou laisser entrevoir un développement de celle-ci ou encore en donner une application pertinente. De tels critères peuvent être mis en avant pour justifier du choix d'un exercice. Il est d'ailleurs bon de citer les concepts ou théorèmes sous-jacents. Lorsqu'il existe diverses méthodes ou outils pour résoudre un problème donné, un exercice peut avoir pour objectif d'en comparer certaines, ne serait-ce que sur des exemples.

**Originalité** : Le choix d'un exercice ne doit pas se limiter au recyclage de quelques situations.

### 4.3.3 Résolution détaillée d'un exercice ou d'un exemple

À l'issue de la présentation des exercices, le candidat désigne un exercice ou exemple qu'il se propose de résoudre en détail. Insistons, comme pour l'épreuve d'exposé, sur le fait que ce choix revient au candidat et non aux examinateurs, et qu'il constitue un élément de l'évaluation. Au cours de cette phase, tout comme de la précédente, les examinateurs n'interviennent pas et le candidat doit faire preuve d'autonomie.

Il convient néanmoins de mettre en avant certaines erreurs ou maladresses à éviter.

Il est très maladroit, et pénalisant, de choisir de développer un premier exercice très élémentaire (la résolution est supposée durer quinze minutes), même si on a donné une liste progressive et substantielle.

Il convient d'éviter de présenter un exercice que le nombre pléthorique de questions intermédiaires viderait de sa substance et qui cantonnerait le candidat à une succession de tâches atomisées.

On rappelle que les candidats doivent être capables de fournir un énoncé correct des théorèmes qu'ils utilisent lors de la résolution de leurs exercices.

Les candidats doivent aussi s'assurer que les énoncés des exercices qu'ils proposent ne comportent pas d'erreurs.

#### 4.3.4 Questions du jury

Ces questions peuvent être de plusieurs sortes. Elles permettent souvent de corriger d'éventuels lapsus ou de mettre en évidence une faille dans la solution ou encore de s'assurer que le candidat a réellement saisi les divers aspects de la résolution (en examinant par exemple l'impact d'une modification des hypothèses sur le résultat annoncé). Il est bien souvent demandé au candidat de donner des précisions sur la résolution de l'exercice qu'il a proposé.

Le candidat doit s'attendre aussi à être interrogé, au moins partiellement, sur la résolution de **chacun des exercices** qu'il propose. À défaut d'une solution détaillée, il peut lui être demandé les méthodes utilisées ou les différents enchaînements de la résolution. Il est du plus mauvais effet de proposer un exercice que l'on ne sait absolument pas résoudre.

Par ailleurs, les examinateurs cherchent à déterminer si les notions apparaissant dans tel ou tel énoncé sont effectivement connues du candidat. En ce sens, un choix d'exercices trop ambitieux risque d'élever le niveau des questions posées. Il n'est pas recommandé d'évoquer des questions à propos desquelles on n'a aucun recul. Il est en revanche attendu une maîtrise du calcul.

Pour terminer, soulignons que les questions du jury n'ont en aucun cas pour but de déstabiliser le candidat. Elles visent simplement à cerner au mieux l'étendue de ses connaissances et compétences. Encore un fois, précisons que le jury attend un échange scientifique avec le candidat.

# Chapitre 5

## Liste des sujets d'oral

### Leçons d'algèbre et géométrie

- 101 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.
- 102 Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.
- 103 Anneau  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Applications.
- 104 Nombres premiers. Propriétés et applications.
- 106 PGCD dans  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{K}[X]$  où  $\mathbf{K}$  est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.
- 107 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs.
- 109 Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.
- 110 Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.
- 112 Changements de bases en algèbre linéaire et en algèbre bilinéaire. Applications.
- 113 Déterminants. Applications.
- 114 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications. Aspects algorithmiques.
- 117 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.
- 119 Utilisation des nombres complexes en géométrie.
- 120 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien. Applications.
- 121 Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cas d'un espace euclidien. Applications géométriques.
- 123 Isométries du plan affine euclidien, décomposition canonique. Applications.
- 125 Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, décomposition canonique. Applications.
- 128 Barycentres. Applications.
- 131 Applications affines en dimension finie. Propriétés et exemples.
- 137 Droites et cercles dans le plan affine euclidien.
- 142 Utilisation de groupes en géométrie.
- 143 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.
- 144 Notion de rang en algèbre linéaire et bilinéaire. Applications.
- 146 Coniques.
- 150 Diverses factorisations de matrices. Applications.

- 151 Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications. (On supposera connues les notions de valeurs propres, vecteurs propres et sous-espace propres).
- 155 Systèmes d'équations linéaires. Applications.
- 156 Valeurs propres. Recherche et utilisation.
- 158 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 159 Algorithme d'Euclide dans  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{K}[X]$  où  $\mathbf{K}$  est un corps commutatif. Calcul de PGCD et de coefficients de Bézout. Applications.
- 163 Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.
- 165 Idéaux d'un anneau commutatif. Exemples.
- 166 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
- 167 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
- 168 Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients-racines.
- 169 Structures quotients dans divers domaines de l'algèbre. Applications.
- 170 Méthodes de chiffrement ou de codage. Illustrations.

## Leçons d'analyse et probabilités

- 201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. On pourra proposer des applications.
- 202 Séries à termes réels positifs. On pourra proposer des applications.
- 203 Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence. (Les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs sont supposés connus).
- 204 Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications.
- 205 Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation des fonctions.
- 206 Parties compactes de  $\mathbf{R}^n$ . Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications.
- 207 Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.
- 208 Théorèmes de points fixes.
- 209 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.
- 210 Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
- 212 Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples.
- 213 Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques et hyperboliques, nombre  $\pi$ .
- 215 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
- 216 Théorèmes des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles. Applications.
- 217 Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
- 218 Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.
- 219 Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.
- 220 Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur.
- 221 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de  $\mathbf{R}$  (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples.

- 223** Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.
- 224** Équations différentielles linéaires d'ordre deux :  $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ , où  $a, b, c$  sont des fonctions continues sur un intervalle de  $\mathbf{R}$ , à valeurs réelles ou complexes.
- 225** Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples.
- 227** Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . Exemples.
- 228** Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles.
- 229** Suites de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale.
- 230** Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Covariance. Exemples.
- 231** Espérance, variance ; loi faible des grands nombres. Applications.
- 232** Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.
- 235** Exponentielles de matrices. Applications.
- 237** Construction de l'intégrale et lien avec les primitives.
- 241** Diverses notions de convergence en analyse et en probabilités. Exemples et applications. (Les définitions des notions de convergence sont supposées connues).
- 244** Inégalités en analyse et en probabilités. Par exemple : Cauchy-Schwarz, Markov, Bessel, convexité. . .
- 249** Loi normale en probabilités et statistiques.
- 251** Diverses méthodes de résolution approchée d'une équation numérique ou d'une équation différentielle.
- 254** Algorithmes d'approximation du nombre  $\pi$ .
- 256** Vitesse de convergence. Méthodes d'accélération de convergence.
- 257** Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels, ...
- 258** Couples de variables aléatoires possédant une densité. Covariance. Exemples d'utilisation.
- 260** Variables aléatoires discrètes, couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples d'application.
- 262** Étude métrique des courbes planes.
- 263** Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
- 264** Fonctions développables en série entière. Exemples et applications. (Les résultats relatifs aux séries entières sont supposés connus).
- 265** Inversion locale, difféomorphismes. Applications.
- 266** Applications linéaires continues, normes associées. Exemples.
- 267** La fonction Gamma.

## Exemples et exercices d'algèbre et géométrie

- 301** Exercices sur les groupes.
- 302** Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans  $\mathbf{Z}$ .
- 304** Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.
- 305** Exercices illustrant l'utilisation des nombres premiers.
- 306** Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM.
- 307** Exercices faisant intervenir des dénombrements.
- 309** Exercices faisant intervenir des polynômes et fractions rationnelles. On pourra se limiter aux corps de base  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

- 310** Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
- 311** Exercices illustrant l'utilisation de la notion de rang.
- 312** Exercices illustrant l'utilisation des matrices inversibles.
- 313** Exercices illustrant l'utilisation de systèmes d'équations linéaires.
- 314** Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.
- 315** Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.
- 317** Exercices sur les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables.
- 319** Exercices faisant intervenir des décompositions de matrices.
- 321** Exercices faisant intervenir la réduction des matrices symétriques réelles dans des domaines variés.
- 322** Exercices sur les formes quadratiques.
- 323** Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.
- 325** Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimensions 2 et 3.
- 326** Exercices faisant intervenir la notion de barycentre ou d'application affine.
- 328** Exemples d'utilisation de transformations en géométrie.
- 330** Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimensions 2 et 3.
- 334** Exercices sur les coniques.
- 339** Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.
- 340** Exercices faisant intervenir des groupes en géométrie.
- 345** Exercices sur les polygones.
- 346** Exemples de problèmes modélisés par des graphes.
- 348** Exercices illustrant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices.
- 350** Exercices faisant intervenir des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice.  
Aspects algorithmiques.
- 351** Exercices faisant intervenir des polynômes irréductibles.
- 353** Exercices utilisant la notion d'endomorphisme nilpotent.
- 354** Exercices sur les cercles et les sphères.
- 355** Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux.
- 356** Exercices utilisant les permutations d'un ensemble fini.
- 357** Exercices utilisant le corps  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ .

## Exemples et exercices d'analyse et probabilités

- 402** Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.
- 403** Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.
- 404** Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.
- 405** Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
- 407** Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.
- 408** Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.
- 409** Exemples d'utilisation de polynômes en analyse.
- 410** Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.
- 411** Exemples d'étude de fonctions définies par une série.
- 412** Exemples de développement d'une fonction en série entière. Applications.

- 413 Exemples d'applications des séries entières.
- 414 Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.
- 415 Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.
- 417 Exemples illustrant l'approximation de fonctions numériques.
- 418 Exemples d'utilisation de développements limités de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 421 Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Aspects algorithmiques.
- 422 Exemples d'étude d'intégrales impropres.
- 423 Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.
- 426 Exemples d'utilisation d'intégrales simples et multiples : calculs de longueurs, d'aires, de volumes, ...
- 427 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
- 428 Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires.
- 429 Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires.
- 430 Exemples d'étude et de résolution d'équations différentielles issues de domaines variés (sciences expérimentales ou autres sciences).
- 431 Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles.
- 432 Exemples d'approximations d'un nombre réel. Aspects algorithmiques.
- 434 Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.
- 435 Exemples de modélisations de situations réelles en probabilités.
- 436 Exemples d'applications de l'intégration par parties.
- 437 Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.
- 438 Exemples de problèmes de dénombrement. Utilisation en probabilités.
- 439 Exemples d'étude d'applications linéaires continues et de leur norme.
- 440 Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).
- 443 Exemples de méthodes et d'algorithmes de résolution approchée d'équations  $F(X) = 0$ ,  $X$  désignant une variable réelle ou vectorielle.
- 444 Exemples de calcul approché de la limite d'une suite, de la somme d'une série. Aspects algorithmiques.
- 447 Exemples d'équations fonctionnelles.
- 448 Exemples d'estimation en statistiques : estimation ponctuelle, estimation par intervalles de confiance.
- 449 Exemples d'équations différentielles non linéaires.
- 451 Exemples d'applications des transformées de Fourier et de Laplace.
- 452 Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites.
- 453 Exercices illustrant l'utilisation de la loi binomiale en probabilités et en statistiques.
- 454 Exemples d'applications de la notion de compacité.
- 455 Exemples d'étude qualitative d'équations différentielles ou de systèmes différentiels.