MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Rapport du jury

Concours : Agrégation interne et CAERPA

Section : Mathématiques

Session 2022

Rapport de jury présenté par :
Françoise FLICHE
Inspectrice générale de l'éducation du Sport et de la recherche (IGÉSR),
Présidente du jury#

Table des matières

Chapitre 1

Généralités et statistiques

1.1 Déroulement de la session 2022, programme de la session 2023

Les épreuves écrites ont eu lieu les 27 et 28 janvier 2022, la liste d'admissibilité a été signée le 12 mars 2022 avec :

- agrégation interne : 360 admissibles ;
- CAERPA : 46 admissibles.

Les épreuves orales se sont déroulées du 23 au 2 mai 2022, dans les locaux de l'université Paris Cité, bâtiment Sophie Germain, à Paris 13ème.
Le jury remercie chaleureusement l'université pour son accueil qui permet, depuis plusieurs années, une passation sereine des oraux.

La liste d'admission a été signée le 3 mai 2021 avec l'inscription de :

- agrégation interne : 160 admis ;
- CAERPA : 20 admis.

Tous les postes mis au concours de l'agrégation interne et du CAERPA ont été pourvus.
Le programme du concours pour la session **2023** est publié sur le site DevenirEnseignant à l'adresse suivante :
https://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid100820/les-programmes-des-concours-enseignants-second
html

1.2 Historique des concours (nombre de postes, d'admissibles ...)

Agrégation interne

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
2003	130	1842	1479	288	130
2004	130	1813	1382	287	130
2005	138	1897	1401	311	138
2006	110	2172	1599	273	110
2007	107	2198	1627	267	107
2008	107	2195	1682	257	107
2009	107	2124	1559	258	107
2010	114	2229	1426	267	114
2011	116	2442	1359	263	116
2012	125	2324	1589	281	125
2013	135	2266	1510	303	135
2014	130	2290	1495	302	130
2015	145	2317	1501	332	145
2016	148	2299	1510	333	148
2017	155	2248	1349	329	155
2018	155	2090	1280	330	155
2019	160	2071	1251	340	160
2020	165	1967	1250	358	165
2021	160	1951	1212	360	160
2022	160	1886	1183	360	160

CAERPA

Année	Contrats	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
2003	20	325	258	27	15
2004	24	311	241	21	9
2005	19	297	211	27	12
2006	19	329	240	18	13
2007	20	319	221	11	5
2008	15	356	258	22	11
2009	14	305	212	26	12
2010	12	346	207	17	8
2011	11	427	213	19	11
2012	13	350	228	29	13
2013	18	320	201	35	18
2014	19	317	217	32	14
2015	20	322	203	34	12
2016	13	335	214	35	13
2017	16	338	200	47	16
2018	17	353	205	55	17
2019	18	354	211	53	18
2020	19	303	199	56	19
2021	18	316	184	40	18
2022	20	300	187	45	20

1.3 Statistiques

1.3.1 Répartition femmes-hommes

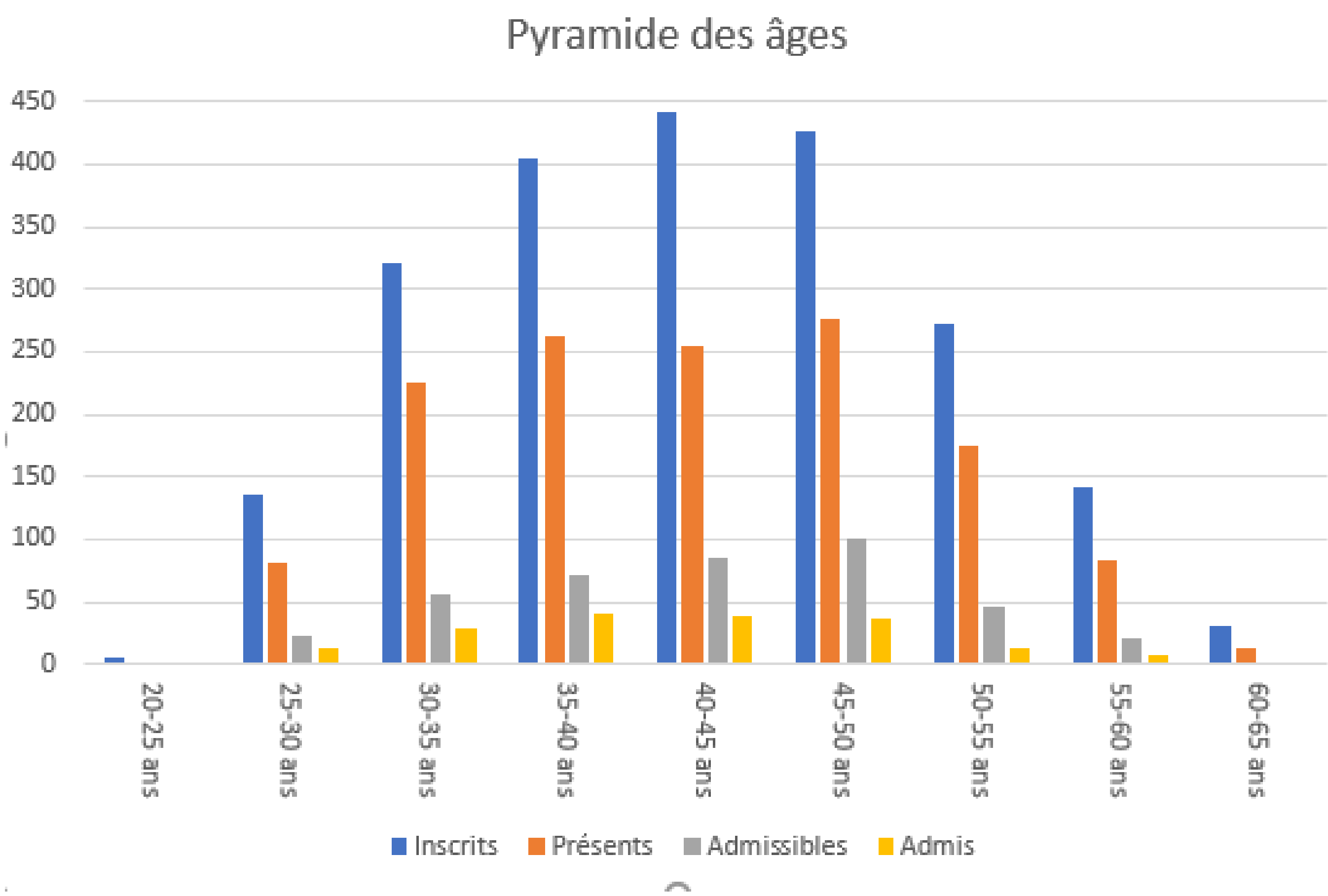
Pour l'ensemble des deux concours, les femmes représentent 34,6% des inscrits et des présents. Cette part baisse significativement lors de l'admissibilité (31%), mais remonte singulièrement lors de l'admission puisque près de 39% (40,6% pour l'agrégation interne) des admis sont des femmes.

	Total deux concours			Agrégation interne			CAERPA		
	Femmes	Hommes	Total	Femmes	Hommes	Total	Femmes	Hommes	Total
Inscrits	757	1429	2186	644	1242	1886	113	187	300
Présents	476	900	1376	408	781	1189	68	119	187
Admissibles	126	280	406	113	247	360	13	33	46
Admis	70	110	180	65	95	160	5	15	20

1.3.2 Répartition par âge

Pour l'ensemble des deux concours, l'âge moyen des candidats présents est 42,8 ans et celui des admis est 41,2 ans. Ainsi, conformément à leur vocation, les concours internes de l'agrégation s'adressent principalement à des professeurs confirmés dans leur carrière, comme l'attestent le graphique et le tableau suivants.

	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis		
	Total	Total	Total	Total	Public	Privé
20-25 ans	6	1	0	0	0	0
25-30 ans	136	82	23	14	11	3
30-35 ans	321	225	56	28	24	4
35-40 ans	404	263	72	40	37	3
40-45 ans	441	254	86	39	36	3
45-50 ans	427	277	100	37	34	3
50-55 ans	273	174	47	13	9	4
55-60 ans	141	83	20	8	8	0
60-65 ans	30	14	2	1	1	0
Moyenne	42,8	42,6	42,7	41,2	41,4	40,3
Plus jeune	22,8	24,2	26,1	26,1	26,1	27,9
Plus vieux	66,4	66,1	63,3	63,3	63,3	54,8



1.3.3 Répartition par profession

Ce sont essentiellement les professeurs certifiés qui sont reçus à l'agrégation interne (environ 92% des admis lors de cette session). Quant au CAERPA, les lauréats sont exclusivement des CAER titulaires.

Agrégation interne

Professions	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AGREGE	37	14	5	2
CERTIFIE	1651	1071	331	147
CHAIRE SUPERIEURE	1	1	1	0
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	10	6	3	1
INSTITUTEUR	1	0	0	0
MILITAIRE	5	3	3	1
PEGC	1	1	0	0
PEPS	1	0	0	0
PERS ADM ET TECH MEN	1	0	0	0
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	53	33	5	4
PERS FONCT TERRITORIALE	2	0	0	0
PERS FONCTION PUBLIQUE	25	10	4	2
PLP	74	44	7	3
PROFESSEUR ECOLES	22	6	1	0
TOTAL	1886	1189	360	160

CAERPA

Professions	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
CONT ET AGREE REM INSTITUTEUR	9	4	1	0
MAITRE CONTR.ET AGREE REM MA	23	8	0	0
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	268	175	45	20
TOTAL	300	187	46	20

1.3.4 Répartition par académie

Agrégation interne

Académies	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	99	63	15	5
AMIENS	47	33	9	2
BESANCON	25	16	3	2
BORDEAUX	80	48	20	12
CAEN	37	25	8	5
CLERMONT-FERRAND	24	17	9	5
CORSE	7	4	1	1
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	434	272	87	35
DIJON	31	27	11	6
GRENOBLE	74	42	12	6
GUADELOUPE	35	20	3	2
GUYANE	13	4	0	0
LA REUNION	55	32	7	4
LILLE	103	61	21	10
LIMOGES	25	20	5	1
LYON	73	54	19	10
MARTINIQUE	24	15	5	3
MAYOTTE	9	4	0	0
MONTPELLIER	76	41	12	9
NANCY-METZ	71	48	11	5
NANTES	75	42	10	2
NICE	80	51	13	5
NOUVELLE CALEDONIE	11	6	2	0
ORLEANS-TOURS	71	44	14	4
POITIERS	46	25	10	5
POLYNESIE FRANCAISE	10	10	1	0
REIMS	32	27	9	5
RENNES	53	35	12	2
ROUEN	52	36	9	3
STRASBOURG	54	38	11	6
TOULOUSE	60	29	11	5
TOTAL	1886	1189	360	160

CAERPA

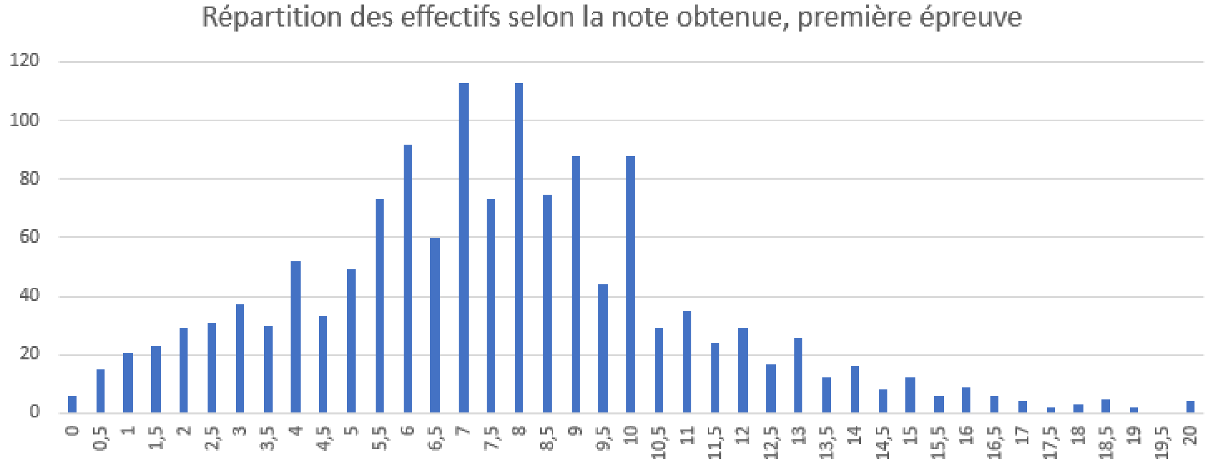
Académies	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	15	11	0	0
AMIENS	3	1	0	0
BESANCON	0	0	0	0
BORDEAUX	10	5	1	1
CAEN	6	5	2	1
CLERMONT-FERRAND	7	5	1	1
CORSE	0	0	0	0
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	68	46	9	5
DIJON	1	0	0	0
GRENOBLE	11	6	1	0
GUADELOUPE	2	1	0	0
GUYANE	1	1	0	0
LA REUNION	5	1	0	0
LILLE	26	19	2	1
LIMOGES	3	0	0	0
LYON	22	14	5	4
MARTINIQUE	1	1	0	0
MAYOTTE	0	0	0	0
MONTPELLIER	9	6	2	0
NANCY-METZ	8	5	3	0
NANTES	20	11	3	1
NICE	8	3	2	1
NOUVELLE CALEDONIE	1	1	0	0
ORLEANS-TOURS	6	1	0	0
POITIERS	5	4	1	0
POLYNESIE FRANCAISE	6	5	0	0
REIMS	2	2	0	0
RENNES	23	15	5	1
ROUEN	5	3	2	1
STRASBOURG	9	5	1	0
TOULOUSE	17	10	6	3
TOTAL	300	187	46	20

1.3.5 Répartition des notes d'écrit

Pour la session 2022, la barre d'admissibilité a été fixée à 88 points sur 200 pour l'agrégation interne et à 102 pour le CAERPA (la note de chacune des deux épreuves étant rapportée sur 100). Le nombre d'admissibles rapporté au nombre des postes offerts est identique pour les deux concours.
Les histogrammes ci-dessous montrent la répartition des effectifs en fonction des notes sur 20 attribuées à chacune des deux épreuves.

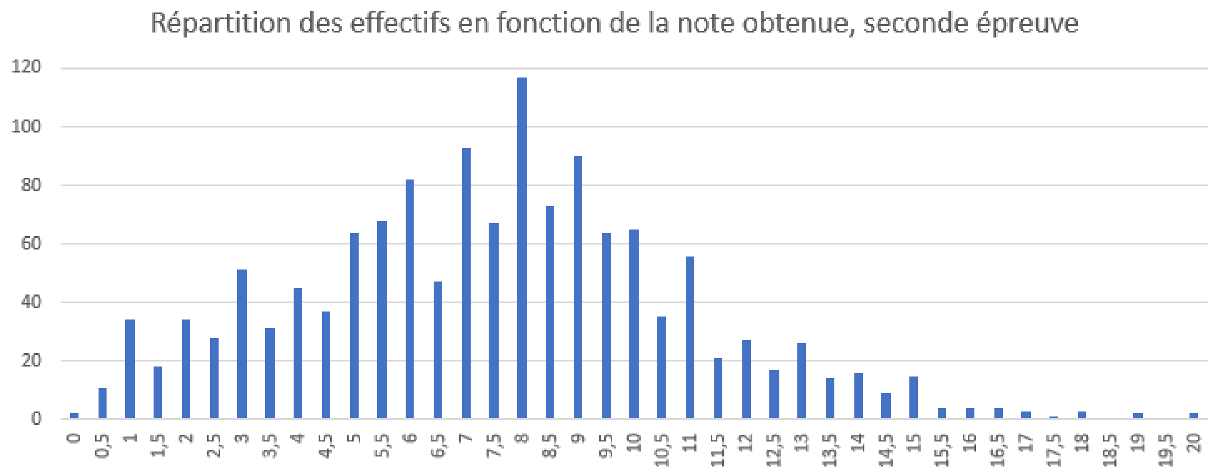
Histogramme des notes (sur 20) attribuées à l'épreuve 1

Moyenne	Écart type	Minimum	1er quartile	Médiane	3e quartile	Maximum
7,40	3,53	0	5,40	7,20	9,40	20



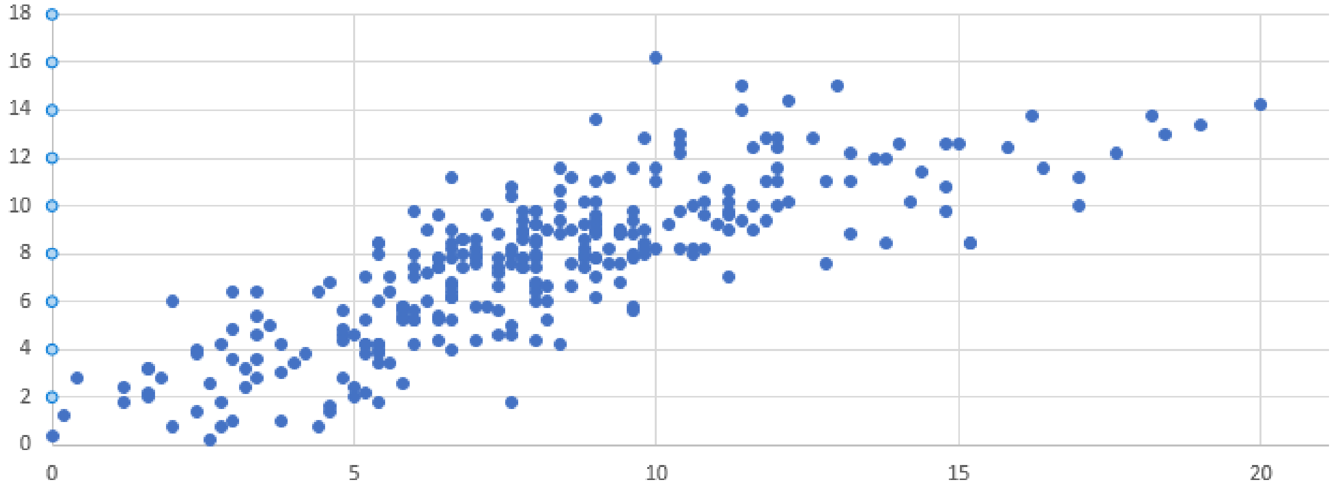
Histogrammes des notes (sur 20) attribuées à l'épreuve 2

Moyenne	Écart type	Minimum	1er quartile	Médiane	3e quartile	Maximum
7,29	3,44	0	5	7,40	9,40	20



Nuage des notes d'écrit

Chaque candidat présent à l'écrit est repéré par le couple des notes (sur 20) qu'il a obtenues respectivement aux épreuves 1 et 2.

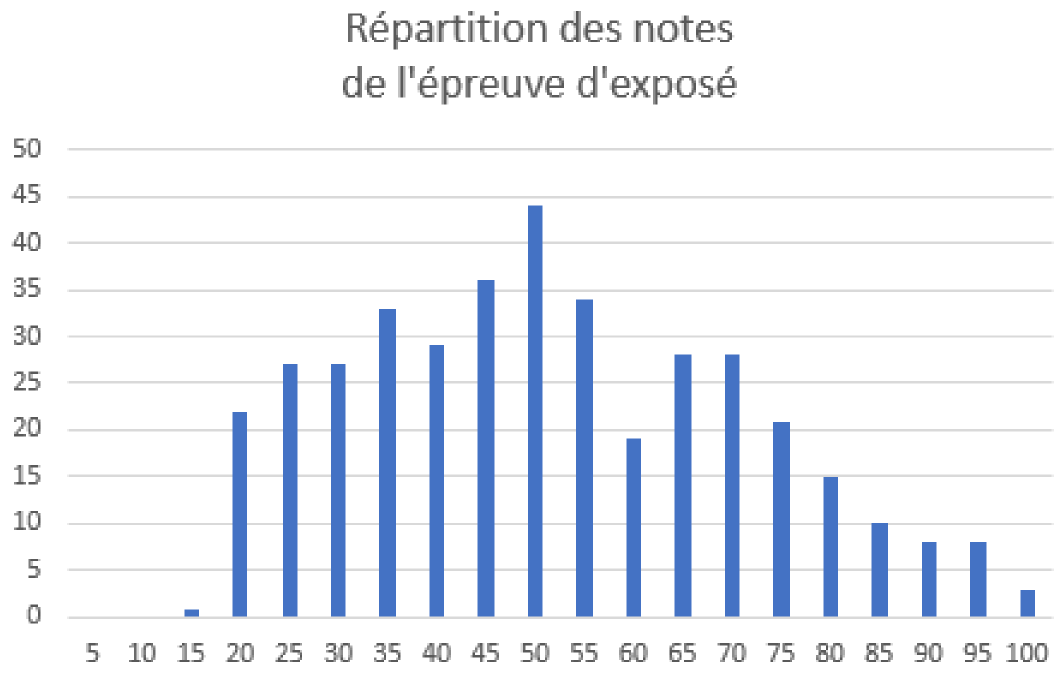


1.3.6 Répartition des notes d'oral

En rapportant la note de chacune des quatre épreuves sur 100 points, la barre d'admission (c'est-à-dire le total des points du dernier admis) a été cette année de 211 points pour le concours de l'agrégation interne et de 230 points pour le CAERPA.
Ces barres sont supérieures à celles observées en 2021 et reflètent un meilleur niveau de préparation à l'oral, comparable à celui d'avant la crise sanitaire, ce dont le jury se réjouit.

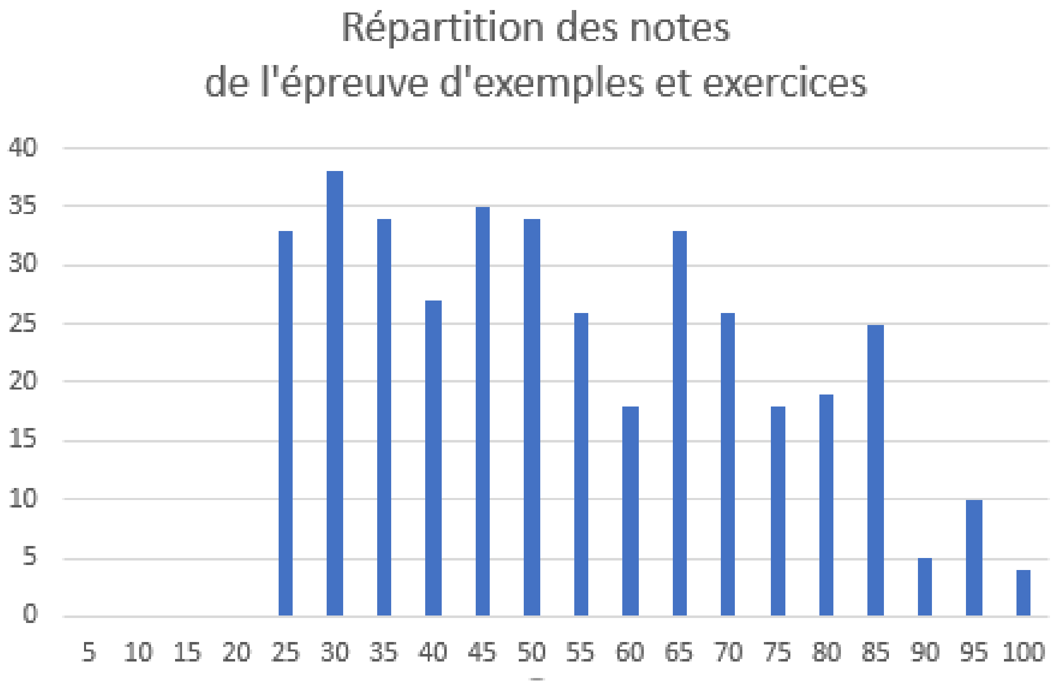
Histogramme des notes (sur 100) attribuées à l'épreuve d'exposé

	Total	Public	Privé
Moyenne	49,9	49,8	50,6
Ecart-type	19,7	19,8	19,5
Quartile 1	34	34	35,25
Médiane	48	48	47,5
Quartile 3	65	65	63,25



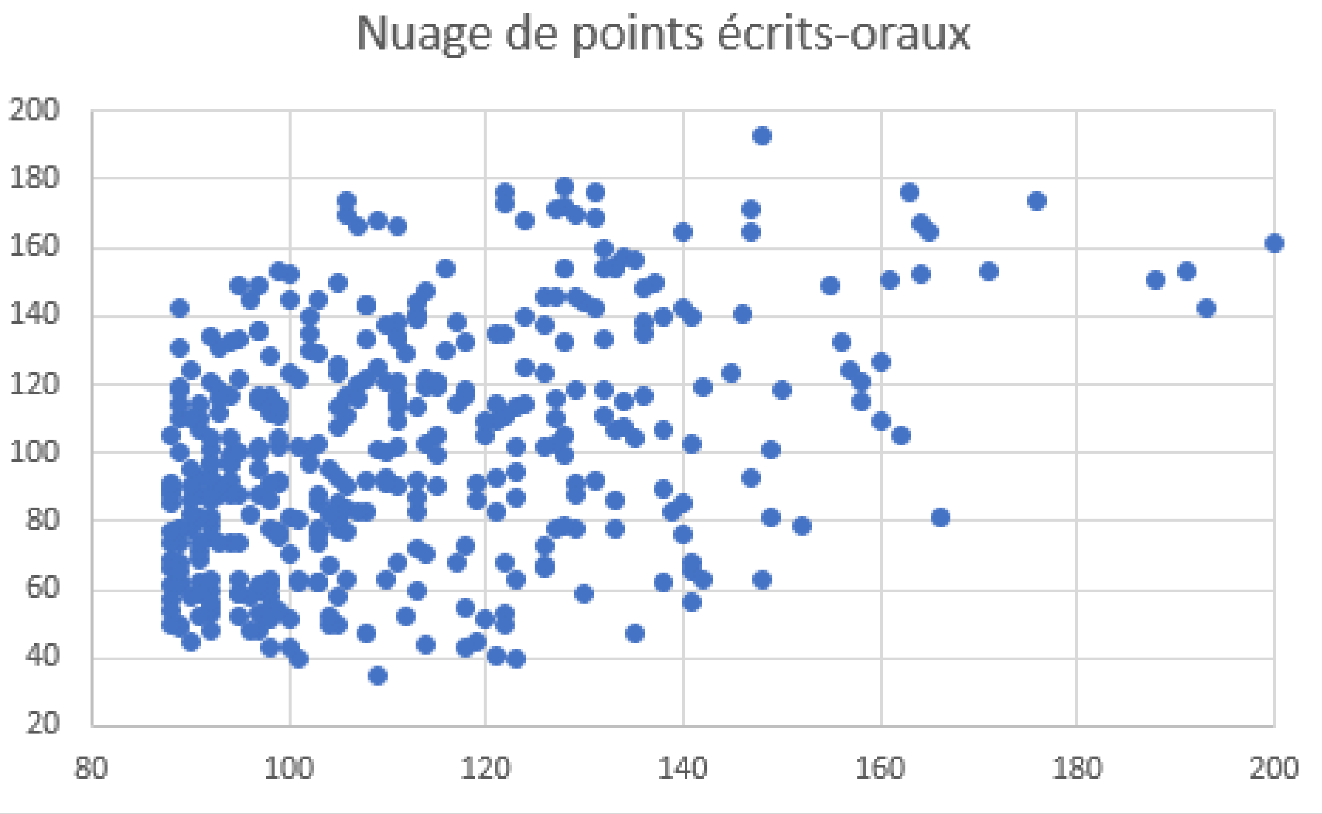
Histogrammes des notes (sur 100) attribuées à l'épreuve d'exemples et exercices

	Total	Public	Privé
Moyenne	51,4	51,3	52,3
Ecart-type	21	21,1	20,6
Quartile 1	33,25	33	35,25
Médiane	49	49	51
Quartile 3	67	67	67,75


Répartition des notes
de l'épreuve d'exemples et exercices
40
35
30
25
20
15
10
5
0
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100

Nuage des notes d'écrit et d'oral

Le graphique ci-dessous, dans lequel chaque candidat présent à l'oral est repéré par le couple des totaux obtenus respectivement à l'écrit et à l'oral (sommes respectives des notes sur 100 obtenues aux deux épreuves écrites et aux deux épreuves orales), souligne toute l'importance qui s'attache à une solide préparation de l'oral. On observe ainsi que certains candidats avec un bon niveau à l'écrit ne sont pas admis et qu'*a contrario* des candidats proches de la barre d'admissibilité à l'écrit sont reçus grâce à de bonnes prestations orales. Le coefficient de corrélation entre les notes d'écrit et celles d'oral est égal à 0,40.



Chapitre 2

Rapport sur les épreuves écrites

L'arrêté définissant le concours dispose que les épreuves écrites « ont pour objectif d'évaluer la maîtrise des connaissances mathématiques et la capacité de les mobiliser pour étudier des situations, ainsi que la solidité, sur le plan scientifique, des acquis professionnels ».

Aussi, une bonne connaissance d'un minimum d'outils théoriques est-elle indispensable à la réussite de ces épreuves, ce qui suppose un travail de préparation visant la maîtrise des théorèmes fondamentaux. Il est conseillé de travailler les preuves élémentaires qui, outre l'assimilation du programme, permettent de résoudre un bon nombre de questions en début de problème. Un entraînement régulier à la résolution de problèmes permet d'acquérir de bons réflexes intellectuels.

Il est attendu dans les copies les qualités exigibles d'un professeur de mathématiques, à savoir :

- le soin, la clarté de l'expression, la lisibilité de la présentation ainsi qu'une certaine attention à l'orthographe ;
- l'utilisation de quantificateurs appropriés. Trop nombreuses sont les copies dans lesquelles les démonstrations ne comportent aucun quantificateur. Ce manque de rigueur dans les preuves est à corriger ;
- la rigueur de la rédaction : choisir de façon pertinente les articles utilisés (singulier ou pluriel, défini ou indéfini) ; citer clairement les théorèmes ou résultats invoqués, en vérifier les hypothèses et s'abstenir de citer des hypothèses sans rapport avec le théorème ;
- la maîtrise des techniques usuelles de démonstration : raisonnement par équivalence, raisonnement par analyse-synthèse, démonstration par récurrence, par l'absurde, par contraposée etc. ;

Quelques conseils de méthode :

Avant de se lancer dans la résolution de la première question, a fortiori avant de commencer sa rédaction, il est recommandé aux candidats de prendre le temps de lire l'énoncé dans son intégralité afin d'identifier les thèmes abordés, de repérer la progressivité des questions et les notions nouvelles qui sont introduites. Cela permet en général de fixer un cadre clair dans lequel se situe l'épreuve. Cela évite en outre à un moment donné la "démonstration" de résultats manifestement en contradiction avec une question ultérieure.
Il est profitable de "prendre en main" les hypothèses des questions, par exemple en les notant au brouillon dans la phase de recherche. Cela clarifie le but à atteindre. Trop de candidats partent d'emblée sur des pistes qui ne peuvent aboutir en cherchant ce qui est déjà donné, sans objectif clair, ou encore sans recul par rapport aux (nouveaux) objets manipulés. Répétons-le : un objectif à atteindre clairement identifié est une condition nécessaire à la bonne résolution d'une question de

mathématiques.
Il convient notamment de rappeler que les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sont des connecteurs logiques et qu'il est incorrect de les utiliser comme des abréviations.
Il est aussi apprécié que les candidats expliquent leur démarche, concluent les questions et accompagnent, si c'est pertinent, leurs démonstrations de figures, schémas ou autres illustrations géométriques.

2.1 Première épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
https://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep1/22-ep1.pdf

2.1.1 Statistiques de réussite

Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions.

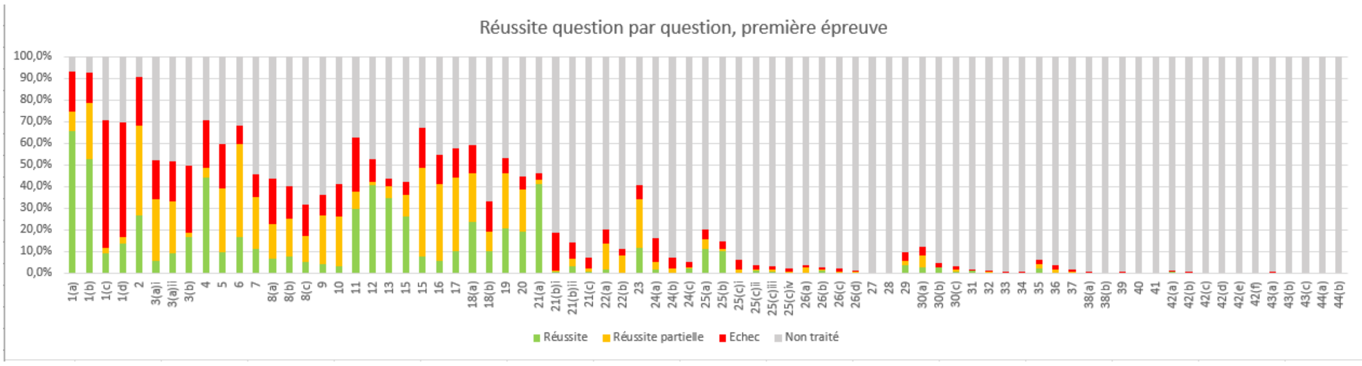


FIGURE 2.1 – Lecture : pour chaque question (ou item de correction lorsque plusieurs composantes sont évaluées dans une même question), la zone verte indique le pourcentage de candidats ayant fourni une bonne réponse, la zone orange représente le pourcentage de ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone rouge correspond aux réponses erronées.

2.1.2 Analyse de l'épreuve et commentaires par questions

Présentation du problème
Le sujet de la première épreuve écrite de l'agrégation interne 2022 portait sur la recherche de solutions non nulles, sous la forme de matrices, d'équations d'inconnues X, Y et Z de la forme $X^n + Y^n = Z^n$ avec n un entier strictement positif. Après un exercice " vrai ou faux" et un exercice préliminaire portant sur une démonstration du théorème de Cayley Hamilton, les différentes parties du problème traitent de la résolution de l'équation matricielle dans différents espaces de matrices.

Dans l'ensemble, les copies sont, fort heureusement, très rarement indigentes. Cependant, la rédaction manque trop souvent de rigueur mathématique. De plus, les objets faisant l'objet de calculs ou de raisonnements ne sont pas systématiquement définis. Les définitions de base et les structures fondamentales ne sont pas connues.
Les démonstrations d'équivalences, tout comme les démonstrations par récurrence, sont trop souvent incorrectement rédigées. L'utilisation des résultats de cours est très souvent laborieuse et souffre d'un manque de vérification des hypothèses.

Dans leurs copies, les candidats se lancent trop souvent dans des calculs longs et inadaptés ; il serait préférable de privilégier la recherche de méthodes adaptées à la résolution des questions. Plus généralement, une lecture attentive du sujet serait sans doute utile aux candidats.
Comme cela était rappelé dans le sujet, les premières questions du sujet nécessitent un soin particulier et les calculs doivent être détaillés.

Dans la suite, on donne des remarques détaillées pour certaines questions. Le plus souvent, on mentionne les erreurs les plus courantes et les écueils de rédaction.

Vrai ou faux ?

1a. Certains candidats se contentent de ne traiter que le cas $n = 2$. Plus généralement, il est préférable d'éviter de maladroitement nommer $m_{i,j}$ les coefficients d'une matrice notée A.

1b. Ici, on ne peut pas se contenter de l'affirmation $\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{Tr}\,(M)X + \det(M)$. Cette égalité doit être démontrée et l'équivalence demandée doit être correctement justifiée.

1c. Le théorème spectral n'est pas valable sur le corps $\mathbf{C}$. Un contre-exemple était attendu et contrairement à ce que certains candidats pensent, le fait que le polynôme caractéristique d'une matrice soit scindé ne suffit pas à affirmer que cette matrice est diagonalisable.

1d. Très peu de candidats ont su donner un contre-exemple.

Exercice préliminaire

2. La rédaction de la récurrence qui était demandée est presque systématiquement approximative. Très souvent, l'hypothèse de récurrence est mal formulée ou alors l'initialisation n'est pas faite pour $d = 1$; la conclusion du raisonnement n'est pas toujours donnée.

3a-i L'utilisation du théorème de la base incomplète nécessite de bien préciser dans quel espace vectoriel on se place.

3a-ii Alors que cette égalité n'a pas de sens, dans trop de copies on peut lire que $P(M)Q(M)x = P(M)x.Q(M)x$ où P et Q sont des polynômes, M une matrice carrée et x un vecteur.

3b. Le but de la question et de l'exercice est de donner une démonstration du théorème de Cayley Hamilton. Il n'est pas possible d'utiliser ce théorème pour justifier la réponse à la question.
Le fait que pour un vecteur x non-nul on ait $\chi_M(M)x = 0$ ne suffit pas pour conclure et dans cette égalité on ne peut évidemment pas simplifier par x.

Problème, I

4. Il n'est pas suffisant d'affirmer que la symétrie de la matrice implique la symétrie de l'endomorphisme sans plus de précisions.

5 Dans cette question, certains candidats confondent les notions " être diagonalisable" et "être diagonale" pour les matrices carrées.

6. Trop de candidats oublient que la matrice $S + T$ est symétrique et n'utilisent pas la question précédente.

7. Bien que cette question corresponde à un résultat classique, il est étonnant de constater qu'elle n'à que très rarement été abordée.

8a. On a noté des confusions entre u et u^n. De plus les candidats oublient la définition d'un endomorphisme symétrique rappelée en préambule.

8c. L'unicité de u_i est rarement démontrée.

9. Les candidats peinent à donner explicitement le lien entre les matrices carrées et les endomorphismes.

10. Il ne faut pas oublier de vérifier que l'application ensembliste est bien définie. Puisque cette application n'est pas linéaire, on ne peut pas parler de son noyau.
Trop de candidats ne maîtrisent pas la notion de bijection.

Problème, II

11. La majorité des candidats s'est lancée dans un calcul direct très pénible et fastidieux. Afin d'être facilement traitée, cette question nécessitait un temps de réflexion avant de se lancer directement dans des calculs.

12. Dans l'ensemble, les différents cas sont bien traités. Cependant, certains candidats se lancent dans des calculs sans strtatégie ni réflexion.

14. Trop peu de candidats prennent le temps de vérifier que si $X \in SL_2(\mathbf{Z})$ alors $X^k \in SL_2(\mathbf{Z})$.

Problème, III

15. Il est à noter que beaucoup de candidats manquent de rigueur dans la rédaction de cette question. Les notions d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels sont approximatives. Le calcul de la dimension a rarement été abordé.

16.-17. Les définitions de sous-corps et de morphisme de corps ne sont pas connues de tous les candidats ; de nombreuses confusions ont été constatées avec les applications linéaires.

18a.-18b. La rédaction de ces questions à été très approximative et manquait de rigueur.

Problème, IV

19. Certains candidats ont confondu la notation $\overline{M}$ avec la conjugaison complexe des coefficients de la matrice M, d'autres oublient d'utiliser le fait que φ est un morphisme de corps.

20. Les candidats qui utilisent le déterminant pour résoudre cette question ne pensent pas tous à montrer que l'on a $\det(\overline{F}) = \overline{\det(F)}$.

21. De nombreux candidats utilisent l'indice n au lieu de p. Les commutativités des produits matriciels sont rarement justifiées.

23. Question souvent abordée, mais peu de candidats prennent le temps de justifier que $\delta \neq 0$.

24. Trop de candidats pensent que si les matrices ont le même polynôme caractéristique alors elles sont semblables.

2.1.3 Quelques éléments de correction

Le sujet s'inspire de l'article de Alex Khazanov intitulé *Fermat's equation in matrices.* Il a été publié dans la revue *Serdica Mathematical Journal* 21 (1995), no. 1, pp. 19 – 40.
Les éléments de correction donnent les grandes lignes de résolution des questions ; ils ne correspondent pas à la rédaction attendue par le jury. Dans leurs copies, les candidats doivent rédiger soigneusement et apporter une attention particulière aux justifications de leurs affirmations et de leurs calculs. Les rappels, les définitions des objets mathématiques et les énoncés des résultats utilisés sont indispensables ; par ailleurs, avant d'appliquer un résultat que l'on vient d'énoncer il est indispensable d'en vérifier les hypothèses.

Notations.

· *Dans tout le problème, n désignera un entier naturel non nul et* $\mathbf{L}$ *désignera le corps des nombres réels* $\mathbf{R}$ *ou le corps des nombres complexes* $\mathbf{C}$.

· *Si p désigne un entier naturel non nul et* $\mathbf{L}$ *un corps, on note* $\mathcal{M}_p(\mathbf{L})$ *l'ensemble des matrices carrées de taille* $p \times p$ *à coefficients dans* $\mathbf{L}$ *; on notera* $\mathrm{Tr}\,(M)$ *la trace d'une matrice carrée* M.

· *On appelle* I_p *la matrice identité de* $\mathcal{M}_p(\mathbf{L})$*, qui est la matrice diagonale constituée uniquement de* 1 *sur la diagonale.*

· *L'ensemble des matrices inversibles de* $\mathcal{M}_p(\mathbf{L})$ *est noté* $GL_p(\mathbf{L})$ *et l'ensemble des matrices de* $GL_p(\mathbf{L})$ *de déterminant* 1 *est noté* $SL_p(\mathbf{L})$.

· *Soit* $\mathbf{A}$ *un sous-anneau de* $\mathbf{L}$. *On note* $\mathcal{M}_p(\mathbf{A})$ *(respectivement* $GL_p(\mathbf{A})$ *et* $SL_p(\mathbf{A})$*) l'ensemble des matrices de* $\mathcal{M}_p(\mathbf{L})$ *(respectivement de* $GL_p(\mathbf{L})$ *et* $SL_p(\mathbf{L})$*) à coefficients dans* $\mathbf{A}$.

· *Soit* $M \in \mathcal{M}_p(\mathbf{L})$*, on note* χ_M *le polynôme caractéristique de* M *défini par* $\chi_M(X) = \det(X I_p - M)$.

· *Soit* $\delta \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Q}$ *tel que* $D = \delta^2 \in \mathbf{Q}$. *Dans tout le problème, on posera* $\mathbf{K} = \mathbf{Q}[\delta] = \{a + b\delta \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$.

· *Pour tout* a, b *de* $\mathbf{Q}$*, on pose* $\overline{a + \delta b} = a - \delta b$.

· *Pour* $x \in \mathbf{K}$*, on pose* $N(x) = x\overline{x}$.

· *Pour* $M = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ *une matrice de* $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$*, on définit la matrice* $\overline{M} = [\overline{a_{i,j}}]_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$.

· *On note* $\mathcal{S}_p(\mathbf{R})$ *l'ensemble des matrices carrées symétriques réelles de taille* $p \times p$ *et* $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ *l'ensemble des matrices carrées symétriques réelles de taille* $p \times p$ *ayant des valeurs propres positives ou nulles.*

· *Soit* E *un espace euclidien muni d'un produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Un endomorphisme* u *de* E *est dit symétrique si :* $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

· *Pour* $m, n \in \mathbf{Z}$*, tel que* $m \leqslant n$*, on note* $[\![m, n]\!]$ *l'intervalle d'entiers relatifs constitué des éléments de l'ensemble* $\{m, m+1, ..., n-1, n\}$.

Objectifs du problème.

Après un questionnaire "vrai ou faux" et un exercice préliminaire, les parties du problème portent sur la recherche de solutions non nulles de l'équation matricielle $X^n + Y^n = Z^n$, avec n un entier strictement positif.

· La partie **I** traite de la résolution du problème dans $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$.

· Les parties **II** à **VII** visent à discuter de l'existence de solutions dans $SL_2(\mathbf{Z})$, suivant les valeurs de n.

· Dans les parties **VIII** et **IX**, à partir d'une solution (X, Y, Z) dans $(SL_2(\mathbf{Q}))^3$, nous montrons comment construire une solution (X_1, Y_1, Z_1) dans $(SL_2(\mathbf{Q}))^3$ telle que (X_1^n, Y_1^n, Z_1^n) soit dans $(SL_2(\mathbf{Z}))^3$.

Les parties **I**, **II**, **III** et **VIII** peuvent se traiter indépendamment des autres, tout comme la partie **VII** en dehors de la dernière question.

Vrai ou faux ?

1. **Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.**

   (a) **Soit n un entier strictement positif.**

   Affirmation : "Il existe des matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $\mathrm{Tr}\,(MN) \neq \mathrm{Tr}\,(NM)$."

   L'affirmation est fausse. En effet, pour tout couple de matrices M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a

   $$\mathrm{Tr}\,(MN) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{kj} n_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} n_{jk} m_{kj} = \mathrm{Tr}\,(NM)$$

   (b) **Affirmation : "Deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ ont le même polynôme caractéristique si et seulement si elles ont la même trace et le même déterminant."**

Cette affirmation est vraie, car si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, son polynôme caractéristique est donné par $\chi_M = X^2 - \mathrm{Tr}\,(M)X + \det(M)$, et deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients. Il faut aussi noter que deux matrices semblables ont la même trace et même déterminant.

(c) Affirmation : "Les matrices carrées et symétriques à coefficients dans C sont diagonalisables."

Cette affirmation est fausse. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique X^2, et donc sa seule valeur propre est nulle. Or, la seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle, et puisque cette matrice est non nulle, elle n'est pas diagonalisable.

(d) Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

Affirmation : "Si $\varphi(a)$ est inversible dans B, alors a est inversible dans A."

Cette affirmation est fausse. La surjection canonique de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est un morphisme d'anneaux, mais l'entier naturel 3 n'est pas inversible dans $\mathbf{Z}$ mais son image l'est dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice préliminaire.

2. Soit d un entier strictement positif. Soit $P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_0$ un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ à coefficients complexes. On appelle *matrice compagnon* du polynôme P la matrice C_P de $\mathcal{M}_d(\mathbf{C})$ suivante

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{d-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant $\chi_{C_P}(X) = \det(X\,I_d - C_P)$ par rapport à sa première ligne et à l'aide d'une récurrence, montrer que $\chi_{C_P}(X) = P(X)$.

On raisonne par récurrence sur la taille de la matrice, la propriété au rang $d \in \mathbf{N}^*$ s'écrit avec les notations de l'énoncé : $\forall (a_j)_{j\in[\![0,d-1]\!]} \in \mathbf{C}^d$, $\chi_{C_P}(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_0$.

▷ **Initialisation :** le cas $d = 1$ est clair.

▷ **Hérédité :** soit d un entier naturel supérieur ou égal à 2, supposons la propriété vraie au rang $d-1$. Le développement de $\det(X\,I_d - C_P)$ par rapport à la première ligne comme indiqué dans l'énoncé donne $\det(X\,I_d - C_P) = (-1)^{1+1}X\det(X\,I_{d-1} - C_Q) + (-1)^{d+1}a_0\det(T)$ où la matrice $T \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbf{C})$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à -1, donc de déterminant $(-1)^{d-1}$, et le polynôme Q est donné par $Q(X) = X^{d-1} + a_{d-1}X^{d-2} + \ldots + a_1$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $\det(X\,I_d - C_P) = XQ(X) + a_0 = P(X)$, ce qui achève la récurrence.

3. Soit p un entier strictement positif et soit M une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$.

(a) Étant donné un élément x quelconque non nul de $\mathbf{C}^p$ on pose

$$\mu = \min\big\{r \geqslant 1 \mid \textbf{la famille } \{x, M\,x, \ldots, M^r\,x\} \text{ est liée dans } \mathbf{C}^p\big\}.$$

i) **Montrer qu'il existe un élément $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{\mu-1})$ de $\mathbf{C}^\mu$ et une matrice N de $\mathcal{M}_{p-\mu}(\mathbf{C})$ tels**

que la matrice M soit semblable à une matrice M' de la forme suivante

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 & * \\ 1 & 0 & & \vdots & -\alpha_1 & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{\mu-2} & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{\mu-1} & * \\ O & & \dots & & O & N \end{pmatrix}$$

où les $*$ représentent des lignes d'éléments de $\mathbf{C}$ et les O représentent des colonnes nulles.

Notons que l'entier μ est bien défini et appartient à l'ensemble $[\![1,p]\!]$ puisque x est non nul et que la famille $\{x, Mx, \dots, M^p x\}$ est liée en tant que famille de $p+1$ éléments dans un espace vectoriel de dimension p.

Par définition, la famille $\{x, Mx, \dots, M^{\mu-1} x\}$ est libre. On complète cette famille libre en une base notée $\mathcal{B}$ de $\mathbf{C}^p$, de la forme $\{x, Mx, \dots, M^{\mu-1}x, e_{\mu+1}, \dots, e_p\}$, ce qui est licite d'après le théorème de la base incomplète.

Par abus de notation, on note toujours M l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{C})$ (que l'on identifie à $\mathbf{C}^p$) canoniquement associé à M. Par construction, les $\mu-1$ premières colonnes de la matrice de M dans la base $\mathcal{B}$ ont la forme voulue.

Enfin, la famille $\{x, Mx, \dots, M^\mu x\}$ est liée, donc il existe $(a_j)_{j\in[\![1,\mu]\!]} \in \mathbf{C}^p \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{j=0}^{\mu} a_j M^j x = 0$. Nécessairement, $a_\mu \neq 0$, sinon cela contredirait la liberté de la famille $\{x, Mx, \dots, M^{\mu-1}x\}$. Ainsi, après division par a_μ, on obtient l'existence de $(\alpha_0, \dots, \alpha_{\mu-1}) \in \mathbf{C}^\mu$ tels que $M^\mu x + \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j M^j x = 0$. Cela donne la forme voulue pour la colonne d'indice μ de la matrice de M dans $\mathcal{B}$, et donc pour l'existence d'une matrice M' semblable à M de la forme souhaitée.

ii) **Montrer que $\chi_M(M)\,x = 0$.**

Puisque M et M' sont semblables, $\chi_M = \chi_{M'}$. La matrice M' est triangulaire supérieure par blocs, donc en notant $P = X^\mu + \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j X^j$, la question 2 donne $\chi_M = \chi_N \chi_{C_P} = \chi_N P$.

Enfin, $\chi_M(M)x = \chi_N(M)P(M)x$, et par construction $P(M)x = 0$ d'après la question précédente.

(b) Montrer que χ_M est un polynôme annulateur de M.

Le raisonnement de la question précédente assure que pour tout x de $\mathbf{C}^p$, $\chi_M(M)x = 0$. Il suffit de choisir des vecteurs de x parcourant une base de $\mathbf{C}^p$ pour en déduire que la matrice $\chi_M(M)$ est nulle, ce qui termine la preuve.

Problème.

I. Exemple dans $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$.

Soient n et p deux entiers strictement positifs.

Tournez la page S.V.P.

4. **Soit A une matrice de $\mathcal{S}_p(\mathbf{R})$ et soit a l'endomorphisme de $\mathbf{R}^p$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^p$ est A. Montrer que a est un endomorphisme symétrique de $\mathbf{R}^p$.**

   Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^p$ qui est orthonormée pour le produit scalaire usuel. Pour $x, y \in \mathbf{R}^p$, en notant X et Y les matrices colonnes correspondantes dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\langle a(x)|y\rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX^tAY = {}^tX(AY) = \langle x|a(y)\rangle$$

   Affirmer que a est représenté matriciellement par une matrice symétrique A **en base orthonormée** est un argument valable.

5. **Soit $S \in \mathcal{S}_p(\mathbf{R})$. Démontrer que S est une matrice de $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ si et seulement si**

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R}),\ {}^tYSY \geqslant 0.$$

   - ▷ Sens direct : le théorème spectral assure l'existence de $P \in O_p(\mathbf{R})$ telle que $S = {}^tPDP$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ où les λ_i sont des réels positifs.
     Pour $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$, ${}^tYSY = {}^t(PY)D(PY)$, d'où en notant $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les coordonnées de PY, cela donne ${}^tYSY = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$.
   - ▷ Sens réciproque : si Y est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ, alors ${}^tYSY = \lambda\|Y\|^2 \geqslant 0$ puis $\lambda \geqslant 0$, car Y est non nul, donc : $\|Y\|^2 > 0$.

6. **Démontrer que pour toutes les matrices S et T de $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$, la matrice $S+T$ appartient à $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$.**

   Tout d'abord $S + T$ est une matrice symétrique.
   Il suffit d'écrire ensuite : $\forall Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R}),\ {}^tY(S+T)Y = {}^tYSY + {}^tYTY \geqslant 0$ et d'appliquer la question précédente.

7. **Soit $S \in \mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une matrice R de $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ telle que $R^n = S$.**

   On diagonalise S comme à la question 5, puis la matrice $R = {}^tP\operatorname{diag}(\lambda_i^{1/n})P$ convient (ceci a un sens car tous les λ_i sont positifs).

8. **Soient $S \in \mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ et $U \in \mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ telles que $U^n = S$. On note s et u les endomorphismes de $\mathbf{R}^p$ dont les matrices relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^p$ sont respectivement S et U. Soit $\{\lambda_1, ..., \lambda_q\}$ le spectre de s; pour i élément de $[\![1, q]\!]$, on note $E_{\lambda_i}(s)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i.**

   (a) Soit $i \in [\![1, q]\!]$. Démontrer que u induit un endomorphisme symétrique sur $E_{\lambda_i}(s)$. On notera cet endomorphisme u_i.

   Les puissances de u commutent entre elles, donc u et s commutent. Ainsi, les espaces propres de s sont stables par u, ce qui légitime l'existence de l'endomorphisme u_i induit par u sur $E_{\lambda_i}(s)$. Enfin, la relation $\forall x, y \in \mathbf{R}^p,\ \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle$ reste vraie sur $E_{\lambda_i}(s)$, ce qui prouve que u_i est symétrique.

   (b) Soit $i \in [\![1, q]\!]$. Démontrer que $\sqrt[n]{\lambda_i}$ est la seule valeur propre possible de u_i.

   Soit μ une valeur propre de u_i, soit x un vecteur propre associé. Il vient $s(x) = u_i^n(x) = \mu^n x$ et puisque $x \in E_{\lambda_i}(s)$, $s(x) = \lambda_i x$. Comme x est non nul, on tire $\mu^n = \lambda_i$, et puisque ces réels sont positifs par hypothèse, $\mu = \sqrt[n]{\lambda_i}$

   (c) Démontrer que l'endomorphisme u est unique.

   L'endomorphisme u_i est symétrique, donc admet une base orthonormée de vecteurs propres $(f_1 \ldots, f_k)$. D'après la question précédente, $u(f_i) = u_i(f_i) = \sqrt[n]{\lambda_i} f_i$ pour tout indice i, ce qui signifie que $u_i = \sqrt[n]{\lambda_i}\, id_{E_{\lambda_i}(s)}$. Enfin, $s(f_i) = u^n(f_i) = \lambda_i f_i$ par construction. Ainsi, puisque $\oplus_{i=1}^q E_{\lambda_i}(s) = \mathbf{R}^p$, cela définit u et donc U de façon unique.

9. Soit $S \in \mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice R de $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ telle que $R^n = S$.

La question 7 prouve l'existence d'une telle matrice R.

L'ensemble des endomorphismes sur $\mathbf{R}^p$ est naturellement en bijection avec l'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ via l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans la base canonique.

La question 8c prouve l'unicité d'un endomorphisme r de $\mathbf{R}^p$ tel que $r^n = s$. Puisque r est un endomorphisme symétrique positif dans la base canonique qui est orthonormée, alors R est symétrique à valeurs propres positives, et est donc bien dans $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$.

Étant donnée une matrice S de $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$, on notera $R = \sqrt[n]{S}$, l'unique matrice de $\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R})$ telle que $R^n = S$.

10. Démontrer que l'application

$$\psi : \begin{cases} (\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R}))^2 & \to \quad \left\{(X,Y,Z) \in (\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R}))^3 \mid X^n + Y^n = Z^n\right\} \\ (U,V) & \mapsto \quad \left(\sqrt[n]{U}, \sqrt[n]{V}, \sqrt[n]{U+V}\right) \end{cases}$$

est une bijection.

Pour prouver la bonne définition de ψ, on note que si U et V sont deux matrices symétriques positives il en est de même pour $U+V$ d'après la question 6. Ainsi, pour un tel couple (U,V), $\sqrt[n]{U+V}$ existe. Par ailleurs, $\sqrt[n]{U}^n + \sqrt[n]{V}^n = U + V = \left(\sqrt[n]{U+V}\right)^n$, ce qui assure que ψ est bien à valeurs dans $\{(X,Y,Z) \in (\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R}))^3 / \ X^n + Y^n = Z^n\} = \mathcal{F}$

Soit

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{F} & \to \quad (\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R}))^2 \\ (X,Y,Z) & \mapsto \quad (X^n, Y^n) \end{cases}$$

On vérifie directement que la puissance n-ième d'une matrice symétrique positive l'est également (le spectre élévé à la puissance n reste dans $\mathbf{R}_+$). En outre,

$$\forall (X,Y,Z) \in \mathcal{F}, \ \psi \circ \varphi(X,Y,Z) = \psi(X^n, Y^n) = \left(\sqrt[n]{X^n}, \sqrt[n]{Y^n}, \sqrt[n]{X^n + Y^n}\right)$$

Or, $\sqrt[n]{X^n} = X$, $\sqrt[n]{Y^n} = Y$ et $\sqrt[n]{X^n + Y^n} = Z$ par unicité de la solution et puisque ces matrices sont symétriques positives,

Enfin,

$$\forall (U,V) \in (\mathcal{S}_p^+(\mathbf{R}))^2, \ \varphi \circ \psi(U,V) = \varphi\left(\sqrt[n]{U}, \sqrt[n]{V}, \sqrt[n]{U+V}\right) = (U,V)$$

car par définition de $\sqrt[n]{U}$, on a $\left(\sqrt[n]{U}\right)^n = U$.

Ainsi, φ et ψ sont réciproques l'une de l'autres, donc ψ est une bijection.

II. Si $n \equiv 0[4]$, l'équation $X^n + Y^n = Z^n$ n'admet pas de solutions dans $SL_2(\mathbf{Z})$.

11. Soit $M \in SL_2(\mathbf{Z})$. Démontrer que $\operatorname{Tr}(M^4) = \operatorname{Tr}(M)^4 - 4\operatorname{Tr}(M)^2 + 2$.

▷ Première méthode : d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $M^2 - \operatorname{Tr}(M)M + I_2 = 0$, donc par élévation au carré, puisque les puissances de M commutent entre elles,

$$M^4 = \operatorname{Tr}(M)^2 M^2 - 2\operatorname{Tr}(M)M + I_2 = \operatorname{Tr}(M)^2(\operatorname{Tr}(M)M - I_2) - 2\operatorname{Tr}(M)M + I_2$$

d'où

$$M^4 = (\operatorname{Tr}(M)^3 - 2\operatorname{Tr}(M))M + (1 - \operatorname{Tr}(M)^2)I_2.$$

On passe à la trace et la relation s'obtient par linéarité.

Tournez la page S.V.P.

▷ Seconde méthode : trigonaliser dans **C**, élever à la puissance 4, et constater que

$$\mathrm{Tr}\,(M^4) = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 - 2\lambda_1^2\lambda_2^2 = \left((\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2\right)^2 - 2\lambda_1^2\lambda_2^2 = (\mathrm{Tr}\,(M)^2 - 2)^2 - 2$$

puisque $\det(M) = \lambda_1\lambda_2 = 1$.

12. En déduire que l'on a $\mathrm{Tr}\,(M^4) \equiv 2[8]$ **ou** $\mathrm{Tr}\,(M^4) \equiv -1[8]$**.**

Grâce à la question précédente, on a $\mathrm{Tr}\,(M^4) = (\mathrm{Tr}\,(M)^2 - 2)^2 - 2$.

▷ Premier cas : $\mathrm{Tr}\,(M) = 2k + 1$ est un entier impair. On obtient alors

$$\mathrm{Tr}\,(M^4) = ((2k + 1)^2 - 2)^2 - 2 = (4k^2 + 4k - 1)^2 - 2 = (4k^2 + 4k)^2 - 2(4k^2 + 4k) + 1 - 2 \equiv -1[8]$$

▷ Second cas : $\mathrm{Tr}\,(M) = 2k$ est un entier pair. On obtient alors

$$\mathrm{Tr}\,(M^4) = ((2k)^2 - 2)^2 - 2 = 16k^4 - 16k^2 + 2 \equiv 2[8]$$

13. Démontrer que l'équation $X^4 + Y^4 = Z^4$ **d'inconnues** X, Y **et** Z **n'admet pas de solutions dans** $SL_2(\mathbf{Z})$**.**

Supposons l'existence d'une solution (X, Y, Z) dans le cas où $n = 4$. En distinguant selon les valeurs prises par $\mathrm{Tr}\,(X)$ et $\mathrm{Tr}\,(Y)$, le résultat de la question précédente prouve que $\mathrm{Tr}\,(X^4+Y^4) \equiv -2,\ 1,$ ou $4[8]$. Ainsi, on ne peut pas avoir $\mathrm{Tr}\,(Z^4) \equiv -1, 2[8]$, ce qui fournit une contradiction.

14. En déduire que si 4 **divise** n**, alors l'équation** $X^n + Y^n = Z^n$ **d'inconnues** X, Y **et** Z **n'admet pas de solutions dans** $SL_2(\mathbf{Z})$**.**

Supposons n divisible par 4. On écrit $n = 4k$ pour un entier naturel k. Si cette équation admettait une solution (X, Y, Z), le triplet (X^k, Y^k, Z^k) de matrices à coefficients entiers de déterminant 1 fournirait une solution à l'équation de la question précédente, ce qui est absurde.

III. Le corps $\mathbf{K} = \mathbf{Q}[\delta]$.

On pose

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \to & \mathbf{K} \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array} \right.$$

15. Démontrer que K est un Q-espace vectoriel dont on précisera la dimension.

D'une part, $\mathbf{K} = \mathrm{vect}_{\mathbf{Q}}(1, \delta)$ donc **K** est un sous-espace vectoriel du **Q**-espace vectoriel **C**. D'autre part, si $a, b \in \mathbf{Q}$ vérifient $a + b\delta = 0$, nécessairement $b = 0$ sans quoi $\delta = -\frac{b}{a} \in \mathbf{Q}$, donc $a = 0$, ce qui prouve la **Q**-liberté de la famille $(1, \delta)$. Ainsi, **K** est un **Q**-espace vectoriel de dimension 2.

16. Démontrer que K est un sous-corps de C.

D'après ce qui précède, **K** est un sous-groupe additif de **C**, et $1 \in \mathbf{K}$.

Si $a + b\delta$ et $c + d\delta$ sont deux éléments de **K**, leur produit vaut $ac + Dbd + \delta(ad + bc)$ qui est bien dans **K** car $D \in \mathbf{Q}$. Cela prouve que **K** est un sous-anneau de $(\mathbf{C}, +, \times)$.

Enfin, si $x = a + b\delta \in \mathbf{K}^*$, on note que $(a, b) \neq (0, 0)$ et donc $a - b\delta \neq 0$ par liberté sur **Q** de $(1, \delta)$. Par conséquent,

$$\frac{1}{a + b\delta} = \frac{a - b\delta}{(a + b\delta)(a - b\delta)} = \frac{a}{a^2 - b^2D} - \frac{b}{a^2 - b^2D}\delta \in \mathbf{K}$$

ce qui prouve que **K** est un sous-corps de **C**.

17. Démontrer que φ est un isomorphisme de corps.

On constate que φ est involutive donc bijective. Reste à vérifier que φ est un morphisme de corps. On utilise dans tous les calculs qui suivent l'unicité de l'écriture d'un élément de $\mathbf{K}$ sous la forme $a + b\delta$ avec $a, b \in \mathbf{Q}$:

- ▷ $\varphi(1) = \varphi(1 + 0\delta) = 1$
- ▷ $\forall (a,b,c,d) \in \mathbf{Q}^4,\ \varphi(a+b\delta+c+d\delta) = \varphi(a+c+(b+d)\delta) = a+c-(b+d)\delta = \varphi(a+b\delta)+\varphi(c+d\delta)$
- ▷ $\forall (a,b,c,d) \in \mathbf{Q}^4,\ \varphi((a+b\delta)(c+d\delta)) = \varphi(ac + Dbd + \delta(ad+bc)) = ac + Dbd - \delta(ad+bc) = (a-b\delta)(c-d\delta)$ d'où $\forall (a,b,c,d) \in \mathbf{Q}^4,\ \varphi((a+b\delta)(c+d\delta)) = \varphi(a+b\delta)\varphi(c+d\delta)$ ce qui termine la preuve.

18. (a) Démontrer que l'application $\psi : \begin{cases} \mathbf{Q} & \to & \mathbf{C} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+\delta}{x-\delta} \end{cases}$ est injective.

Soient $x, y \in \mathbf{Q}$ tels que $\psi(x) = \psi(y)$. On a $\frac{x+\delta}{x-\delta} = \frac{y+\delta}{y-\delta}$ d'où $xy + (y-x)\delta - D = xy + (x-y)\delta - D$ et par $\mathbf{Q}$-liberté de $(1, \delta)$ cela donne $y - x = x - y$, donc $x = y$, donc ψ est injective.

(b) Démontrer que $\left\{ \dfrac{\theta}{\overline{\theta}},\ \theta \in \mathbf{K} \setminus \{0\} \right\}$ est un ensemble infini.

L'image d'un ensemble infini par une application injective est un ensemble infini, donc grâce à la question précédente, l'ensemble $\left\{ \frac{x+\delta}{x-\delta},\ x \in \mathbf{Q} \right\}$ est infini et cet ensemble est inclus dans $\left\{ \frac{\theta}{\overline{\theta}},\ \theta \in \mathbf{K} \setminus \{0\} \right\}$ qui est donc un ensemble infini.

IV. Matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ conjuguées à une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{Q})$.

Soit p un entier strictement positif.

19. Démontrer que si A et B sont des matrices quelconques de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, alors on a la relation $\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$.

Avec des notations usuelles, si $C = AB$, on a grâce au fait que φ est un morphisme de corps $\forall i, j \in [\![1, p]\!],\ \overline{c_{i,j}} = \overline{\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}} = \sum_{k=1}^{p} \overline{a_{ik}}\,\overline{b_{kj}}$ où l'on reconnaît le coefficient d'indice (i, j) du produit $\overline{A} \cdot \overline{B}$. Ainsi, $\forall A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K}),\ \overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

20. Soit $F \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. Démontrer que F appartient à $GL_p(\mathbf{K})$ si et seulement si $\overline{F}$ appartient à $GL_p(\mathbf{K})$. Dans ce cas, démontrer que l'on a $\left(\overline{F}\right)^{-1} = \overline{F^{-1}}$.

- ▷ Si $F \in GL_p(\mathbf{K})$, on écrit $FF^{-1} = I_p$ et grâce à la question précédente, $\overline{F}\,\overline{F^{-1}} = \overline{I_p} = I_p$, donc $\overline{F} \in GL_p(\mathbf{K})$ et $\overline{F}^{-1} = \overline{F^{-1}}$.
- ▷ Si $\overline{F} \in GL_p(\mathbf{K})$, on procède de même car $\overline{\overline{F}} = F$.

21. Soit $X \in GL_p(\mathbf{K})$.

(a) On suppose qu'il existe une matrice F de $GL_p(\mathbf{K})$ tel que $X = F\left(\overline{F}\right)^{-1}$. Déterminer la matrice $X\overline{X}$.

Un petit calcul qui résulte directement de la question précédente donne

$X\overline{X} = F(\overline{F})^{-1}\overline{F(\overline{F})^{-1}} = F(\overline{F})^{-1}\overline{F}(\overline{\overline{F}})^{-1} = FF^{-1} = I_p$

(b) On suppose que $X\overline{X} = I_p$.

Pour tout élément θ de $\mathbf{K}$, on pose $F(\theta) = \theta I_p + \overline{\theta} X$.

i) **Montrer qu'il existe un élément θ_0 de $\mathbf{K}$ tel que $F(\theta_0)$ soit inversible.**

Si $\theta \neq 0$, on écrit $F(\theta) = \overline{\theta}\left(\frac{\theta}{\overline{\theta}} I_p + X\right)$ et puisque $\overline{\theta} \neq 0$, cette matrice n'est pas inversible si et seulement si $\frac{\theta}{\overline{\theta}} I_p + X$ n'est pas inversible si et seulement si $-\frac{\theta}{\overline{\theta}} \in Sp(X)$. Or, X admet au plus p valeurs propres distinctes, et $\left\{ \frac{\theta}{\overline{\theta}},\ \theta \in \mathbf{K} \setminus \{0\} \right\}$ est un ensemble infini, d'où l'existence d'un θ_0 convenable.

ii) **En déduire, pour ce θ_0, que $X = F(\theta_0)\left(\overline{F(\theta_0)}\right)^{-1}$.**
Petit calcul :

$$X\overline{F(\theta_0)} = X\left(\overline{\theta_0}I_p + \theta_0\overline{X}\right) = \overline{\theta_0}X + \theta_0 X\overline{X} = \overline{\theta_0}X + \theta_0 I_p = F(\theta_0)$$

(c) Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) **Il existe une matrice F de $GL_p(\mathbf{K})$ telle que les matrices $F^{-1}AF$ et $F^{-1}BF$ appartiennent à $\mathcal{M}_p(\mathbf{Q})$.**

ii) **Il existe une matrice X de $GL_p(\mathbf{K})$ tel que :** $\begin{cases} X^{-1}AX = \overline{A} \\ X^{-1}BX = \overline{B} \\ X\overline{X} = I_p \end{cases}$

Supposons (i) vraie. Soit $X = F(\overline{F})^{-1}$. On a $\overline{F^{-1}AF} = F^{-1}AF$ puisque cette matrice est à coefficients rationnels. Ainsi, en utilisant la question 19, $\overline{F^{-1}} \cdot \overline{A} \cdot \overline{F} = F^{-1}AF$, puis cela s'écrit $\overline{A} = \overline{F}F^{-1}AF\overline{F}^{-1} = X^{-1}AX$. On procède de même pour établir $X^{-1}BX = \overline{B}$ et $X\overline{X} = I_p$ résulte de 20, d'où la preuve de (ii).

Réciproquement, soit θ_0 choisi comme à la question 21b. D'après les calculs précédents, on a : $\overline{F(\theta_0)^{-1}AF(\theta_0)} = F(\theta_0)^{-1}AF(\theta_0)$, donc $F(\theta_0)^{-1}AF(\theta_0) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{Q})$. On procède de même pour $F(\theta_0)^{-1}BF(\theta_0)$.

22. Soient $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ deux matrices à coefficients dans K. On suppose que λ n'est pas élément de Q.

(a) Soit $X \in GL_2(\mathbf{K})$. Démontrer que X vérifie les relations $\begin{cases} X^{-1}AX = \overline{A} \\ X\overline{X} = I_2 \end{cases}$ si et seulement s'il existe un élément u de $\mathbf{K} \setminus \{0\}$ tel que $X = \begin{pmatrix} 0 & u \\ \frac{1}{\overline{u}} & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} X^{-1}AX = \overline{A} \\ X\overline{X} = I_2 \end{cases} \iff \begin{cases} AX = X\overline{A} \\ X\overline{X} = I_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ X\overline{X} = I_2 \end{cases}$$

Ainsi,

$$AX = X\overline{A} \iff \begin{cases} \lambda\alpha = \overline{\lambda}\alpha \\ \lambda\beta = \lambda\beta \\ \overline{\lambda}\gamma = \overline{\lambda}\gamma \\ \overline{\lambda}\delta = \lambda\delta \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda - \overline{\lambda})\alpha = 0 \\ (\lambda - \overline{\lambda})\delta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \delta = 0$$

car $\lambda \notin \mathbf{Q} \iff \lambda \neq \overline{\lambda}$, ce qui donne pour conclure

$$X^{-1}AX = \overline{A} \iff \exists(\beta, \gamma) \in \mathbf{K}^2,\ X = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, si X est de la forme précédente, on a

$$X\overline{X} = I_2 \iff \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} & 0 \end{pmatrix} = I_2 \iff \begin{cases} \beta\overline{\gamma} = 1 \\ \overline{\beta}\gamma = 1 \end{cases} \iff \gamma = \frac{1}{\overline{\beta}}$$

en notant que nécessairement, $\beta \neq 0$ car $X \in GL_2(\mathbf{K})$.

(b) On suppose qu'il existe une matrice F de $GL_2(\mathbf{K})$ telle que les matrices $F^{-1}AF$ et $F^{-1}BF$ appartiennent à $SL_2(\mathbf{Q})$.
Montrer que l'on a $\det(A) = \det(B) = 1$ et $d = \overline{a}$ et en déduire qu'il existe un élément x de $\mathbf{K}$ tel que l'on a $N(a) - 1 = N(x)$ (c'est-à-dire $a\overline{a} - 1 = x\overline{x}$).

▷ Deux matrices semblables ayant même déterminant, on a $\det(A) = \det(B)$.

▷ D'après la question 21c, il existe $X \in GL_2(\mathbf{K})$ tel que $\left\{ \begin{array}{c} X^{-1}AX = \overline{A} \\ X^{-1}BX = \overline{B} \\ X\overline{X} = I_n \end{array} \right.$. D'après la question 22a, il existe $u \in \mathbf{K}^*$ tel que $X = \begin{pmatrix} 0 & u \\ \frac{1}{\overline{u}} & 0 \end{pmatrix}$. La relation $X^{-1}BX = \overline{B}$ donne $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ \frac{1}{\overline{u}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & u \\ \frac{1}{\overline{u}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$ et le calcul matriciel donne $\begin{cases} au = \overline{d}u \\ b = \overline{c}u\overline{u} \end{cases}$ d'où $a = \overline{d}$ car $u \neq 0$.

Or, $1 = \det(B) = ad - bc$ donc $a\overline{a} - 1 = bc = c\overline{c}u\overline{u}$. Ainsi, $N(a) - 1 = N(x)$ avec $x = cu$.

V. Conditions pour qu'une somme de matrices de $SL_2(\mathbf{Q})$ soit dans $SL_2(\mathbf{Q})$.

Soient α un élément de $\mathbf{Q}$ et δ un élément de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Q}$ tels que $\alpha^2 - 1 = \delta^2$.

23. Soient $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha + \delta & 0 \\ 0 & \alpha - \delta \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ deux matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$, posons $m_1 = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(B_1)}{2}$.
On suppose que $\det(B_1) = \det(A_1 + B_1) = 1$. Démontrer l'égalité $a - d = \dfrac{2\alpha m_1 + 1}{\delta}$.

D'une part, $1 = \det(B_1) = ad - bc$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \det(A_1 + B_1) &= (a + \alpha + \delta)(d + \alpha - \delta) - bc \\ &= ad - bc + (\alpha + \delta)d + (\alpha - \delta)a + \alpha^2 - \delta^2 \\ &= 1 + \alpha\,\mathrm{Tr}\,(B) - \delta(a - d) + \alpha^2 - D \\ &= 2 + 2\alpha m_1 - \delta(a - d) \end{aligned}$$

donc $\delta(a - d) = 1 + 2\alpha m_1$ d'où $a - d = \frac{1+2\alpha m_1}{\delta}$, en notant que $\delta \neq 0$ car $\delta \notin \mathbf{Q}$.

24. On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $SL_2(\mathbf{Q})$ telles que $\mathrm{Tr}\,(A) = 2\alpha$ et $\det(A+B) = 1$. Posons $m = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(B)}{2}$.

(a) Démontrer que dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$, la matrice A est semblable à la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha + \delta & 0 \\ 0 & \alpha - \delta \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A s'écrit $\chi_A = X^2 - (\mathrm{Tr}\,A)X + \det(A) = X^2 - 2\alpha X + 1$ car $\begin{cases} (\alpha + \delta) + (\alpha - \delta) = 2\alpha \\ (\alpha + \delta)(\alpha - \delta) = \alpha^2 - \delta^2 = \alpha^2 - D = 1 \end{cases}$ donc $\alpha + \delta$ et $\alpha - \delta$ sont les racines de χ_A. Puisque $\delta \neq 0$ en tant qu'irrationnel, on en déduit que les valeurs propres de A sont distinctes, ce que prouve que A est diagonalisable dans le corps $\mathbf{K}$: il existe $P \in GL_2(\mathbf{K})$ tel que $A = PA_1P^{-1}$.

(b) **En utilisant la question 23. et la question 22b., montrer qu'il existe un élément x de K tel que l'on ait**

$$\frac{\left(\alpha m + \frac{1}{2}\right)^2 - (\alpha^2 - 1)(m^2 - 1)}{1 - \alpha^2} = N(x) = x\overline{x}.$$

On conserve les notations de la question précédente, notons $B_1 = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $\det(A_1) = \det(B_1) = \det(A_1 + B_1) = 1$ car $A_1 + B_1 = P^{-1}(A + B)P$. On reprend les notations de la question 23, on a $a - d = \frac{2\alpha m+1}{\delta}$ car $2m = \text{Tr } B_1 = \text{Tr } B$ car la trace est un invariant de similitude. En prenant $F = P^{-1}$, la question 22b nous assure que $d = \overline{a}$ et qu'il existe $x \in \mathbf{K}$ tel que $N(a) - 1 = N(x)$. On a enfin $\text{Tr } B = a + d$, donc $\begin{cases} a + d = 2m \\ a - d = \frac{2\alpha m+1}{\delta} \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = m + \frac{\alpha m+1/2}{\delta} \\ d = m - \frac{\alpha m+1/2}{\delta} \end{cases}$ et puisque $d = \overline{a}$, cela donne

$$N(x) = N(a) - 1 = a\overline{a} - 1 = \left(m + \frac{\alpha m + 1/2}{\delta}\right)\left(m - \frac{\alpha m + 1/2}{\delta}\right) - 1$$

d'où

$$N(x) = m^2 - \left(\frac{\alpha m + 1/2}{\delta}\right)^2 - 1 = \frac{(\alpha m + \frac{1}{2})^2 - \delta^2(m^2 - 1)}{-\delta^2} = \frac{(\alpha m + \frac{1}{2})^2 - (\alpha^2 - 1)(m^2 - 1)}{1 - \alpha^2}$$

car $\delta^2 = D = \alpha^2 - 1$.

(c) **Démontrer que le résultat de la question précédente est équivalent à l'existence d'un élément y de K tel que**

$$\left(\alpha m + \frac{1}{2}\right)^2 - (\alpha^2 - 1)(m^2 - 1) = N(y) = y\overline{y}.$$

Puisque $1 - \alpha^2 = -\delta^2 = \overline{\delta}\delta$, il suffit de poser $y = \delta x$.

Dans la suite du problème, on admettra que ce résultat reste valable si δ appartient à $\mathbf{Q}$*. C'est-à-dire qu'étant donné un élément α de* $\mathbf{Q}$ *et des matrices A et B de $SL_2(\mathbf{Q})$ qui vérifient* $\text{Tr}(A) = 2\alpha$ *et* $\det(A + B) = 1$, *alors si* $m = \frac{\text{Tr}(B)}{2}$ *il existe deux éléments u et v de* $\mathbf{Q}$ *tels que*

$$\left(\alpha m + \frac{1}{2}\right)^2 - (\alpha^2 - 1)(m^2 - 1) = u^2 - (\alpha^2 - 1)v^2.$$

VI. Si $n \equiv 0[3]$, l'équation $X^n + Y^n = Z^n$ n'admet pas de solutions dans $SL_2(\mathbf{Z})$.

25. (a) **Soit $x \in \mathbf{Z}$. Déterminer les classes de congruence de $x^3 - 3x$ modulo 9. Pour chaque classe, on explicitera un représentant.**

Posons $x = 3k + \ell$ avec $\ell \in [\![0, 2]\!]$. Il suffit d'écrire

$$u = x^3 - 3x = 27k^3 + 27k^2\ell + 9k\ell + \ell^3 - 9k - 3\ell \equiv \ell^3 - 3\ell[9]$$

Ainsi, $\begin{cases} u \equiv 0[9] \text{ si } \ell = 0, \\ u \equiv -2[9] \text{ si } \ell = 1, \\ u \equiv 2[9] \text{ si } \ell = 2 \end{cases}$

(b) Soit M une matrice de $SL_2(\mathbf{Z})$, démontrer que l'on a $\mathrm{Tr}\,(M^3) = (\mathrm{Tr}\,(M))^3 - 3\,\mathrm{Tr}\,(M)$.

La matrice M est trigonalisable vue comme matrice à coefficients complexes : il existe $P \in GL_2(\mathbf{C})$ tel que $M = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & \star \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$ d'où $M^3 = P\begin{pmatrix}\lambda_1^3 & \star \\ 0 & \lambda_2^3\end{pmatrix}P^{-1}$. Ainsi,

$$\mathrm{Tr}\ M^3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 = (\lambda_1+\lambda_2)^3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 = \mathrm{Tr}\ M^3 - 3\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)$$

et donc, $\mathrm{Tr}\ M^3 = \mathrm{Tr}\ M^3 - 3\det(M)\,\mathrm{Tr}\ M = \mathrm{Tr}\ M^3 - 3\,\mathrm{Tr}\ M$

(c) Soient A, B et C trois matrices de $SL_2(\mathbf{Z})$ qui vérifient la relation $A^3 + B^3 = C^3$.
On suppose que parmi les nombres $\mathrm{Tr}\,(A^3), \mathrm{Tr}\,(B^3)$ et $\mathrm{Tr}\,(C^3)$, au moins l'un d'entre eux n'est pas divisible par 9.

i) **Montrer qu'il existe trois matrices A_1, B_1 et C_1 de $SL_2(\mathbf{Z})$ telles que $A_1^3 + B_1^3 = C_1^3$, $\mathrm{Tr}\,(A_1^3) \equiv 0[9]$, $\mathrm{Tr}\,(B_1^3) \equiv 2[9]$ et $\mathrm{Tr}\,(C_1^3) \equiv 2[9]$.**

▷ Si $\mathrm{Tr}\ A^3 \equiv 0[9]$: on pose $A_1 = A$ alors $\mathrm{Tr}\ B^3 = \mathrm{Tr}\ C^3$ est congru à 2 ou -2 modulo 9 par hypothèse et d'après les questions 25a et 25b.
 — Si $\mathrm{Tr}\ B^3 = -2$, on choisit alors $B_1 = -B$ et $C_1 = -C$ et (A_1, B_1, C_1) convient. En effet, $\det(-B) = (-1)^2\det(B) = 1$ et de même pour C.
 — Sinon, le triplet (A, B, C) convient.

▷ Si $\mathrm{Tr}\ A^3 \equiv 2[9]$: grâce aux questions 25a et 25b, $\mathrm{Tr}\ A^3 + \mathrm{Tr}\ B^3 \equiv 0, 2, 4[9]$. Les cas $\mathrm{Tr}\ A^3 + \mathrm{Tr}\ B^3 \equiv 4[9]$ sont exclus.
 — Si $\mathrm{Tr}\ B^3 \equiv 0[9]$, on prend $(A_1, B_1, C_1) = (B, A, C)$.
 — Si $\mathrm{Tr}\ B^3 \equiv -2[9]$, dans ce cas $\mathrm{Tr}\ C^3 \equiv 0[9]$ et $A^3 + (-C)^3 \equiv (-B)^3$, on prend donc $(A_1, B_1, C_1) = (-C, A, -B)$.

▷ Si $\mathrm{Tr}\ A^3 \equiv -2[9]$, on se ramène au cas précédent via la relation $(-A)^3 + (-B)^3 = (-C)^3$.

Étant donnée une matrice $M = [a_{i,j}]_{1\leqslant 2, j\leqslant 2}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$, on note $\dot{M} = [\dot{a}_{i,j}]_{1\leqslant 2, j\leqslant 2}$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ où $\dot{a}_{i,j}$ est la classe de $a_{i,j}$ dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

ii) **Dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[X]$, démontrer que les polynômes caractéristiques de $\dot{B}_1$ et de $\dot{C}_1$ sont égaux à $(X-1)^2$.**
Comme $\mathrm{Tr}\ B_1^3 = (\mathrm{Tr}\ B_1)^3 - 3\,\mathrm{Tr}\ B_1$, le raisonnement de la question 25a nous assure que $\mathrm{Tr}\ B_1 \equiv 2[3]$ (ce qui correspond au cas $\ell = 2$). Ainsi, dans le corps $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$,

$$\chi_{\dot{B}_1} = X^2 - (\mathrm{Tr}\ \dot{B}_1)X + \det \dot{B}_1 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$

iii) **Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$, démontrer que chacune des matrices $\dot{B}_1$ et $\dot{C}_1$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix}1 & k \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, avec k un élément de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.**

Le polynôme caractéristique de la matrice $\dot{B}_1$ est scindé dans le corps $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et admet pour seule racine 1, donc B_1 est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ et est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix}1 & k \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, avec k dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. On raisonne de même pour $\dot{C}_1$.

iv) **Montrer que $(\dot{A}_1)^3$ est égale à $\dot{0}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$, en déduire une contradiction.**

On note P une matrice inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ telle que $\dot{B}_1 = P\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$ dont l'existence a été établie à la question précédente. Remarquons alors que

$$\dot{B}_1^{\,3} = P\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}^3 P^{-1} = P\begin{pmatrix}1 & 3k\\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1} = I_2$$

et de même $\dot{C}_1^{\,3} = I_2$, la relation $A_1^3 + B_1^3 = C_1^3$ entraîne donc $\dot{A}_1^3 = 0$.
Enfin, $\det\left(\dot{A}_1^3\right) = (\det(\dot{A}_1))^3 = 0$, donc $\det(\dot{A}_1) = 0$ puisque $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ est un corps, ce qui fournit la contradiction espérée.

Nous venons de démontrer que si trois matrices A, B et C de $SL_2(\mathbf{Z})$ vérifient $A^3 + B^3 = C^3$, alors on a $\mathrm{Tr}\,(A^3) \equiv 0[9]$, $\mathrm{Tr}\,(B^3) \equiv 0[9]$ *et* $\mathrm{Tr}\,(C^3) \equiv 0[9]$.

26. Soient α et m deux éléments de Q tels que 2α et $2m$ appartiennent à Z et qui vérifient les relations $2\alpha \equiv 0[9]$ et $2m \equiv 0[9]$.
On suppose qu'il existe deux éléments x et y de Q tels que

$$\left(\alpha m + \frac{1}{2}\right)^2 - (\alpha^2 - 1)(m^2 - 1) = x^2 - (\alpha^2 - 1)y^2 \quad (*).$$

On note alors d le plus petit entier naturel non nul tel que $x = \frac{r}{d}$ et $y = \frac{s}{d}$, avec r et s des éléments de Z ; on admet alors que

$$d^2\left[(4\alpha m + 2)^2 - \left((2\alpha)^2 - 4\right)\left((2m)^2 - 4\right)\right] = (4xd)^2 - \left((2\alpha)^2 - 4\right)(2yd)^2 \quad (**).$$

(a) Démontrer que l'on a

$$\left[(4\alpha m + 2)^2 - \left((2\alpha)^2 - 4\right)\left((2m)^2 - 4\right)\right] \equiv 6[9]$$

et

$$(4xd)^2 + (2yd)^2 \equiv 0[3].$$

Calculons les restes modulo 9 des quantités mises en jeu : $(4\alpha m + 2)^2 \equiv 2^2[9]$ et $((2\alpha)^2 - 4)((2m)^2 - 4) \equiv (-4)^2[9]$. On obtient ainsi

$$(4\alpha m + 2)^2 - ((2\alpha)^2 - 4)((2m)^2 - 4) \equiv 4 - 16[9] \equiv 6[9]$$

On a $4xd \in \mathbf{Z}$ et $2yd \in \mathbf{Z}$, car d est un dénominateur commun aux fractions x et y.
Notons $P = (4xd)^2 - \left((2\alpha)^2 - 4\right)(2yd)^2$. Puisque $2\alpha \equiv 0[9]$, on a directement $P \equiv (4xd)^2 + 4(2yd)^2[3] \equiv (4xd)^2 + (2yd)^2[3]$.
Grâce à la relation fournie, on tire $P = 6d^2 + 9k$ avec $k \in \mathbf{Z}$, donc $(4xd)^2 + (2yd)^2 \equiv 0[3]$.

(b) Montrer que l'on a $4xd \equiv 0[3]$ et $2yd \equiv 0[3]$.
On pose $a = 4xd \in \mathbf{Z}$ et $b = 2yd$. Les quantités a^2 et b^2 sont congrus à 0 ou 1 modulo 3 et $a^2 \equiv 0[3]$ si et seulement si $a \equiv 0[3]$. Ainsi, $a^2 + b^2 \equiv 0[3]$ implique que $a^2 \equiv 0[3]$ et $b^2 \equiv 0[3]$, donc $a \equiv 0[3]$ et $b \equiv 0[3]$.

(c) À l'aide de l'égalité $(**)$ montrer que 3 divise d.

On a $4xd = 3p$ et $2yd = 3q$, donc $(4xd)^2 - \left((2\alpha)^2 - 4\right)(2yd)^2 \equiv 0[9]$.
Or, $\left[(4\alpha m + 2)^2 - \left((2\alpha)^2 - 4\right)\left((2m)^2 - 4\right)\right] \equiv 6[9]$, donc $6d^2 \equiv 0[9]$, ou encore $2d^2 \equiv 0[3]$. Ainsi, $3|2d^2$, puis d'après le lemme de Gauss $3|d^2$, et toujours d'après le lemme de Gauss, $3|d$.

(d) En déduire une contradiction sur la définition de d.

D'après la question 26b, il existe $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $\begin{cases} xd = 3u \\ 2yd = 3v \end{cases}$ car $4xd \equiv xd[3]$.

Par ailleurs, la question précédente nous assure de l'existence de $d' \in \mathbf{N}^*$ tel que $d = 3d'$.
Ainsi, $\begin{cases} xd' = u \\ 2yd' = v \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2xd' \in \mathbf{Z} \\ 2yd' \in \mathbf{Z} \end{cases}$. Or, $2d' < 3d' = d$, ce qui contredit la minimalité de d.

27. Soient α et m deux éléments de $\mathbf{Q}$ tels que 2α et $2m$ appartiennent à $\mathbf{Z}$ et qui vérifient les relations $2\alpha \equiv 0[9]$ et $2m \equiv 0[9]$.
Montrer qu'il n'existe pas de matrices U et V de $SL_2(\mathbf{Z})$ vérifiant

$$\mathrm{Tr}\,(U) = 2\alpha, \mathrm{Tr}\,(V) = 2m \text{ et } \det(U + V) = 1.$$

Supposons que de tels U et V existent. La conclusion de la partie **V** nous assure de l'existence de rationnels x et y tels que

$$\left(\alpha m + \frac{1}{2}\right)^2 - (\alpha^2 - 1)(m^2 - 1) = x^2 - Dy^2 \qquad (\star)$$

La relation $(\star)$ est impossible, grâce à la contradiction de la question précédente.

28. Montrer si 3 divise n, alors l'équation $X^n + Y^n = Z^n$ d'inconnues X, Y et Z n'admet pas de solutions dans $SL_2(\mathbf{Z})$.

La conclusion de la question 25 nous assure que s'il existe $X, Y, Z \in SL_2(\mathbf{Z})$ telles que $X^3 + Y^3 = Z^3$, alors Tr $X^3 \equiv 0[9]$, ainsi que Tr $Y^3 \equiv 0[9]$ et Tr $Z^3 \equiv 0[9]$.
On pose $U = X^3$ et $V = Y^3$. Puisque $\det(U) = 1$ et $\det(V) = 1$, et $\det(U + V) = \det(Z^3) = 1$, ainsi que Tr $U \equiv 0[9]$ et Tr $V \equiv 0[9]$, cela est en contradiction avec la question 27. Par conséquent, l'équation $X^3 + Y^3 = Z^3$ n'a pas de solutions dans $SL_2(\mathbf{Z})$. De même, si $n = 3\ell$ est divisible par 3, un triplet $(X, Y, Z) \in SL_2(\mathbf{Z})^3$ solution de $X^n + Y^n = Z^n$ fournirait une solution (X^ℓ, Y^ℓ, Z^ℓ) de l'équation de degré trois, ce qui est absurde.

VII. Recherche de solutions de $X^n + Y^n = Z^n$ dans $SL_2(\mathbf{Z})$ si n n'est pas divisible par 3 ou 4.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et soit $p \in \mathbf{N}^*$. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ est k-périodique si $M^k = I_p$.
Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = -I_2$ trois matrices de $SL_2(\mathbf{Z})$ qui vérifient la relation $A + B = C$.

29. Montrer qu'une matrice k-périodique est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$.

Soit M une matrice k-périodique de $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$, avec $k \in \mathbf{N}^*$. Le polynôme $X^k - 1 = \prod_{l=0}^{k-1}(X - e^{\frac{2il\pi}{k}})$ est scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$ et annule M, donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$.

30. (a) Déterminer toutes les matrices X de $SL_2(\mathbf{Z})$ qui vérifient $\mathrm{Tr}\,(X) = -1$ et $X^2 = A$. Montrer que ces matrices sont 12-périodiques,

Grâce au théorème de Cayley-Hamilton, on a $X^2 - \mathrm{Tr}\,(X)X + \det(X)I_2 = 0$, ce qui permet d'obtenir $X = -X^2 - I_2 = -A - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B$. Une seule matrice X est donc candidate.

On vérifie enfin que $X^{12} = A^6 = B^3 = I_2$, ce qui prouve bien la 12-périodicité de X.

(b) Déterminer une matrice Y de $SL_2(\mathbf{Z})$ qui est 12-périodique et qui vérifie la relation $Y^2 = B$.

D'après la question précédente, $Y = A$ convient.

(c) En déduire au moins un triplet (X, Y, Z) de matrices de $(SL_2(\mathbf{Z}))^3$, constitué de matrices 12-périodiques, tel que $X^2 + Y^2 = Z^2$.

Rappelons que $C = A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2$. Ainsi, $X = B$, $Y = A$ et $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent. On vérifie au passage que $Z^{12} = (Z^2)^6 = (-I_2)^6 = I_2$, donc Z est 12-périodique. On remarque bien que X, Y et Z sont dans $SL_2(\mathbf{Z})$.

31. Soit $n \equiv 2[12]$, montrer qu'il existe au moins un triplet (X, Y, Z) de matrices de $(SL_2(\mathbf{Z}))^3$ tel que $X^n + Y^n = Z^n$.

Soit $k \in \mathbf{Z}$. D'une part, on a $X^{2+12k} = X^2X^{12k} = X^2$, sachant que par inversibilité de la matrice X, le cas où $k < 0$ est licite. On procède de même pour Y et Z, ce qui donne $X^{2+12k} + Y^{2+12k} = Z^{2+12k}$ et fournit un triplet (X, Y, Z) solution. On remarque bien que X, Y et Z sont dans $SL_2(\mathbf{Z})$.

32. En déduire, lorsque $n \equiv -2[12]$, qu'il existe au moins un triplet (X, Y, Z) de matrices de $(SL_2(\mathbf{Z}))^3$ tel que $X^n + Y^n = Z^n$.

On reprend un triplet (X, Y, Z) de matrices 12-périodiques, solution de $X^2 + Y^2 = Z^2$. On a donc $(X^{-1})^{-2} + (Y^{-1})^{-2} = (Z^{-1})^{-2}$. Comme dans la question précédente, on montre que le triplet (X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}) est solution de $X^n + Y^n = Z^n$, pour $n \equiv -2[12]$. On remarque bien que X^{-1}, Y^{-1} et Z^{-1} sont dans $SL_2(\mathbf{Z})$, car par exemple $X^{-1} = \frac{1}{\det(X)}{}^t(Com(X)) = {}^t(Com(X))$ est à coefficients entiers et de déterminant 1.

33. Lorsque $n \equiv 1[6]$ ou $n \equiv 5[6]$, à l'aide des matrices A et B déterminer des matrices X, Y et Z de $SL_2(\mathbf{Z})$ qui vérifient la relation $X^n + Y^n = Z^n$.

Puisque $A^1 + B^1 = C^1$, la 6-périodicité des matrices A, B et C permet de construire des solutions pour $n \equiv 1[6]$. Si $n \equiv 5[6]$, on procède de même avec (A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}) puisque $A^6 = I_2$ et l'inversibilité de A donnent $A^5 = A^{-1}$. Pour les mêmes raisons que la question précédente, A^{-1}, B^{-1} et C^{-1} sont dans $SL_2(\mathbf{Z})$.

34. Suivant les valeurs de l'entier strictement positif n, discuter l'existence de matrices X, Y et Z de $SL_2(\mathbf{Z})$ qui vérifient la relation $X^n + Y^n = Z^n$.

Le bilan des résultat précédents donne :

- ▷ Pour $n \equiv 2, 10[12]$, l'équation admet des solutions,
- ▷ pour $n \equiv 1, 5, 7, 11[12]$, l'équation admet des solutions,
- ▷ pour $n \equiv 0, 3, 6, 9[12]$, l'équation n'admet pas de solutions d'après la conclusion de la partie **VI**.
- ▷ pour $n \equiv 0, 4, 8[12]$, l'équation n'admet pas de solutions d'après la conclusion de la partie **II**.

VIII. Réseaux de $\mathbf{Q}^n$.

Dans cette partie, n et m désignent deux entiers naturels non nuls. Soient $v_1, ..., v_m$ des

éléments non nuls de $\mathbf{Q}^n$, posons

$$\mathcal{R} = \mathbf{Z}v_1 + \ldots + \mathbf{Z}v_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} k_i v_i \;\middle|\; k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Si $n \geqslant 2$, on note

$$\mathbf{Q}^{n-1} \times \{0\} = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \;\middle|\; x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbf{Q} \right\}.$$

35. Démontrer que $\mathcal{R}$ est un sous-groupe additif de $(\mathbf{Q}^n, +)$.

L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbf{Z}^m, +) & \to & (\mathbf{Q}^n, +) \\ (k_1, \ldots, k_m) & \mapsto & \sum_{i=1}^{m} k_i v_i \end{array} \right.$.
est un morphisme de groupes d'image $\mathcal{R}$, donc $\mathcal{R}$ est un sous-groupe additif de $(\mathbf{Q}^n, +)$.

36. Si $n = 1$, montrer qu'il existe un élément r de $\mathbf{Q}$ tel que

$$\mathcal{R} = r\mathbf{Z} = \left\{ rk \;\middle|\; k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Ce r est-il unique ?

Par définition, $\mathcal{R} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i v_i, (k_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbf{Z}^m \right\}$ avec $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbf{Q}^m$. On note $v_i = \frac{p_i}{q_i}$ avec $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbf{Z}^m$, $(q_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbf{N}^*)^m$ sous forme fractionnaire. On pose enfin $q = \prod_{i=1}^{m} q_i$. Ainsi, $\mathcal{R} = \left\{ \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} k_i p_i \left(\prod_{j \neq i} q_j \right), (k_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbf{Z}^m \right\}$. On pose alors $m_i = p_i \left(\prod_{j \neq i} q_j \right) \in \mathbf{Z}$, et $\mathcal{R}' = \left\{ \sum_{i=1}^{m} k_i m_i,\ (k_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbf{Z}^m \right\}$ est un sous-groupe additif de $\mathbf{Z}$, d'où l'existence de $m \in \mathbf{Z}$ tel que $\mathcal{R}' = m\mathbf{Z}$. Enfin, $\mathcal{R} = \frac{1}{q}\mathcal{R}' = \frac{m}{q}\mathbf{Z}$.

Dans le cadre de l'énoncé, on a : $\mathcal{R} \neq \{0\}$ auquel cas un rationnel r tel que $\mathcal{R} = r\mathbf{Z}$ est non nul et son opposé donnent deux solutions distinctes. On peut facilement prouver l'unicité de r en le supposant positif.

37. On suppose $n \geqslant 2$, posons $\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Q}^n & \to & \mathbf{Q} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_n \end{array} \right.$. Montrer qu'il existe un élément w de $\mathcal{R}$ tel que

$$\pi(\mathcal{R}) = \pi(w)\mathbf{Z} = \{\pi(w)k \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

L'application π est un morphisme de groupes additifs, donc $\pi(\mathcal{R}) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} k_i \pi(v_i),\ (k_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbf{Z}^m \right\}$.
D'après la question 36, puisque $\pi(\mathcal{R}) \subset \mathbf{Q}$, il existe $r \in \mathbf{Q}$ tel que $\pi(\mathcal{R}) = r\mathbf{Z}$. Ainsi, $r = r \times 1 \in \pi(\mathcal{R})$, donc il existe $\omega \in \mathcal{R}$ tel que $r = \pi(\omega)$, ce qui donne finalement $\pi(\mathcal{R}) = \pi(\omega)\mathbf{Z}$.

Dans la suite de cette partie, si $\pi(\mathcal{R}) = \{0\}$, on prendra $w = (0, \ldots, 0)$.

38. Soit x un élément de $\mathcal{R}$ et w un élément de $\mathcal{R}$ défini comme dans la question précédente.

(a) Montrer qu'il existe un couple $(q, \widetilde{x})$ de $\mathbf{Z} \times \left(\mathcal{R} \cap (\mathbf{Q}^{n-1} \times \{0\}) \right)$ tel que $x = qw + \widetilde{x}$.
Grâce à la question 37, $\pi(x) \in \pi(\mathcal{R}) = \pi(\omega)\mathbf{Z}$. Ainsi, il existe $q \in \mathbf{Z}$ tel que $\pi(x) = \pi(\omega)q = \pi(q\omega)$ car π est un morphisme de groupes. Ainsi, $\pi(x - q\omega) = 0$, on pose donc $\widetilde{x} = x - qw$ qui est donc dans $\mathbf{Q}^{n-1} \times \{0\}$, mais aussi dans $\mathcal{R}$, car ce dernier ensemble est un groupe.

(b) Démontrer que $\widetilde{x}$ est unique. L'entier q est-il toujours unique ?

On conserve les notations de la question précédente.

▷ Premier cas : $\pi(\mathcal{R}) = \{0\}$, donc $\omega = 0$ puis $x = \widetilde{x}$ et $\widetilde{x}$ est unique. Dans ce cas, tout $q \in \mathbf{Z}$ convient dans la décomposition précédente donc q n'est pas unique.

- ▷ Second cas : $\pi(\mathcal{R}) \neq \{0\}$. Alors, $q = \frac{\pi(x)}{\pi(\omega)}$ est unique, puis $\widetilde{x} = x - \frac{\pi(x)}{\pi(\omega)}\omega$ est unique. Dans ce cas, soulignons que q est unique.

39. Démontrer que l'on a

$$\mathcal{R} \cap (\mathbf{Q}^{n-1} \times \{0\}) = \mathbf{Z}\widetilde{v_1} + \ldots + \mathbf{Z}\widetilde{v_m} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} k_i \widetilde{v_i} \mid k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{Z} \right\}$$

où les éléments $\widetilde{v_1}, \ldots, \widetilde{v_m}$ de $\mathcal{R}$ sont définis comme dans la question précédente.

Soit $x \in \mathcal{R} \cap (\mathbf{Q}^{n-1} \times \{0\})$. Par définition de $\mathcal{R}$, il existe $(k_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbf{Z}^m$ que l'on fixe tels que $x = \sum_{i=1}^{m} k_i v_i$. On a ensuite : $\forall i \in [\![1, m]\!],\ v_i = p_i \omega + \widetilde{v}_i$ avec $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbf{Z}^m$.

Ainsi, $x = \left(\sum_{i=1}^{m} k_i p_i\right) \omega + \sum_{i=1}^{m} k_i \widetilde{v}_i$, et $x = 0 \cdot \omega + x$, ainsi $x = \widetilde{x}$, et par unicité de $\widetilde{x}$, comme $\sum_{i=1}^{m} k_i \widetilde{v}_i \in \left(\mathbf{Q}^{n-1} \times \{0\}\right) \cap \mathcal{R}$ car cet ensemble est un groupe en tant qu'intersection de deux sous-groupes de $\mathbf{Q}^n$, on en déduit finalement $x = \widetilde{x} = \sum_{i=1}^{m} k_i \widetilde{v}_i$, d'où l'inclusion $\mathcal{R} \cap (\mathbf{Q}^{n-1} \times \{0\}) \subset \mathbf{Z}\widetilde{v_1} + \ldots + \mathbf{Z}\widetilde{v_m}$. L'autre inclusion est immédiate, car tous les $\widetilde{v}_i$ sont dans $\mathcal{R} \cap (\mathbf{Q}^{n-1} \times \{0\})$ et ce dernier ensemble est un groupe additif.

40. Montrer par récurrence sur la dimension de $\mathbf{Q}^n$, qu'il existe des éléments $u_1, \ldots, u_p$ de $\mathcal{R}$ tels que pour tout x de $\mathcal{R}$ il existe un unique p-uplet $(k_1, \ldots, k_p)$ de $\mathbf{Z}^p$ vérifiant $x = \sum_{i=1}^{p} k_i u_i$.

- ▷ **Initialisation :** le cas $n = 1$ correspond au cas de la question 36 avec $u_1 = r$.
- ▷ **Hérédité :** supposons la propriété vraie à un rang n entier naturel non nul.
  - — **Premier cas :** si $\mathcal{R} \subset \mathbf{Q}^n \times \{0\}$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour $\mathbf{Q}^n$.
  - — **Second cas :** supposons $\mathcal{R} \not\subset \mathbf{Q}^n \times \{0\}$. En reprenant les notations des questions précédentes à partir de $\mathbf{Q}^{n+1}$, $\pi(\mathcal{R}) \neq \{0\}$. Il existe donc $\omega \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ tel que $\pi(\mathcal{R}) = \pi(\omega)\mathbf{Z}$ et $\pi(\omega) \neq 0$. En utilisant le second cas de la question 38b, la décomposition $x = p\omega + \widetilde{x}$ est unique pour $(p, \widetilde{x}) \in \mathbf{Z} \times ((\mathbf{Q}^n \times \{0\}) \cap \mathcal{R})$.
    On applique l'hypothèse de récurrence à $(\mathbf{Q}^n \times \{0\}) \cap \mathcal{R} = \left\{\sum_{i=1}^{m} k_i \widetilde{v_i},\ k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{Z}\right\}$ qui a bien la forme voulue, il existe $(u_j)_{2 \leqslant j \leqslant p}$ une $\mathbf{Z}$-base de $(\mathbf{Q}^n \times \{0\}) \cap \mathcal{R}$. Ainsi, on en déduit que $\widetilde{x}$ se décompose de manière unique sous la forme $\widetilde{x} = \sum_{i=2}^{p} \ell_i u_i$ avec $(\ell_i)_{2 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbf{Z}^{p-1}$, et donc x se décompose de façon unique sous la forme $x = \sum_{i=2}^{p} \ell_i u_i + p\omega$. En posant $\omega = u_1$ on en déduit directement que $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ est une $\mathbf{Z}$-base de $\mathcal{R}$, ce qui achève la récurrence.

Une telle famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de $\mathcal{R}$ est appelée $\mathbf{Z}$-base *de $\mathcal{R}$, on notera alors* $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbf{Z} u_i$.

41. Supposons que $vect_{\mathbf{Q}}(v_1, \ldots, v_m) = \mathbf{Q}^n$. Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une Z-base de $\mathcal{R}$ démontrer que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de $\mathbf{Q}^n$ et que $p = n$.

Démontrons que $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est libre et génératrice dans $\mathbf{Q}^n$.

- ▷ Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbf{Q}^p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0$. Soit K un dénominateur commun à tous les λ_i, on note $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = \frac{\mu_i}{K}$ avec $(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbf{Z}^p$. Ainsi, $\sum_{i=1}^{p} \mu_i u_i = 0$. Or, $0 \in \mathcal{R}$, et par unicité de la décomposition établie à la question précédente, tous les μ_i sont nuls, ce qui termine la preuve de la liberté de la famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.
- ▷ Soit $x \in \mathbf{Q}^n$. Il existe par hypothèse $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbf{Q}^m$ tels que $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$. Or, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, il existe $(\gamma_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant p} \in \mathbf{Z}^p$ tel que $v_i = \sum_{j=1}^{p} \gamma_{i,j} u_j$. Ainsi, $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} \alpha_i \gamma_{i,j} u_j = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \gamma_{i,j}\right) u_j$. Notons que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \gamma_{i,j} \in \mathbf{Q}$, ce qui prouve que la famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ engendre $\mathbf{Q}^n$. En conclusion, $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une base du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^n$, donc $n = p$.

IX. Condition pour que certains sous-groupes de $SL_2(\mathbf{Q})$ soient semblables à un sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$.

Soit p un entier strictement positif. Dans cette partie, on identifie $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{Q})$ et $\mathbf{Q}^p$. On note $(e_1, ..., e_p)$ la base canonique de $\mathbf{Q}^p$ et on admet que $(SL_p(\mathbf{Q}), .)$ est un groupe.

42. Soit G un sous-groupe multiplicatif de $(SL_p(\mathbf{Q}), .)$ tel qu'il existe un entier strictement positif d vérifiant

$$\forall M \in G,\ dM \in \mathcal{M}_p(\mathbf{Z}).$$

Soit H le sous-groupe additif de $(\mathbf{Q}^p, +)$ engendré par les éléments Me_i, avec M une matrice de G et i un élément de $[\![1, p]\!]$; c'est le plus petit sous-groupe de $(\mathbf{Q}^p, +)$ contenant l'ensemble $\{Me_i \mid M \in G,\ i \in [\![1, p]\!]\}$ et il peut s'écrire sous la forme suivante

$$H = \left\{ y_1 + y_2 + ... + y_q \mid q \in \mathbf{N}^*,\ y_1, y_2, ..., y_q \in \mathcal{M} \right\}$$

où

$$\mathcal{M} = \left\{ Me_i \mid M \in G,\ i \in [\![1, p]\!] \right\} \cup \left\{ -Me_i \mid M \in G,\ i \in [\![1, p]\!] \right\} \cup \{0\}.$$

(a) Démontrer que les vecteurs $e_1, ..., e_p$ appartiennent à H.

Le sous-groupe G de $SL_p(\mathbf{Q})$ contient I_p, ainsi $\forall i \in [\![1, p]\!], I_p e_i = e_i \in H$.

(b) Démontrer que H est stable par G, c'est-à-dire que l'on a

$$\forall M \in G, \forall h \in H,\ Mh \in H.$$

Soit $A = \{Me_i,\ M \in G,\ i \in [\![1, p]\!]\}$. Par hypothèse, $< A >= H$.
Soit $N \in G$. Par structure de groupe de G, $\forall M \in G,\ \forall i \in [\![1, p]\!], NMe_i \in A$ car $NM \in G$. Ainsi, $NA \subset A$, puis $NA \subset H$. Soit $X \in H \setminus \{0\}$. Il existe $\ell \in \mathbf{N}^*$, $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in A^\ell$ et $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant \ell} \in \{1, -1\}^\ell$ tels que $X = \sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i A_i$. Par conséquent, $NX = \sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i NA_i \in H$ car H est un groupe additif. Ainsi, $NH \subset H$, donc H est stable par N et donc par G.

(c) Soient $M \in G$ et $j \in [\![1, p]\!]$. Montrer qu'il existe des éléments $r_1, ..., r_p$ de $[\![0, d-1]\!]$ et des éléments $q_1, ..., q_p$ de $\mathbf{Z}$ tels que

$$Me_j = \sum_{i=1}^{p} q_i e_i + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{p} r_i e_i.$$

Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Le vecteur Me_j est un élément de $\mathbf{Q}^p$ qui admet $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ comme base, donc il existe $(k_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbf{Q}^p$ tels que $Me_j = \sum_{i=1}^{p} k_i e_i$.
Or, $dM \in M_p(\mathbf{Z})$, et dMe_j représente la j-ème colonne de dM ce qui s'écrit $dMe_j = \sum_{i=1}^{p} dk_i e_i$ avec $\forall i \in [\![1, p]\!], dk_i \in \mathbf{Z}$. On pose ensuite pour $i \in [\![1, p]\!]$, $dk_i = dq_i + r_i$ avec $r_i \in [\![0, d-1]\!]$ et $q_i \in \mathbf{Z}$ la division euclidienne de $dk_i \in \mathbf{Z}$ par d. Cela donne enfin $Me_j = \sum_{i=1}^{p} q_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \frac{r_i}{d} e_i$

(d) Montrer qu'il existe une famille génératrice $(v_1, ..., v_m)$ de $\mathbf{Q}^p$ telle que

$$H = \mathbf{Z}v_1 + ... + \mathbf{Z}v_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} k_i v_i \mid k_1, ..., k_m \in \mathbf{Z} \right\}.$$

On conserve les notations de la question précédente. Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Comme $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in H$, et $Me_j \in H$, le fait que H soit un groupe et la question précédente donnent : $\sum_{i=1}^{p} \frac{r_i}{d} e_i \in H$. Posons $B = \{e_1, \ldots, e_p\} \cup \{\sum_{i=1}^{p} \frac{r_i}{d} e_i,\ \forall i \in [\![1,p]\!], r_i \in [\![0, d-1]\!]\ et\ \sum_{i=1}^{p} \frac{r_i}{d} e_i \in H\}$. L'ensemble B est bien un ensemble fini car les r_i varient dans $[\![0, d-1]\!]$. De plus, $A \subset <B>$ grâce à la remarque initiale et à la question précédente. Ainsi, $<A> \subset <B>$ car $<A>$ est le plus petit sous-groupe additif de $\mathbf{Q}^p$ contenant A.

Par ailleurs, $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in A$, et par définition de $\sum_{i=1}^{p} \frac{r_i}{d} e_i$ et de B, on a donc $B \subset H = <A>$. En conclusion, $<B> \subset <A>$ car $<B>$ est le plus petit sous-groupe de $\mathbf{Q}^n$ contenant B, ainsi $H = <A> = <B>$.

L'ensemble B contient la base canonique de $\mathbf{Q}^p$.

Ainsi, $\mathbf{Q}^p = \mathrm{vect}_{\mathbf{Q}}(e_1, \ldots, e_p) \subset \mathrm{vect}_{\mathbf{Q}}(B) \subset \mathbf{Q}^p$, donc $\mathrm{vect}_{\mathbf{Q}}(B) = \mathbf{Q}^p$.

(e) En déduire qu'il existe une base $(u_1, ..., u_p)$ de $\mathbf{Q}^p$ telle que

$$\forall M \in G,\ Mu_i \in \mathbf{Z}u_1 + ... + \mathbf{Z}u_p = \left\{ \sum_{i=1}^{p} k_i u_i \mid k_1, ..., k_p \in \mathbf{Z} \right\}.$$

On reprend les notations de la question précédente et on prend $\mathcal{R} = H = <B>$. En appliquant les résultats des questions 40 et 41 de la partie précédente (car $\mathrm{vect}_{\mathbf{Q}}(B) = \mathbf{Q}^p$), il existe une $\mathbf{Z}$-base $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de H telle que $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ soit une base de $\mathbf{Q}^p$.

Par ailleurs, : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ u_i \in H = \oplus_{i=1}^{p} \mathbf{Z}u_i$, et comme H est stable par G d'après la question 42b, alors $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \forall M \in G,\ Mu_i \in H = \oplus_{i=1}^{p} \mathbf{Z}u_i$.

(f) En déduire qu'il existe une matrice F de $GL_p(\mathbf{Q})$ telle que

$$\forall M \in G,\ F^{-1}MF \in SL_p(\mathbf{Z}).$$

Soit F la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ à la base $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$. Soit $M \in G$. La matrice $F^{-1}MF$ est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M dans la base $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ que l'on note f. Or, grâce à la question précédente, $\forall j \in [\![1,p]\!],\ \exists (m_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathbf{Z}^p,\ f(u_j) = \sum_{i=1}^{p} m_{i,j} u_i$. En conclusion, la matrice de f dans la base des (u_i) est à coefficients entiers, donc $F^{-1}MF \in M_p(\mathbf{Z})$. Or, $\det(M) = 1$, donc $\det(F^{-1}MF) = 1$, ce qui donne enfin $\forall M \in G,\ F^{-1}MF \in SL_p(\mathbf{Z})$.

Jusqu'à la fin du problème, on se place dans le cas particulier $p = 2$.

43. Soient A et B deux éléments de $SL_2(\mathbf{Q})$ et soit G le sous-groupe (multiplicatif) de $(SL_2(\mathbf{Q}), .)$ engendré par A et B. C'est le plus petit sous-groupe de $(SL_2(\mathbf{Q}), .)$ contenant A et B, il peut s'écrire

$$G = \left\{ Q_1 Q_2 \ldots Q_p \mid p \in \mathbf{N}^*,\ Q_1, Q_2, \ldots, Q_p \in \{I_2, A, B, A^{-1}, B^{-1}\} \right\}.$$

On considère K le sous-groupe additif de $(\mathcal{M}_2(\mathbf{Q}), +)$ suivant

$$K = \mathbf{Z}I_2 + \mathbf{Z}A + \mathbf{Z}B + \mathbf{Z}AB + \mathbf{Z}BA + \mathbf{Z}ABA + \mathbf{Z}BAB$$

que l'on peut écrire

$$K = \left\{ k_1 I_2 + k_2 A + k_3 B + k_4 AB + k_5 BA + k_6 ABA + k_7 BAB \mid k_1, \ldots, k_7 \in \mathbf{Z} \right\}.$$

On suppose de plus que $\mathrm{Tr}\,(A)$, $\mathrm{Tr}\,(B)$ et $\mathrm{Tr}\,(AB)$ appartiennent à Z.

(a) Démontrer que A^{-1} et B^{-1} appartiennent à K.

Grâce au théorème de Cayley-Hamilton, on écrit $A^2 = \mathrm{Tr}\,(A)A - \det(A)I_2$. Par hypothèse, $\det(A) = 1$, et puisque A est inversible, cela donne $A^{-1} = \mathrm{Tr}\,(A)I_2 - A \in K$. On raisonne de même pour B.

(b) Démontrer que $G \subset K$.

L'ensemble G est constitué de toutes les multiplications possibles par A, B, A^{-1}, B^{-1}. Il suffit donc de démontrer que K est stable par multiplication par ces matrices.

- ▷ Pour la multiplication à gauche par A, il suffit de prouver que A^2B, A^2BA, A^2 et $ABAB$ restent dans K. Or, $A^2 = \mathrm{Tr}\,(A)A - I_2$ donc A^2B, A^2 et A^2BA restent dans K. De même $ABAB = (AB)^2 = \mathrm{Tr}\,(AB)AB - I_2$ montre que $ABAB$ est dans K.
- ▷ On procède de même pour la multiplication à droite par A, et à gauche et à droite par B.
- ▷ Puisque $A^{-1} = \mathrm{Tr}\,(A)I_2 - A$, on prouve de même que K est stable par la multiplication par A^{-1} à droite et à gauche, puis par B^{-1}.

(c) En déduire qu'il existe un entier strictement positif d tel que

$$\forall M \in G,\ dM \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z}).$$

Il existe $d \in \mathbf{N}^*$ tel que $dI_2, dA, dB, dAB, dBA, dABA, dBAB$ soient toutes à coefficients entiers en prenant un dénominateur commun de toutes les matrices I_2, A, B, AB, BA, ABA et BAB. Ainsi, $dK \subset M_2(\mathbf{Z})$, par suite $dG \subset M_2(\mathbf{Z})$.

44. Soient $A, B \in SL_2(\mathbf{Q})$.

(a) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

i) **Il existe une matrice F de $GL_2(\mathbf{Q})$ telle que $F^{-1}AF$ et $F^{-1}BF$ appartiennent à $SL_2(\mathbf{Z})$.**

ii) $\mathrm{Tr}\,(A), \mathrm{Tr}\,(B)$ **et** $\det(A + B)$ **appartiennent à Z.**

- ▷ Supposons **i)** vérifiée. Alors, $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(F^{-1}AF) \in \mathbf{Z}$ car $F^{-1}AF$ est à coefficients entiers. De même, $\mathrm{Tr}\,(B) \in \mathbf{Z}$. Par ailleurs, $\det(A+B) = \det\left(F^{-1}(A + B)F\right) = \det\left(F^{-1}AF + F^{-1}BF\right) \in \mathbf{Z}$ car $F^{-1}AF + F^{-1}BF$ est également à coefficients entiers, d'où **ii)**.
- ▷ Supposons **ii)**. Prouvons que $\mathrm{Tr}\,(AB) \in \mathbf{Z}$. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} au + bw & * \\ * & cv + dx \end{pmatrix}$ alors $\det(A + B) = (a + u)(d + x) - (c + w)(b + u) = (ad - bc) + (ux - vw) + ax + ud - cv - bw$. Or $ad - bc = ux - vw = 1$, ce qui donne $\det(A + B) = 2 + ax + au + ud + dx - \mathrm{Tr}\,(AB) = 2 + \mathrm{Tr}\,(A)\,\mathrm{Tr}\,(B) - \mathrm{Tr}\,(AB)$, d'où $\mathrm{Tr}\,(AB) = 2 + \mathrm{Tr}\,(A)\,\mathrm{Tr}\,(B) - \det(A+B)$, d'où $\mathrm{Tr}\,(AB) \in \mathbf{Z}$. Or, par hypothèse, $\mathrm{Tr}\,(A), \mathrm{Tr}\,(B) \in \mathbf{Z}$, donc d'après la question 43c, il existe $d \in \mathbf{N}^*$ tel que $\forall M \in G,\ dM \in M_2(\mathbf{Z})$. La question 42f nous assure alors de l'existence de $F \in GL_2(\mathbf{Q})$ tel que : $\forall M \in G,\ F^{-1}MF \in SL_2(\mathbf{Z})$. En particulier, cela assure que $F^{-1}AF, F^{-1}BF \in SL_2(\mathbf{Z})$, ce qui prouve bien **i)** et termine la preuve de l'équivalence.

(b) Soit n un entier strictement positif. Soient X, Y et Z des matrices de $SL_2(\mathbf{Q})$ telles que $\mathrm{Tr}\,(X)$ et $\mathrm{Tr}\,(Y)$ appartiennent à Z et qui satisfont la relation $X^n + Y^n = Z^n$.

Montrer qu'il existe une matrice F de $GL_2(\mathbf{Q})$ telle que $X_1 = F^{-1}XF$, $Y_1 = F^{-1}YF$ et $Z_1 = F^{-1}ZF$, avec X_1^n, Y_1^n et Z_1^n qui appartiennent à $SL_2(\mathbf{Z})$ et $X_1^n + Y_1^n = Z_1^n$.

Le polynôme caractéristique de X s'écrit $\chi_X(T) = T^2 - \mathrm{Tr}\,(X)T + 1$. La division euclidienne de T^n par χ_X ne va faire intervenir qu'un quotient et un reste à coefficients entiers car T^n et

χ_X sont à coefficients entiers et χ_X est unitaire. Ainsi, $T^n = \chi_X(T)Q(T) + aT + b$ avec $a, b \in \mathbf{Z}$, d'où $X^n = aX + bI_2$, et $\mathrm{Tr}\,(X^n) = a\,\mathrm{Tr}\,(X) + 2b \in \mathbf{Z}$. On obtient de même $\mathrm{Tr}\,(Y^n) \in \mathbf{Z}$.

Enfin, $\det(X^n + Y^n) = \det(Z^n) = \det(Z)^n = 1 \in \mathbf{Z}$. La question précédente nous affirme l'existence de $F \in GL_2(\mathbf{Q})$ tel que $F^{-1}X^nF$ et $F^{-1}Y^nF$ soient dans $SL_2(\mathbf{Z})$.

Ainsi, $F^{-1}X^nF + F^{-1}Y^nF = F^{-1}Z^nF \in M_2(\mathbf{Z})$.

En outre, puisque $(F^{-1}XF)^n = F^{-1}X^nF$, alors en posant $X_1 = F^{-1}XF$ et $Y_1 = F^{-1}YF$ et $Z_1 = F^{-1}ZF$, ces matrices vérifient $X_1^n + Y_1^n = Z_1^n$ avec $X_1^n, X_2^n \in M_2(\mathbf{Z})$, donc $Z_1^n \in M_2(\mathbf{Z})$.

Enfin, puisque $\det(X^n) = \det(Y)^n = \det(Z)^n = 1$, on en déduit bien que X_1^n, X_2^n et Z^n sont dans $SL_2(\mathbf{Z})$.

FIN DU SUJET

2.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
https://interne.agreg.org/data/uploads/epreuves/ep2/22-ep2.pdf

2.2.1 Statistiques de réussite

Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions.

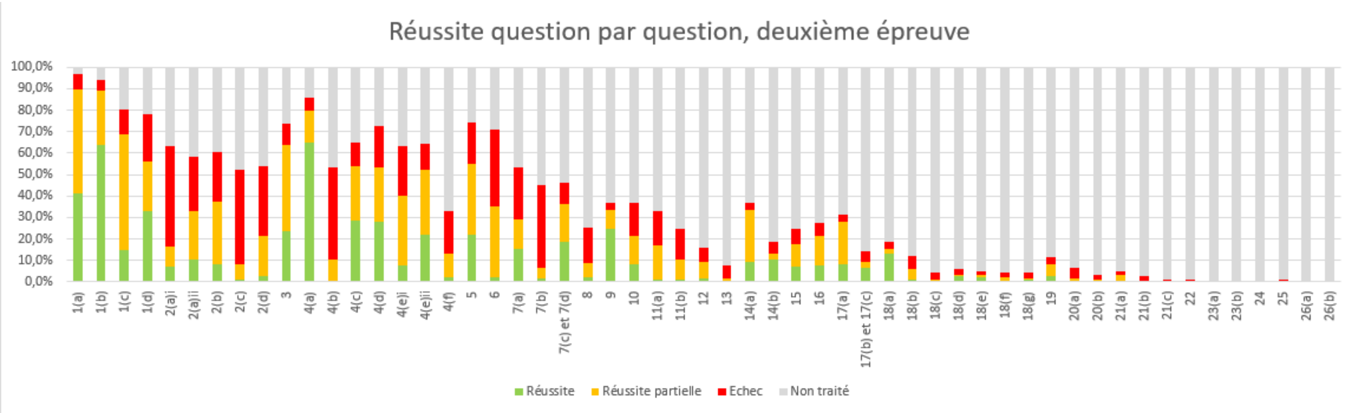


Figure 2.2 – Lecture : pour chaque question (ou item de correction lorsque plusieurs composantes sont évaluées dans une même question), la zone verte indique le pourcentage de candidats ayant fourni une bonne réponse, la zone orange représente le pourcentage de ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone rouge représente le pourcentage de ceux ayant proposé une réponse erronée.

2.2.2 Analyse de l'épreuve et commentaires par questions

Le sujet de la seconde épreuve écrite portait sur la notion d'estimateur. La première partie consistait en quelques exercices, dont un « vrai ou faux » et une question de cours, portant sur des résultats classiques sur les séries entières. La notion de famille sommable était introduite dans la deuxième partie dans le but de démontrer le théorème du transfert. La notion d'estimateur était introduite et étudiée dans la partie suivante et l'inégalité de Cramer-Rao faisait l'objet de la dernière partie du sujet.

Passons en revue certaines questions du sujet.
Première partie.

1a. La rédaction n'est pas toujours soignée. On trouve des confusions entre suite et série, entre série et limite. Certains manipulent la limite ou le reste avant d'avoir prouvé l'existence.

1b. Question en général bien réussie même si dans certaines copies, on se contente de dire qu'on peut trouver des contre-exemples sans les expliciter.

1c. Le but de cette question était de démontrer partiellement le critère de d'Alembert et justifier la réponse en se contenter d'énoncer ce critère n'était pas suffisant.

1d. Question bien traitée dans de nombreuses copies. Il s'agissait bien de trouver un exemple de suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction non continue : se contenter d'écrire que la convergence de la suite doit être uniforme pour préserver la continuité de la limite n'était pas suffisant et constituait une erreur de logique.

Dans la question 2, certains candidats n'ont pas compris que « question de cours » signifiait que l'on demandait les démonstrations et non l'utilisation des résultats.

2ai. Trop souvent, les candidats confondent borne supérieure et maximum : le rayon de convergence n'est pas nécessairement dans l'ensemble. Certains candidats se contentent de citer le lemme d'Abel.

2aii. Bien que plus directe que la précédente, cette question n'a pas toujours été bien traitée. Certains montrent que la série ne converge pas absolument, ce qui ne permet pas de conclure. D'autres affirment que puisque le terme général n'est pas borné, il tend vers l'infini.

2b. Question assez bien traitée dans l'ensemble. Certains évoquent la dérivabilité comme régularité de S. On rencontre de nombreuses confusions des liens entre la convergence absolue et la convergence uniforme.

2c. Question peu traitée. Certains tentent de passer par une sorte de réciproque du critère de d'Alembert. D'autres utilisent ce critère, qui est inapplicable ici, quand bien même u_k est non nul pour tout k.

2d. Cette question consistait à appliquer soigneusement les questions précédentes, ce qui n'a pratiquement jamais été fait.

3. Question particulièrement bien réussie. On peut regretter quelques erreurs de calculs dans de rares cas et le fait de ne pas vérifier les hypothèses du théorème de d'Alembert.

4b. Question difficile. Les candidats qui se sont lancés dans une récurrence n'ont pas abouti.

4c. De nombreux candidats savent mener une récurrence forte rigoureusement. D'autres révèlent une mauvaise maîtrise des hypothèses de récurrence avec des confusions entre les différents indices en jeu.

4d. Pour éviter tout problème, il convient de majorer les quantités avec les valeurs absolues. Beaucoup de candidats se sont contentés d'une majoration sans valeur absolue, ce qui est insuffisant.

4e. La résolution de l'équation différentielle n'est pas toujours satisfaisante. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène et du premier ordre dont on connaît les solutions. Il n'était pas demandé de redémontrer la forme des solutions de ce type d'équation. Par ailleurs le passage au logarithme sans se méfier du signe de f est douteux. La résolution rigoureuse de ces équations a déjà été signalée dans plusieurs rapports, on peut s'étonner que malgré son aspect élémentaire et malgré ce qui est écrit dans les précédents rapports elle soit malmenée par nombre de candidats. Plusieurs candidats énoncent l'expression générale des solutions sous la forme e^{e^x+c}, ce qui interdirait l'équation d'avoir la solution nulle ou des solutions qui prennent des valeurs négatives malgré le théorème d'existence et d'unicité.

Deuxième partie.

5. Cette question abordable doit être rédigée méthodiquement. Ceux qui commencer à fixer un sous-ensemble fini J de I s'en sortent en général correctement. Les autres ont du mal à justifier le passage à la borne supérieure. La plupart des candidats n'ont pas justifié l'existence de cette borne supérieure (ce qui est d'ailleurs un problème récurrent dans les questions suivantes).

6. Question plus difficile, correctement résolue dans de rares copies. La démonstration de la sommabilité est souvent traitée correctement, mais l'égalité des sommes est rarement correctement démontrée.

7c et 7d. Nombreux sont ceux qui ont vu ici une application directe de la question précédente et du cours. Il convient de bien rappeler que les termes sont positifs pour affirmer la croissance des sommes partielles.

11a. La sommabilité a souvent été bien donnée. Attention, la partie positive de $u + v$ n'est pas la somme des parties positives de u et de v.

11b. La sommabilité a souvent été bien donnée. Dans de rares cas, la suite de la question est correctement bien menée.

Troisième partie.

14a. Question bien traitée pour ceux qui l'ont abordée. Peu de candidats évoquent la convergence absolue (seulement la convergence) pour l'existence des moments d'ordre r.

15. Même si la question est bien résolue dans l'ensemble, l'univers-image de la somme n'est presque jamais précisé. Certains se contentent de calculer l'espérance et la variance de la somme pour conclure, comme s'ils caractérisaient la loi. L'indépendance n'est pas toujours précisée pour avancer dans les calculs.

16. Les calculs n'étant pas compliqués, il était important de préciser les propriétés mises en jeu : linéarité de l'espérance, indépendance des variables aléatoires.

18b. Question calculatoire où étaient attendues des justifications : indépendance mutuelle, même loi…

Les questions suivantes ont été très peu abordées.

Commentaires généraux.

Les calculs de sommes liées aux séries entières sont plutôt bien maîtrisés par les candidats, ainsi que l'utilisation de la convergence monotone.
On trouve souvent des rédactions insuffisamment rigoureuses, telles par exemple des simplifications du type $\dfrac{k}{k!} = \dfrac{1}{(k-1)!}$ sans prêter attention au cas $k = 0$, le passage à une borne supérieure sans justifier

l'existence, ou des calculs d'espérance de variables aléatoires dans lesquels la convergence absolue n'est jamais invoquée.
Parmi les erreurs de raisonnement régulièrement rencontrées, on peut citer l'utilisation d'une récurrence faible au lieu d'une récurrence forte ou l'utilisation de résultats (par exemple le critère de d'Alembert) sans la vérification des hypothèses. Signalons aussi qu'une série entière de rayon de convergence R ne convergence pas nécessairement pour $x = R$.

Conseils à destination des candidats.

Le premier conseil que l'on pourrait donner aux candidats est de lire les précédents rapports de jury. Certaines erreurs ont déjà été signalées, et il n'est pas acceptable pour des enseignants en exercice de confondre les inégalités strictes et larges, d'autant plus que ceci a déjà été pointé dans plusieurs rapports. De même, la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre est souvent très mal réalisée. Au passage, certains candidats ne proposent que des solutions qui sont toujours strictement positives, ce qui devrait les inquiéter.
Les termes tels *évidents*, *facile* sont à bannir du vocabulaire, et plus encore les arguments d'autorité non expliqués, tels *on a nécessairement*. Les questions « faciles » peuvent être traitées de manière concise mais précise, l'argument clé est attendu ; à titre d'exemple, dire que 9 est une conséquence de 7 et 8 sans autre information ne rapporte pas de point. Il ne s'agit pas non plus de proposer plusieurs solutions au correcteur, lui laissant le soin de choisir.
Dans une démonstration par récurrence, on attend clairement l'énoncé de l'hypothèse de récurrence. Dans la partie II, il s'agissait de montrer ce qui semblait être des évidences pour certains candidats, mais ces « évidences » sont parfois fausses. Par exemple, même la connaissance du cadre des séries devrait montrer au candidat que l'associativité ou la commutativité ne passe pas toujours aux sommes infinies. On a curieusement lu assez souvent dans la deuxième partie que I, J, ou I_k était un intervalle (ce terme a un sens précis en mathématiques), parfois que les I_k étaient des ensembles finis. Quelques-uns, dans 7b, font « varier » les I_k, qui sont pourtant une donnée de l'énoncé.

2.2.3 Quelques éléments de correction

Comme rappelé précédemment, les éléments de correction donnent les grandes lignes de résolution des questions ; ils ne correspondent pas à la rédaction attendue par le jury. Dans leurs copies, les candidats doivent rédiger soigneusement et apporter une attention particulière aux justifications de leurs affirmations et de leurs calculs. Les rappels, les définitions des objets mathématiques et les énoncés des résultats utilisés sont indispensables ; par ailleurs, avant d'appliquer un résultat que l'on vient d'énoncer il est indispensable d'en vérifier les hypothèses.

Notations.

Dans tout le sujet, $\mathbb{R}$ *désignera le corps des nombres réels et* $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels. De plus,* n *désignera un entier naturel strictement supérieur à 1.*

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$*. Pour* X *est une variable aléatoire réelle définie sur* Ω*, on note* $\mathbf{E}(X)$ *son espérance (lorsqu'elle existe) et* $\mathbf{V}(X)$ *sa variance (lorsqu'elle existe).*
On rappelle que, sous réserve d'existence, la covariance de deux variables aléatoires X *et* Y *définies sur* Ω *est le nombre réel noté* $\mathbf{Cov}(X, Y)$ *et défini par*

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\big) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

En conséquence, sous réserve de l'existence de $\mathbf{V}(X)$*,* $\mathbf{V}(Y)$ *et* $\mathbf{V}(X+Y)$ *:*

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y).$$

Objectifs du problème.

Soit X *une variable aléatoire définie sur* Ω*. On se place dans le contexte où la loi de* X *n'est pas complètement spécifiée et où cette loi dépend d'un paramètre* θ *inconnu. Le but de l'estimation consiste à approcher la valeur de ce paramètre* θ*, ou éventuellement la valeur de son image* $g(\theta)$ *par une fonction réelle* g*.*
La première partie revient sur quelques résultats au sujet des séries entières. La deuxième partie étudie les familles sommables. Dans les deux dernières parties, on se place dans le cas où X *est une variable aléatoire définie sur* Ω *suivant une loi de Poisson de paramètre* θ *inconnu et on développe quelques outils pour l'estimation de ce paramètre.*

I. Séries entières.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.

(a) Affirmation : « soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suite de nombre réels positifs, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».

C'est vrai. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Comme les termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ sont positifs, la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$U_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k,$$

donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée. Elle est donc croissante et majorée, donc convergente. La série de terme général u_n converge donc.

(b) Affirmation : « soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suite de nombre réels, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».

C'est faux. On peut considérer par exemple les suites définies par $u_n = -1$ et $v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. La série de terme général v_n converge mais la série de terme général u_n diverge, bien que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_k \leqslant v_k$.

(c) Affirmation : « soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tous non nuls. On suppose que

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \ell,$$

avec $\ell < 1$. Alors la série de terme général u_k converge absolument ».

C'est vrai (critère de d'Alembert). Posons $q = \dfrac{\ell+1}{2}$. Comme $0 \leqslant \ell < 1$, $0 \leqslant \ell < q < 1$. Posons $\epsilon = q - \ell > 0$. Alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $k \geqslant N$,

$$\left|\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| - \ell\right| \leqslant \epsilon.$$

Par suite, si $k \geqslant N$,

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \leqslant \ell + \epsilon = q.$$

Une récurrence simple montre alors que si $k \geqslant N$, $|u_k| \leqslant q^{k-N}|u_N|$. La série de terme général q^k converge car $|q| < 1$, donc la série de terme général $q^N q^{-k}|u_N|$ converge également. Par suite, la série de terme général $|u_k|$ converge.

(d) Affirmation : « soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues définies sur un même intervalle I, telle que pour tout $x \in I$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $U(x)$. La fonction U ainsi définie sur I est continue ».

C'est faux. Prenons par exemple $I = [0,1]$ et $u_k : I \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $u_k(x) = x^k$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, u_k est continue. De plus,

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} u_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1, \\ 0 \text{ si } x \in [0,1[. \end{cases}$$

La fonction limite U n'est donc pas continue.

2. *Question de cours*. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On rappelle que le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_k x^k$ est défini par

$$R = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid (|u_k x^k|)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

i. Montrer que si $|x| < R$, alors la série de terme général $u_k x^k$ converge absolument.

Supposons $|x| < R$. Par définition de R, il existe $R' > |x|$ tel que $(|u_k R'^k|)_{k\in\mathbf{N}}$ est majorée par un réel M. Par suite, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$|u_k x^k| \leqslant |u_k||x|^k \leqslant |u_k| \left(\frac{|x|}{R'}\right)^k R'^k \leqslant M \left(\frac{|x|}{R'}\right)^k.$$

Comme $\dfrac{|x|}{R'} \in [0,1[$, la série de terme général $M\left(\dfrac{|x|}{R'}\right)^k$ converge. Par majoration, la série de terme général $u_k x^k$ converge absolument.

ii. Montrer que si $|x| > R$, alors la série de terme général $u_k x^k$ diverge.

Si $R = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Supposon R fini et $|x| > R$. Par définition de R, la suite $(u_k x^k)_{k\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée, donc ne tend pas vers 0. Par suite, la série de terme général $u_k x^k$ diverge.

On considère alors la fonction $S :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k.$$

(b) Soit $R' \in]0, R[$. Montrer que la série de terme général $u_k x^k$ converge uniformément sur $[-R', R']$. Que peut-on en déduire sur la régularité de S ?

Soit $x \in [-R', R']$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$|u_k x^k| \leqslant |u_k R'^k|.$$

Comme $R' \in]0, R[$, d'après 2(a)i, la série de terme général $|u_k R'^k|$ converge. Donc la série de terme général $u_k x^k$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[-R', R']$.

Comme le terme général $u_k x^k$ est continu, on en déduit que S est continue sur $[-R', R']$ pour tout $R' \in [0, R[$. En conséquence, S est continue sur l'intervalle ouvert

$$\bigcup_{R' \in [0,R[}]-R, R'[=]-R, R[.$$

(c) Montrer que le rayon de convergence de la série de terme général $(k+1)u_{k+1}x^k$ est égal à R.

Soit R' le rayon de convergence de la série dérivée. Supposons $|x| < R'$. Alors la suite $(|(k+1)u_{k+1}x^k|)_{k\in\mathbf{N}}$ est majorée par un réel M, par définition de R'. Si $k \geqslant 1$,

$$|u_k x^k| \leqslant |k u_k x^{k-1}||x| \leqslant MR',$$

donc la suite $(|u_k x^k|)_{k\in\mathbf{N}}$ est majorée. Par définition de R, $|x| \leqslant R$. Ceci étant valable pour tout x tel que $|x| < R'$, on en déduit que $R' \leqslant R$.

Supposons $|x| < R$. Si $x = 0$, le résultat est évident. Sinon, posons $R'' = \dfrac{R + |x|}{2}$. Alors $|x| < R'' < R$, donc $(|u_k R''^k|)_{k\in\mathbf{N}}$ est majorée par un réel M''. Pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$|(k+1)u_{k+1}x^k| = \frac{k+1}{|x|}|u_{k+1}x^{k+1}| = \frac{k+1}{|x|}\left(\frac{|x|}{R''}\right)^{k+1}|u_{k+1}R''^{k+1}| = \leqslant \frac{k+1}{|x|}\left(\frac{|x|}{R''}\right)^{k+1} M''.$$

Comme $\dfrac{|x|}{R''} \in [0, 1[$, la suite $\left((k+1)\left(\dfrac{|x|}{R''}\right)^{k+1}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, donc est majorée par un réel N. Par suite, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$|(k+1)u_{k+1}x^k| \leqslant \frac{1}{|x|} N M''.$$

Par définition de R', $|x| \leqslant R'$. Ceci étant valable pour tout x tel que $|x| < R$, on en déduit que $R \leqslant R'$.

(d) Montrer que S est indéfiniment dérivable sur $]-R,R[$.

Soit $R' \in [0,R[$. La série de terme général $u_k x^k$ converge sur $]-R',R'[$ d'après (b). De plus, la série dérivée ayant le même rayon de convergence d'après (c), toujours d'après (b) elle converge uniformément sur $]-R,R'[$. D'après le théorème de dérivation des séries, S est donc dérivable sur $]-R,R'[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-R,R'[, \qquad S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)u_{k+1}x^k.$$

En conséquence, S est dérivable sur l'union des intervalles $]-R',R'[$ avec $0 < R' < R$, soit l'intervalle $]-R,R[$.

Montrons par récurrence sur N que tout série entière de rayon de converge R est N-fois dérivable sur $]-R,R[$. On vient de le démonter pour $N=1$. Soit $N \geqslant 1$, tel que le résultat soit vrai. Soit S une série entière de rayon R. Sa dérivée est alors également donnée par une série entière, de même rayon de convergence R d'après (c). L'hypothèse de récurrence implique que S' est N fois dérivable sur $]-R,R[$, donc S est $N+1$ fois dérivable sur $]-R,R[$. D'après le principe de récurrence, S est indéfiniment dérivable sur $]-R,R[$.

3. Soit r un entier naturel non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{k^r x^k}{k!}$. Déterminer sa somme lorsque $r=1$ et lorsque $r=2$.

Soit $k \in \mathbf{N}$.

$$\left| \frac{(k+1)x^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{k^r x^k} \right| = \left(\frac{k+1}{k}\right)^r \frac{1}{k+1}|x| = \frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{r-1} |x|.$$

Ceci tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. D'après la question 1.(c), cette série entière converge pour tout $x \in \mathbf{R}$, donc son rayon de convergence est $+\infty$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^1}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}x^k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}x^{l+1} = x\mathrm{e}^x,$$

avec le changement d'indices $l = k-1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!}x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)+k}{k!}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!}x^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!}x^k + x\mathrm{e}^x \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!}x^k + x\mathrm{e}^x \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}x^{l+2} + x\mathrm{e}^x \\
&= x^2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x,
\end{aligned}$$

avec le changement d'indices $l = k-2$.

4. On note, pour tout entier $N \geqslant 1$, α_N le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1,N]\!]$ et on convient que $\alpha_0 = 1$.

(a) Calculer α_1, α_2 et α_3.

$\alpha_1 = 1$, correspondant à la partition $\{\{1\}\}$, $\alpha_2 = 2$, correspondant aux partitions $\{\{1,2\}\}$ et $\{\{1\},\{2\}\}$ Les partitions de $\{1,2,3\}$ sont

$$\{\{1,2,3\}\}, \qquad \{\{1\},\{2,3\}\}, \qquad \{\{2\},\{1,3\}\}, \qquad \{\{3\},\{1,2\}\}, \qquad \{\{1\},\{2\},\{3\}\},$$

donc $\alpha_3 = 5$.

(b) Montrer que pour tout entier $N \geqslant 0$,

$$\alpha_{N+1} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \alpha_k.$$

Pour tout ensemble fini I, on note P_I l'ensemble de partitions de I. Alors $|P_I| = \alpha_{|I|}$. Soit π une partition de $[\![1, N+1]\!]$. L'unique élément de π contenant $N+1$ est noté π_{N+1}. De plus, si $\pi \neq \{[\![1, N+1]\!]\}$, alors $\pi \setminus \{\pi_{N+1}\}$ est une partition de $[\![1, N+1]\!] \setminus \pi_{N+1}$. On obtient donc une bijection

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P_{[\![1,N+1]\!]} \setminus \{\{[\![1, N+1]\!]\}\} & \longrightarrow & \displaystyle\bigsqcup_{I \subsetneq [\![1,N]\!]} P_{[\![1,N]\!] \setminus I} \\ \pi & \longrightarrow & \pi \setminus \{\pi_{N+1}\}, \end{array} \right.$$

En comparant les cardinaux, on obtient

$$\alpha_{N+1} - 1 = \sum_{I \subsetneq [\![1,N]\!]} \alpha_{N-|I|} = \sum_{p=0}^{N-1} \binom{N}{p} \alpha_{N-p} = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{N-k} \alpha_k = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \alpha_k,$$

avec le changement d'indice $k = N - p$. Comme $\binom{N}{0}\alpha_0 = 1$, on obtient

$$\alpha_{N+1} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \alpha_k.$$

(c) Montrer que, pour tout $N \geqslant 0$, $\alpha_N \leqslant N!$.

Démontrons le par récurrence (forte) sur N. D'après (a), c'est vrai si $N = 0$, 1, 2 ou 3. Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \leqslant N$, $\alpha_k \leqslant k!$. D'après (b),

$$\alpha_{N+1} \leqslant \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} k! = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{(N-k)!k!} k! = N! \sum_{k=0}^{N} \underbrace{\frac{1}{(N-k)!}}_{\leqslant 1} \leqslant (N+1)!.$$

Donc le résultat est vrai à tout rang N.

(d) En déduire que la série entière de terme général $\dfrac{\alpha_N x^N}{N!}$ converge pour tout x réel tel que $|x| < 1$. On note $f(x)$ sa somme.

Si $|x| \leqslant 1$, pour tout $N \in \mathbf{N}$, d'après (c),

$$\left| \frac{\alpha_N}{N!} x^N \right| \leqslant 1.$$

Par définition du rayon de convergence, $R \geqslant 1$.

(e) Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x f(x)$.
En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$.
D'après 2., f est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(N+1)\alpha_{N+1}}{(N+1)!} x^N \\ &= \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{N+1}}{N!} x^N \\ &= \sum_{N=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!(N-k)!} \alpha_k \right) x^N \qquad \text{d'après (b)} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k!} x^k \right) \\ &= \mathrm{e}^x f(x). \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité est vraie car les deux séries entières apparaissant convergent absolument sur $]-1,1[$, leur rayon de convergence étant tous les deux supérieur ou égal à 1.

(f) En déduire que pour tout entier naturel N,

$$\alpha_N = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^N}{k!}.$$

On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = C\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$.
De plus,

$$f(0) = \alpha_0 = 1 = C\mathrm{e},$$

donc $C = \mathrm{e}^{-1}$. Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{N=0}^{+\infty} \frac{k^N}{k!N!} x^N \right) = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{N=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^N}{k!} \right) \frac{x^N}{N!},$$

d'après le théorème de Fubini, cette série double convergeant absolument sur $]-1,1[$. En identifiant les coefficients de cette série entière, on obtient, pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\alpha_N = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^N}{k!}.$$

II. Familles sommables.

Soit $I \subset \mathbb{N}^n$. Les éléments de I seront notés sous la forme $\underline{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$.

Cas des familles sommables de réels positifs.

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ une famille de réels positifs ou nuls indexée par I. On dit que u est sommable lorsque la borne supérieure suivante est finie :

$$\sup \left\{ \sum_{\underline{i} \in J} u_{\underline{i}},\ J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\} < +\infty.$$

Dans ce cas, on note

$$\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} = \sup \left\{ \sum_{\underline{i} \in J} u_{\underline{i}},\ J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}.$$

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ et $(v_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ deux familles de réels positifs et a, b deux réels positifs.

5. On suppose que pour tout $\underline{i} \in I$,

$$u_{\underline{i}} \leqslant v_{\underline{i}}.$$

Montrer que si v est sommable, alors u est sommable.
Soit J une partie finie de I.

$$\sum_{\underline{i} \in J} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{\underline{i} \in J} v_{\underline{i}} \leqslant \sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}},$$

par définition de $\sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}}$. Par définition, u est sommable. On en déduit également que

$$\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}}.$$

6. On suppose que u et v sont sommables. Montrer que la famille $au + bv$ définie par

$$(au + bv)_{\underline{i}} = au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}$$

est sommable et que

$$\sum_{\underline{i} \in I} (au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}) = a \left(\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} \right) + b \left(\sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}} \right).$$

Soit J une partie finie de I.

$$\sum_{\underline{i} \in J} au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}} = a \sum_{\underline{i} \in J} u_{\underline{i}} + b \sum_{\underline{i} \in J} v_{\underline{i}} \leqslant a \sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} + b \sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}},$$

car a et b sont positifs. Par suite, $au + bv$ est sommable et

$$\sum_{\underline{i} \in I} (au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}) \leqslant a \sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} + b \sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\sum\limits_{i\in I} u_i$, il existe $J \subseteq I$, fini, tel que

$$\sum_{i\in J} u_i \geqslant \sum_{i\in I} u_i - \frac{\varepsilon}{2a},$$

avec la convention $\dfrac{\varepsilon}{0} = 1$ si $a = 0$. De même, il existe $K \subseteq J$, fini, tel que

$$\sum_{i\in K} v_i \geqslant \sum_{i\in I} v_i - \frac{\varepsilon}{2b}.$$

Comme a, b tous les u_i et tous les v_i sont positifs,

$$\sum_{i\in J\cup K} (au_i + bv_i) = a \sum_{i\in J\cup K} u_i + b \sum_{i\in J\cup K} v_i \geqslant a \sum_{i\in J} u_i + b \sum_{i\in K} v_i \geqslant a \sum_{i\in I} u_i + b \sum_{i\in I} v_i - \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\sum_{i\in I} (au_i + bv_i) \geqslant a \sum_{i\in I} u_i + b \sum_{i\in I} v_i - \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\sum_{i\in I} (au_i + bv_i) \geqslant a \sum_{i\in I} u_i + b \sum_{i\in I} v_i,$$

ce qui donne pour finir l'égalité demandée.

7. On considère $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de I tels que

- ▷ $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k = I$.
- ▷ Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, distincts, $I_k \cap I_l = \emptyset$.

Par convention, si $I_k = \emptyset$, on pose

$$\sum_{i\in I_k} u_i = 0.$$

On suppose que u est sommable.

(a) Montrer que la famille $(u_i)_{i\in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $J \subseteq I_k$, finie. Alors J est aussi une partie finie de I et donc

$$\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Par définition, $(u_i)_{i\in I_k}$ est sommable.

(b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{p} \left(\sum_{i\in I_k} u_i \right) \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, il existe $I'_k \subseteq I_k$, finie, telle que

$$\sum_{i\in I'_k} u_i \geqslant \sum_{i\in I_k} u_i - \frac{\varepsilon}{p+1}.$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}} - \varepsilon \leqslant \sum_{k=0}^{p}\sum_{\underline{i}\in I'_k} u_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i}\in I'_0\cup\ldots\cup I'_p} u_{\underline{i}},$$

les I'_k étant disjoints (car les I_k le sont). Comme $I'_0 \cup \ldots \cup I'_p$ est une partie finie de I,

$$\sum_{\underline{i}\in I'_0\cup\ldots\cup I'_p} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}.$$

Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}} - \varepsilon \leqslant \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}.$$

(c) Montrer que la série de terme général $\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}$ converge. Sa somme est notée $\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}$.

C'est une série à termes positifs et la suite des sommes partielles est bornée d'après (b). Elle converge donc.

(d) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}.$$

C'est une conséquence directe de (b), en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$.

8. Réciproquement, montrer que si la famille $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et si la série de terme général $\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}$ converge, alors $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ est sommable et

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}.$$

Soit $J \subseteq I$, fini. Pour tout k, posons $J_k = J \cap I_k$. Alors J_k est une partie finie de I_k et, de plus, seul un nombre fini de J_k sont non vides. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{i}\in J} u_{\underline{i}} &= \sum_{k\in\mathbf{N},\, J_k\neq\emptyset}\ \sum_{\underline{i}\in J_k} u_{\underline{i}} \\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbf{N},\, J_k\neq\emptyset}\ \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}} && \text{par définition de } \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}} \\
&\leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\underline{i}\in J_k} u_{\underline{i}}}_{<\infty} && \text{car il s'agit d'une série à termes positifs.}
\end{aligned}$$

Par définition, u est sommable et

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}.$$

9. Déduire des questions précédentes le résultat suivant, appelé *théorème de sommation par paquets* :
$(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la série de terme général $\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}$ converge si et seulement si $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ est sommable. De plus, dans ce cas,

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}.$$

$\Longrightarrow$: il s'agit des questions 7(a) et 7(c). $\Longleftarrow$: il s'agit de la question 8. De plus, si ces hypothèses sont vérifiées, d'après les questions 7(d) et 8,

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}.$$

Cas des familles sommables de réels quelconques*.*

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ une famille de réels indexée par I. On dit que u est sommable lorsque la famille de réels positifs ou nuls $|u| = (|u_{\underline{i}}|)_{\underline{i}\in I}$ est sommable.

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ une famille de réels indexée par I. Pour tout $\underline{i} \in I$, on pose

$$u_{\underline{i}}^+ = \max\left(u_{\underline{i}}, 0\right) \qquad \textit{et} \qquad u_{\underline{i}}^- = \max\left(-u_{\underline{i}}, 0\right).$$

Ceci définit deux familles $u^+ = (u_{\underline{i}}^+)_{\underline{i}\in I}$ et $u^- = (u_{\underline{i}}^-)_{\underline{i}\in I}$ de réels positifs ou nuls.

10. Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ une famille de réels indexée par I. Montrer que la famille u est sommable si et seulement si les familles u^+ et u^- sont sommables.

$\Longrightarrow$: pour tout $\underline{i} \in I$, $u_{\underline{i}}^-, u_{\underline{i}}^+ \leqslant |u_{\underline{i}}|$. D'après la question 5, comme $|u|$ est sommable, u^+ et u^- sont sommables.
$\Longleftarrow$: pour tout $\underline{i} \in I$, $|u_{\underline{i}}| = u_{\underline{i}}^+ + u_{\underline{i}}^-$. D'après la question 6, comme u^+ et u^- sont sommables, $|u|$ est sommable.
Pour $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ une famille sommable de réels, on définit alors sa somme par

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} = \left(\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}^+\right) - \left(\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}^-\right).$$

11. Soient $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ et $v = (v_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ deux familles sommables de réels.

(a) Montrer que la famille $u+v$ définie par

$$(u+v)_{\underline{i}} = u_{\underline{i}} + v_{\underline{i}}$$

est sommable et

$$\sum_{\underline{i}\in I}(u_{\underline{i}} + v_{\underline{i}}) = \left(\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}\right) + \left(\sum_{\underline{i}\in I} v_{\underline{i}}\right).$$

Pour tout $\underline{i} \in I$,

$$|w_{\underline{i}}| \leqslant |u_{\underline{i}}| + |v_{\underline{i}}|.$$

D'après la question 6, la famille $|w|$ est sommable et donc la famille w est sommable. De plus, pour tout $\underline{i} \in I$,

$$w_{\underline{i}}^+ - w_{\underline{i}}^- = w_{\underline{i}} = u_{\underline{i}} + v_{\underline{i}} = u_{\underline{i}}^+ - u_{\underline{i}}^- + v_{\underline{i}}^+ - v_{\underline{i}}^-,$$

ce qui donne

$$w_{\underline{i}}^+ + u_{\underline{i}}^- + v_{\underline{i}}^- = w_{\underline{i}}^- + u_{\underline{i}}^+ + v_{\underline{i}}^+.$$

Les familles w^+, w^-, u^+, u^-, v^+ et v^- étant à termes positifs, on en déduit (question 6) que

$$\sum_{\underline{i}\in I} w_{\underline{i}}^+ + \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}^- + \sum_{\underline{i}\in I} v_{\underline{i}}^- = \sum_{\underline{i}\in I} w_{\underline{i}}^- + \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}^+ + \sum_{\underline{i}\in I} v_{\underline{i}}^+,$$

puis que

$$\sum_{\underline{i}\in I} w_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i}\in I} w_{\underline{i}}^+ - \sum_{\underline{i}\in I} w_{\underline{i}}^- = \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}^+ - \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}^- + \sum_{\underline{i}\in I} v_{\underline{i}}^+ - \sum_{\underline{i}\in I} v_{\underline{i}}^- = \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} + \sum_{\underline{i}\in I} v_{\underline{i}}.$$

(b) Soient a et b deux réels. Montrer que la famille $au+bv$ définie par

$$(au+bv)_{\underline{i}} = au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}$$

est sommable et déterminer sa somme en fonction des sommes de u et v.

Posons $u' = au$ et $v' = bv$. Alors $|u'| = |a||u|$ et $|v'| = |b||v|$: d'après la question 6, $|u'|$ et $|v'|$ sont sommables, donc u' et v' sont sommables. D'après la question 11(a), $u' + v' = au + bv$ est sommable et de plus

$$\sum_{\underline{i}\in I}(au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}) = \sum_{\underline{i}\in I} au_{\underline{i}} + \sum_{\underline{i}\in I} bv_{\underline{i}}.$$

Si $a \geqslant 0$, alors $(au)^+ = au^+$ et $(au^-) = au^-$. On en déduit que dans ce cas,

$$\sum_{\underline{i}\in I} au_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}.$$

Si $a \leqslant 0$, alors $(au)^+ = -au^-$ et $(au)^- = -au^+$ et on a également

$$\sum_{\underline{i}\in I} au_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}.$$

En procédant de même pour bv, on obtient

$$\sum_{\underline{i}\in I}(au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}) = a\sum_{\underline{i}\in I} a_{\underline{i}} + b\sum_{\underline{i}\in I} v_{\underline{i}}.$$

12. On considère $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de I tels que

▷ $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k = I$.

▷ Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, distincts, $I_k \cap I_l = \emptyset$.

Par convention, si $I_k = \emptyset$, on pose

$$\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}} = 0.$$

Montrer que $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la série de terme général $\sum_{\underline{i}\in I_k} |u_{\underline{i}}|$ converge si et seulement si $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ est sommable. De plus dans ce cas, vérifier que

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}.$$

$\Longrightarrow$: par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(|u_{\underline{i}}|)_{\underline{i}\in I_k}$ est sommable et et la série de terme général $\sum_{\underline{i}\in I_k} |u_{\underline{i}}|$ converge. D'après la question 9, la famille $|u|$ est sommable, donc la famille u est sommable.

$\Longleftarrow$. D'après la question 9, comme $|u|$ est sommable, les familles $(|u_{\underline{i}}|)_{\underline{i}\in I_k}$ sont sommables et donc les familles $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I_k}$ sont sommables. De plus, la série de terme général $\sum_{\underline{i}\in I_k} |u_{\underline{i}}|$ converge.

Supposons ces propriétés vérifiées. Par la question 9 appliquées à u^+ et u^-,

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}^+ = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}^+,$$

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}^- = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}^-.$$

En calculant la différence :

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}^+ - \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}^- \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}^+ - \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}^- \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}.\end{aligned}$$

Application : Théorème du transfert.

13. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_k$ des variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω et φ une application définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $T = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ soit encore une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, l'univers-image de X_i est noté

$$X_i(\Omega) = \{x_{i,j} \mid j \in I_i\},$$

où I_i est une partie de $\mathbb{N}$. On pose $I = I_1 \times \ldots \times I_n$.

Montrer que les deux assertions (A_1) et (A_2) suivantes sont équivalentes :

(A_1) T admet une espérance.

(A_2) La famille $\left(\varphi(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \ldots, x_{n,i_n})\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_{k,i_k}]\right)\right)_{\underline{i}\in I}$ est sommable.

De plus dans ce cas, vérifier que

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{(i_1 i_2,\ldots,x_k)\in I} \varphi(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \ldots, x_{n,i_n})\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_{k,i_k}]\right).$$

On remarque que $\varphi(I)$ est fini ou dénombrable. Posons $\varphi(I) = J = \{j_k \mid k \in J'\}$, avec $J' = \mathbf{N}$ ou de la forme $\{1, \ldots, p\}$, suivant les cas. Pour tout $k \in J'$, posons $J_k = \varphi^{-1}(\{j_k\})$. La variable aléatoire T_n possède une espérance si, et seulement si, la série de terme général $j_k\mathbf{P}[\varphi(X_1, \ldots, X_n) = j_k]$ converge absolument. De plus,

$$j_k\mathbf{P}[\varphi(X_1, \ldots, X_n) = j_k] = \sum_{\underline{i}\in J_k} \varphi(x_{1,i_1}, \ldots, x_{n,i_n})\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_{k,i_k}]\right).$$

Par le théorème de sommation par paquets, T_n admet une espérance si et seulement si la famille $\left(\varphi(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \ldots, x_{n,i_n})\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_{k,i_k}]\right)\right)_{\underline{i}\in I}$ est sommable. Si c'est bien le cas, alors par le théorème de sommation par paquets,

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{k\in J'} j_k\mathbf{P}[\varphi(X_1, \ldots, X_n) = j_k] = \sum_{(i_1 i_2,\ldots,x_k)\in I} \varphi(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \ldots, x_{n,i_n})\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_{k,i_k}]\right).$$

III. Estimateurs.

Soit I un intervalle ouvert, non vide, inclus dans $]0, +\infty[$.

On considère une variable aléatoire X définie sur Ω suivant une loi de Poisson dépendante d'un paramètre réel $\theta \in I$, inconnu : autrement dit, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout entier naturel k,

$$\mathbf{P}([X = k]) = \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}.$$

On cherche à approcher la valeur de ce paramètre θ, ou éventuellement la valeur de son image $g(\theta)$ par une fonction réelle g définie sur I.

14. (a) À l'aide des résultats de la première partie, montrer que X admet des moments d'ordre r pour tout r entier naturel non nul (c'est-à -dire que X^r admet une espérance pour tout r entier naturel non nul) puis que l'espérance et la variance de X sont égales à θ.

La série de terme général $k^r\mathbf{P}[X = k] = \mathrm{e}^{-\theta}\dfrac{k^r}{k!}\theta^k$ converge absolument d'après la question 3, donc par le théorème du transfert, X^r possède une espérance. Toujours d'après la question 3,

$$\mathbf{E}(X) = \mathrm{e}^{-\theta}\theta\mathrm{e}^{\theta} = \theta,$$
$$\mathbf{E}(X^2) = \mathrm{e}^{-\theta}(\theta\mathrm{e}^{\theta} + \theta^2\mathrm{e}^{\theta}) = \theta + \theta^2.$$

Donc X possède une variance et d'après la formule de Huyghens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \theta.$$

(b) Donner une interprétation combinatoire des moments d'ordre r de X lorsque $\theta = 1$.
Lorsque $\theta = 1$,

$$\mathbf{E}(X^r) = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^r}{k!} = \alpha_r,$$

où α_r est le nombre de partitions de $[\![1, r]\!]$ d'après la question 4.

15. Soit n variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ définies sur Ω, mutuellement indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètre respectif $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit la loi de Poisson de paramètre $\sum_{i=1}^{n} \theta_i$. *Indication* : on pourra démontrer d'abord le cas $n = 2$.

On commence par le cas $n = 2$. L'univers-image de $Y_1 + Y_2$ est inclus dans $\mathbf{N}$. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[Y_1 + Y_2 = n] &= \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{n} [Y_1 = k,\ Y_2 = n-k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}[Y_1 = k,\ Y_2 = n-k] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}[Y_1 = k]\mathbf{P}[Y_2 = n-k] \qquad \text{car } Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ sont indépendantes} \\
&= \mathrm{e}^{-\theta_1}\mathrm{e}^{-\theta_2} \sum_{k=0}^{n} \frac{\theta_1^k}{k!} \frac{\theta_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\theta_1+\theta_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \theta_1^k \theta_2^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{-(\theta_1+\theta_2)} \frac{1}{n!} (\theta_1 + \theta_2)^n.
\end{aligned}$$

Donc $Y_1 + Y_2$ suit une loi de Poisson $\theta_1 + \theta_2$.
Pour montrer le cas général, on procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, avec $n \geqslant 2$. Par l'hypothèse de récurrence, $Y_1 + \ldots + Y_{n-1}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta_1 + \ldots + \theta_{n-1}$. De plus, $Y_1 + \ldots + Y_{n-1}$ et Y_n sont indépendantes. Par le cas $n = 2$, $Y_1 + \ldots + Y_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta_1 + \ldots + \theta_n$.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur Ω, mutuellement indépendantes, et de même loi que X. Soit φ une application définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ soit encore une variable aléatoire définie sur Ω.

- ▷ *Le n-uplet $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est appelé un n-échantillon de la loi de X et la variable aléatoire $T_n = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est appelée un estimateur de $g(\theta)$.*
- ▷ *Après une réalisation de l'expérience aléatoire associée à Ω, on note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs prises par $X_1, X_2, \ldots, X_n$: ce sont les* observations de l'échantillon. *Le réel $t = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est*

appelé une réalisation de l'estimateur T_n de $g(\theta)$ et est choisie comme estimation ponctuelle de la valeur de $g(\theta)$.

Autrement dit, estimer ponctuellement $g(\theta)$, c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur expérimentale $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Les outils suivants vont nous permettre d'étudier les estimateurs et de choisir le plus pertinent : soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la loi de X et T_n un estimateur de $g(\theta)$ admettant une espérance $\mathbf{E}(T_n)$, dépendant éventuellement de θ.

- ▷ *Le réel $\mathbf{E}(T_n) - g(\theta)$ est appelé* biais *de T_n et est noté $b_\theta(T_n)$.*
- ▷ *L'estimateur T_n est dit* sans biais *lorsque $b_\theta(T_n) = 0$, c'est-à -dire lorsque $\mathbf{E}(T_n) = g(\theta)$.*
- ▷ *Si l'estimateur T_n admet une variance $\mathbf{V}(T_n)$, dépendant éventuellement de θ, on appelle* risque quadratique *de T_n le réel*

$$r_\theta(T_n) = \mathbf{E}\left((T_n - g(\theta))^2\right) = b_\theta(T_n)^2 + \mathbf{V}(T_n).$$

En particulier si T_n est sans biais, alors $r_\theta(T_n) = \mathbf{V}(T_n)$.

Une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'estimateurs de $g(\theta)$ admettant une espérance est dite asymptotiquement sans biais *lorsque* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_\theta(T_n) = 0$.

On commence par étudier deux estimateurs de θ : la moyenne et la variance empiriques. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la loi de X. On définit la moyenne empirique *$\overline{X_n}$ de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et la* variance empirique *$\overline{S_n}$ de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ par*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad \overline{S_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X_n}\right)^2.$$

16. Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de θ et que son risque quadratique est $\dfrac{\theta}{n}$.

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta = \theta.$$

Donc $b_\theta(\overline{X_n}) = 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
r_\theta(\overline{X_n}) &= \mathbf{V}(\overline{X_n}) \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}(X_k) && \text{car les } X_k \text{ sont indépendants} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\theta \\
&= \frac{\theta}{n}.
\end{aligned}$$

17. **(a)** Montrer que
$$n\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X_n}^2.$$
En déduire $\mathbf{E}(\overline{S_n})$.

$$\begin{aligned}
n\overline{S_n} &= \sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X_n})^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2\overline{X_n}\sum_{k=1} X_k + n\overline{X_n}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2n\overline{X_n}^2 + n\overline{X_n}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X_n}^2.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(n\overline{S_n}) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k^2) - n\mathbf{E}(\overline{X_n}^2) && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= n\mathbf{E}(X_1^2) - n\mathbf{E}(\overline{X_n}^2) && \text{car les } X_k \text{ suivent tous la même loi} \\
&= n(\theta+\theta^2) - n\left(\mathbf{V}(\overline{X_n}) + \mathbf{E}\left(\overline{X_n}^2\right)\right) && \text{par la formule de Huyghens} \\
&= n(\theta+\theta^2) - n\left(\frac{\theta}{n} + \theta^2\right) \\
&= (n-1)\theta.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbf{E}(\overline{S_n}) = \dfrac{n-1}{n}\theta$.

(b) Montrer que $\overline{S_n}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ.
Par suite,
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbf{E}(\overline{S_n}) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n-1}{n}\theta = \theta,$$
donc $\overline{S_n}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ.

(c) Montrer que $\widehat{S_n} = \dfrac{n}{n-1}\overline{S_n}$ est un estimateur sans biais de θ. Cet estimateur est appelé *variance empirique corrigée*.
Par linéarité de l'espérance,
$$\mathbf{E}(\widehat{S_n}) = \frac{n}{n-1}\mathbf{E}(\overline{S_n}) = \theta.$$
Donc $\widehat{S_n}$ est un estimateur sans biais de θ.

18. **(a)** Montrer que
$$n\overline{S_n} = \left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)^2\right) - n(\overline{X_n}-\theta)^2.$$

D'une part,

$$n\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X_n}^2.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)^2\right) - n(\overline{X_n}-\theta)^2 &= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2\theta\sum_{k=1}^{n} X_k + n\theta^2 - n\overline{X_n}^2 + 2n\theta\overline{X_n} - n\theta^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2n\theta\overline{X_n} + n\theta^2 - n\overline{X_n}^2 + 2n\theta\overline{X_n} - n\theta^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X_n}^2 \\
&= n\overline{S_n}.
\end{aligned}$$

(b) En déduire que $n\overline{S_n}$ admet une variance donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{V}\left(n\overline{S_n}\right) = n\mathbf{V}\left((X-\theta)^2\right) - 2n^2\mathbf{Cov}\left((X_1-\theta)^2, (\overline{X_n}-\theta)^2\right) + n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right).$$

Posons

$$Y = \sum_{k=1}^{n}(X_k^2-\theta)^2, \qquad\qquad Z = -n(\overline{X_n}-\theta)^2.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\left(n\overline{S_n}\right) &= \mathbf{V}(Y+Z) \\
&= \mathbf{V}(Y) + \mathbf{V}(Z) + 2\mathbf{Cov}(Y,Z) \\
&= \mathbf{V}(Y) + n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right) - 2n\mathbf{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)^2, (\overline{X_n}-\theta)^2\right) \\
&= \mathbf{V}(Y) + n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right) - 2n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{Cov}\left((X_k-\theta)^2, (\overline{X_n}-\theta)^2\right) \\
&= \mathbf{V}(Y) + n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right) - 2n^2\mathbf{Cov}\left((X_1-\theta)^2, (\overline{X_n}-\theta)^2\right)
\end{aligned}$$

par la symétrie entre $X_1, \ldots, X_n$. Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendants, il en est de même de $(X_1^2-\theta)^2, \ldots, (X_n^2-\theta)^2$. Par suite,

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k^2-\theta)^2\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}\left((X_k^2-\theta)^2\right) = n\mathbf{V}\left((X^2-\theta)^2\right)$$

car $X_1, \ldots, X_n$ et X suivent la même loi. Le résultat annoncé est maintenant entièrement démontré.

(c) Montrer que

$$n^4\mathbf{E}\left((\overline{X_n}-\theta)^4\right) = n\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + 3n(n-1)\theta^2.$$

Indication : on remarquera que lorsqu'on développe $\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)\right)^4$, on obtient des termes de la forme $(X_i-\theta)^4$ ou $(X_i-\theta)^2(X_j-\theta)^2$ ou $(X_i-\theta)^3(X_j-\theta)$ ou $(X_i-\theta)^2(X_j-\theta)(X_k-\theta)$ ou $(X_i-\theta)(X_j-\theta)(X_k-\theta)(X_l-\theta)$ avec i, j, k, l distincts deux à deux, dont on précisera l'espérance.

$$n^4\mathbf{E}\left((\overline{X_n}-\theta)^4\right) = \mathbf{E}\left((n\overline{X_n}-n\theta)^4\right) = \mathbf{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)\right)^4\right).$$

De plus,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)\right)^4 &= \sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)^4 + \binom{4}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(X_i-\theta)^2(X_j-\theta)^2\\ &\quad + \text{somme de termes de la forme } (X_i-\theta)^3(X_j-\theta)\\ &\quad \text{ou } (X_i-\theta)^2(X_j-\theta)(X_k-\theta) \text{ ou } (X_i-\theta)(X_j-\theta)(X_k-\theta)(X_l-\theta),\\ &\quad \text{avec } i, j, k, l \text{ tous distincts.}\end{aligned}$$

Comme les X_i sont mutuellement indépendant,

$$\mathbf{E}\left((X_i-\theta)^3(X_j-\theta)\right) = \mathbf{E}\left((X_i-\theta)^3\right)\mathbf{E}(X_j-\theta) = 0,$$

car $\mathbf{E}(X_j) = \theta$ et donc $\mathbf{E}(X_j-\theta) = 0$. De la même manière, les autres termes indiqués sont d'espérance nulle. Par linéarité de l'espérance et comme les X_i sont mutuellement indépendants,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)\right)^4\right) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left((X_k-\theta)^4\right) + 6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbf{E}\left((X_i-\theta)^2(X_j-\theta)^2\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left((X_k-\theta)^4\right) + 6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbf{E}\left((X_i-\theta)^2\right)\mathbf{E}\left((X_j-\theta)^2\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left((X_k-\theta)^4\right) + 6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbf{V}(X_i)\mathbf{V}(X_j)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + 6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbf{V}(X)^2\\ &= n\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + 6\frac{n(n-1)}{2}\mathbf{V}(X)^2\\ &= n\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + 3n(n-1)\mathbf{V}(X)^2,\end{aligned}$$

car $X_1, \ldots, X_n$ suivent tous la même loi que X.

(d) En déduire que

$$n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right) = \frac{\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + (2n-3)\theta^2}{n}.$$

$$
\begin{aligned}
n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right) &= n^2\mathbf{E}\left((\overline{X_n}-\theta)^4\right) - n^2\mathbf{E}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + \frac{3(n-1)}{n}\mathbf{V}(X)^2 - n^2\mathbf{V}(\overline{X_n})^2 \\
&= \frac{1}{n}\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + \frac{3(n-1)}{n}\mathbf{V}(X)^2 - n\mathbf{V}(X)^2 \qquad \text{par la question 16} \\
&= \frac{1}{n}\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + \left(\frac{3(n-1)}{n} - 1\right)\mathbf{V}(X)^2 \\
&= \frac{1}{n}\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + \frac{2n-3}{n}\mathbf{V}(X)^2.
\end{aligned}
$$

(e) Montrer que

$$n^2(\overline{X_n}-\theta)^2 = \sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(X_i-\theta)(X_j-\theta).$$

$$
\begin{aligned}
n^2(\overline{X_n}-\theta)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\theta\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(X_i-\theta)(X_j-\theta).
\end{aligned}
$$

(f) En déduire que

$$n^2\mathbf{E}\left((X_1-\theta)^2(\overline{X_n}-\theta)^2\right) = \mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + (n-1)\theta^2,$$

puis que

$$\mathbf{Cov}\left((X_1-\theta)^2, (\overline{X_n}-\theta)^2\right) = \frac{\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) - \theta^2}{n^2}.$$

Donc

$$n^2(X_1-\theta)^2(\overline{X_n}-\theta)^2 = \sum_{k=1}^{n}(X_1-\theta)^2(X_k-\theta)^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(X_1-\theta)^2(X_i-\theta)^2(X_j-\theta).$$

Par indépendance mutuelle de $X_1,\dots,X_n$,

$$\mathbf{E}\left((X_1-\theta)^2(X_i-\theta)^2(X_j-\theta)\right) = \mathbf{E}\left((X_1-\theta)^2(X_i-\theta)^2\right)\mathbf{E}(X_j-\theta) = 0,$$

car $\mathbf{E}(X_j) = \theta$. Par linéarité de l'espérance et comme $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendants,

$$
\begin{aligned}
n^2\mathbf{E}\left((X_1-\theta)^2(\overline{X_n}-\theta)^2\right) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left((X_1-\theta)^2(X_k-\theta)^2\right)+0\\
&= \mathbf{E}\left((X_1-\theta)^4\right)+\sum_{k=2}^{n}\mathbf{E}\left((X_1-\theta)^2\right)\mathbf{E}\left((X_k-\theta)^2\right)\\
&= \mathbf{E}\left((X_1-\theta)^4\right)+\sum_{k=2}^{n}\mathbf{V}(X_1)\mathbf{V}(X_k)\\
&= \mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)+(n-1)\mathbf{V}(X)^2,
\end{aligned}
$$

car $X_1,\dots,X_n$ suivent tous la même loi que X.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Cov}\left((X_1-\theta)^2,(\overline{X_n}-\theta)^2\right) &= \mathbf{E}\left((X_1-\theta)^2(\overline{X_n}-\theta)^2\right)-\mathbf{E}\left((X_1-\theta)^2\right)\mathbf{E}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right)\\
&= \mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)+(n-1)\mathbf{V}(X)^2-\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(\overline{X_n})\\
&= \mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)+(n-1)\mathbf{V}(X)^2-\frac{1}{n}\mathbf{V}(X)^2\\
&= \frac{\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)-\mathbf{V}(X)^2}{n^2}\\
&= \frac{\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)-\theta^2}{n^2}.
\end{aligned}
$$

(g) Déduire des questions précédentes que

$$
\mathbf{V}\left(\widehat{S_n}\right)=\frac{1}{n}\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)-\frac{n-3}{n(n-1)}\theta^2.
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(\widehat{S_n}) &= \frac{1}{(n-1)^2}\mathbf{V}(n\overline{S_n})\\
&= \frac{1}{(n-1)^2}\left(n\mathbf{V}\left((X-\theta)^2\right)-2n^2\mathbf{Cov}\left((X_1-\theta)^2,(\overline{X_n}-\theta)^2\right)+n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right)\right)\\
&= \frac{1}{(n-1)^2}\left(n\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)+n\theta-2\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)+2\theta^2+\frac{1}{n}\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)+\frac{2n-3}{n}\theta^2\right)\\
&= \frac{1}{n(n-1)^2}\left((n^2-2n+1)\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)+(-n^2+4n-3)\theta^2\right)\\
&= \frac{1}{n(n-1)^2}\left((n-1)^2\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)-(n-1)(n-3)\theta^2\right)\\
&= \frac{1}{n}\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right)-\frac{n-3}{n(n-1)}\theta^2.
\end{aligned}
$$

IV. Inégalité de Cramer-Rao.

Le meilleur estimateur possible est un estimateur sans biais de variance minimale. Pour étudier cet extremum, nous allons établir l'inégalité de Cramer-Rao.

On se place toujours dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé et on considère de nouveau* X *une variable aléatoire définie sur* Ω *suivant une loi de Poisson dépendante d'un paramètre réel* $\theta \in I$ *inconnu avec* I *intervalle non vide ouvert inclus dans* $]0, +\infty[$. *On considère les fonctions suivantes :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\theta, k) & \longmapsto & \mathbf{P}([X = k]) = \dfrac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}. \end{array} \right.$$

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\theta, k) & \longmapsto & \ln \left(f(\theta, k) \right). \end{array} \right.$$

On définit sous réserve d'existence l'information de Fisher *de* X *par*

$$F_X(\theta) = \mathbf{V} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X) \right).$$

19. Montrer que pour tout $\theta \in I$,

$$\mathbf{E} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X) \right) = 0,$$

puis que

$$F_X(\theta) = \frac{1}{\theta}.$$

$$g(\theta, k) = \ln \left(\mathrm{e}^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \right) = k \ln(\theta) - \theta - \ln(k!),$$

donc

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, k) = \frac{k}{\theta} - 1.$$

On obtient

$$\mathbf{E} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X) \right) = \mathbf{E} \left(\frac{X}{\theta} - 1 \right) = \frac{\mathbf{E}(X)}{\theta} - 1 = \frac{\theta}{\theta} - 1 = 0.$$

Par suite,

$$F_X(\theta) = \mathbf{V} \left(\frac{X}{\theta} - 1 \right) = \frac{1}{\theta^2} \mathbf{V}(X) = \frac{1}{\theta}.$$

Soit φ *une fonction réelle telle que* $\varphi(X)$ *soit une variable aléatoire définie sur* Ω, *admettant une espérance* $\mathbf{E}(\varphi(X))$ *et une variance* $\mathbf{V}(\varphi(X))$ *pour tout* $\theta \in I$.
L'inégalité de Cramer-Rao affirme que

$$\mathbf{V}(\varphi(X)) \geqslant \frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{E} \left(\varphi(X) \right) \right)^2}{F_X(\theta)}.$$

Nous allons démontrer cette inégalité.

20. (a) Montrer que la fonction $\psi : \theta \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) f(\theta, k)$ est définie et dérivable sur I et que pour tout $\theta \in I$,

$$\psi'(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, k).$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$ et pour tout $\theta \in I$,

$$\varphi(f) f(\theta, k) = \varphi(k) \mathbf{P}[X = k].$$

Comme $\varphi(X)$ possède une espérance, par le théorème du transfert, la série générale $\varphi(k) f(\theta, k)$ converge absolument pour tout $\theta \in I$. En notant R le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{\varphi(k)}{k!}\theta^k$, d'après la question 2 (a), $I \subseteq]-R, R[$. D'après la question 2 (c), cette série est dérivable sur $]-R, R[$ et donc sur I. On en déduit que ψ est dérivable sur I et que pour tout $\theta \in I$,

$$\begin{aligned}
\psi'(\theta) &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi(k+1)}{(k+1)!}(k+1)\theta^k \right) \mathrm{e}^{-\theta} - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi(k)}{k!}\theta^k \right) \mathrm{e}^{-\theta} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi(k)}{k!} k\theta^{k-1} \right) \mathrm{e}^{-\theta} - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi(k)}{k!}\theta^k \right) \mathrm{e}^{-\theta} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi(k)}{k!} \left(k\theta^{k-1} + \theta^k \right) \mathrm{e}^{-\theta} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, k).
\end{aligned}$$

(b) En déduire que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{E}(\varphi(X)) = \mathbf{E}\left(\varphi(X) \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X) \right).$$

Par le théorème du transfert,

$$\mathbf{E}(\varphi(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) f(\theta, k) = \psi(\theta).$$

D'après la question précédente, ceci est dérivable par rapport à θ sur I et, pour tout $\theta \in I$,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{E}(\varphi(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, k).$$

Comme $g = \ln(f)$, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\varphi(k) \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, k) \mathbf{P}[X = k] = \varphi(k) \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, k) \frac{1}{f(\theta, k)} f(\theta, k) = \varphi(k) \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, k).$$

Ceci est le terme général d'une série qui converge absolument d'après la question précédente et la question 2, donc d'après le théorème du transfert, $\mathbf{E}\left(\varphi(X) \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X) \right)$ existe et

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{E}(\varphi(X)) = \mathbf{E}\left(\varphi(X) \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X) \right).$$

21. On fixe temporairement $\theta \in I$ et on considère la fonction Q_θ suivante dépendant d'une variable réelle t :

$$Q_\theta(t) = \mathbf{E}\left(\left(\varphi(X) - \mathbf{E}(\varphi(X)) + t\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)\right)^2\right).$$

(a) Montrer que Q_θ est un polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{R}$.
En développant,

$$Q_\theta(t) = t^2\mathbf{E}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)^2\right) + 2t\mathbf{E}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)(\varphi(X) - \mathbf{E}(\varphi(X)))\right) + V(\varphi(X)).$$

Donc Q_θ est un polynôme en t de degré $\leqslant 2$. Comme $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X) = \dfrac{X}{\theta} - 1$ n'est pas nulle,

$$\mathbf{E}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)^2\right) > 0.$$

Donc Q_θ est de degré 2.

(b) Étudier le discriminant de Q_θ.
Comme Q_θ est l'espérance d'une variable aléatoire positive (c'est le carré d'une variable aléatoire réelle), pour tout $t \in \mathbf{R}$, $Q_\theta(t) \geqslant 0$. Le polynôme Q_θ ne possède donc au plus qu'une racine réelle, donc son discriminant est négatif ou nul.

(c) En déduire l'inégalité de Cramer-Rao.

Ce discriminant est

$$\begin{aligned}\Delta &= 4\mathbf{E}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)(\varphi(X) - \mathbf{E}(\varphi(X)))\right)^2 - 4\mathbf{E}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)^2\right) V(\varphi(X)) \\ &= 4\mathbf{E}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)(\varphi(X) + \mathbf{E}(\varphi(X)))\right)^2 - 4\mathbf{V}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)\right) V(\varphi(X)) \leqslant 0,\end{aligned}$$

car $\mathbf{E}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)\right) = 0$ d'après la question 19. On en en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)(\varphi(X) - \mathbf{E}(\varphi(X)))\right)^2 &= \left(\mathbf{E}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)\varphi(X)\right) - \mathbf{E}(\varphi(X))\underbrace{\mathbf{E}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)\right)}_{=0}\right)^2 \\ &= \mathbf{E}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)\varphi(X)\right)^2 \\ &\leqslant \mathbf{V}(\varphi(X))F_X(\theta).\end{aligned}$$

Nous allons généraliser cette inégalité à nos estimateurs.
Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *un* n*-échantillon de la loi de* X*. On appelle* fonction de vraisemblance *pour les observations* $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ *de l'échantillon la fonction du paramètre* $\theta \in I$ *définie de la façon suivante :*

$$\mathcal{L}(\theta, k_1, k_2, \ldots, k_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}[X_j = k_j]\right).$$

On définit, sous réserve d'existence, l'information de Fisher *de l'échantillon* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *par*

$$F(\theta) = \mathbf{V}\left(\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, X_1, X_2, \ldots, X_n)\right).$$

22. Montrer que pour tout $\theta \in I$,

$$\mathbf{E}\left(\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = 0,$$

puis que

$$F(\theta) = nF_X(\theta).$$

Soit $\theta \in I$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta, k_1, \ldots, k_n) &= \frac{\mathrm{e}^{-n\theta}\theta^{k_1+\ldots+k_n}}{k_1!\ldots k_n!},\\
\ln(\mathcal{L})(\theta, k_1, \ldots, k_n) &= -n\theta + (k_1 + \ldots + k_n)\ln(\theta) - \ln(k_1!\ldots k_n!),\\
\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, k_1, \ldots, k_n) &= -n + \frac{k_1 + \ldots + k_n}{\theta}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, X_1, X_2, \ldots, X_n) = -n + \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\theta}.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}\left(\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = -n + \frac{n\theta}{\theta} = 0.$$

Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes,

$$F(\theta) = \mathbf{V}\left(\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = \frac{1}{\theta^2}(\mathbf{V}(X_1) + \ldots + \mathbf{V}(X_n)) = \frac{n\theta}{\theta^2} = nF_X(\theta).$$

Soit $T_n = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *un estimateur de* $g(\theta)$ *admettant une espérance pour tout* $\theta \in I$ *avec* g *dérivable sur* I. *On dit que* T_n *est* régulier *lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

▷ *Pour tout* $\theta \in I$, *la famille*

$$\left(\varphi(k_1, k_2, \ldots, k_n)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}(\theta, k_1, k_2, \ldots, k_n)\right)_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n}$$

est sommable.

▷ *La relation suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \varphi(k_1, k_2, \ldots, k_n)\mathcal{L}(\theta, k_1, k_2, \ldots, k_n)\right)\\
&= \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \varphi(k_1, k_2, \ldots, k_n)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}(\theta, k_1, k_2, \ldots, k_n).
\end{aligned}$$

23. (a) Montrer que tout estimateur T_n de $g(\theta)$ admettant une espérance est régulier.

Pour tout $\theta \in I$, par le théorème du transfert, la famille

$$\big(\varphi(k_1,k_2,\ldots,k_n)\mathcal{L}(\theta,k_1,k_2,\ldots,k_n)\big)_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n}$$

est sommable et sa somme est égale à

$$\mathbf{E}(T_n) = \mathrm{e}^{-n\theta} \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{N}^n} \frac{\varphi(k_1,\ldots,k_n)}{k_1!\ldots k_n!}\theta^{k_1+\ldots+k_n}.$$

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, posons

$$I_N = \{(i_1,\ldots,i_n) \in \mathbf{N}^n \mid i_1 + \ldots + i_n = N\}.$$

La famille $(I_N)_{N\in\mathbf{N}}$ forme une partition de $\mathbf{N}^n$. Par le théorème de sommation par paquets,

$$\mathrm{e}^{-n\theta} \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{N}^n} \frac{\varphi(k_1,\ldots,k_n)}{k_1!\ldots k_n!}\theta^{k_1+\ldots+k_n} = \mathrm{e}^{-n\theta}\sum_{N=0}^{\infty}\left(\sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in I_N}\frac{\varphi(k_1,\ldots,k_n)}{k_1!\ldots k_n!}\right)\theta^N.$$

On obtient une série entière qui converge absolument sur I. En notant R son rayon de convergence, $I \subseteq]-R,R[$ d'après la question 2(a). D'après la question 2(d), la somme est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \varphi(k_1,k_2,\ldots,k_n)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}(\theta,k_1,k_2,\ldots,k_n).$$

Donc T_n est régulier.

(b) En déduire que pour tout $\theta \in I$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{E}(T_n) = \mathbf{E}\left(T_n\frac{\partial\ln(\mathcal{L})}{\partial\theta}(\theta,X_1,X_2,\ldots,X_n)\right) = \mathbf{E}\left((T_n - g(\theta))\frac{\partial\ln(\mathcal{L})}{\partial\theta}(\theta,X_1,X_2,\ldots,X_n)\right).$$

Par le théorème du transfert,

$$\mathbf{E}(T_n) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{N}^n}\varphi(k_1,\ldots,k_n)\mathcal{L}(\theta,k_1,\ldots,k_n)$$

et d'après la question précédente,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{E}(T_n) = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n}\varphi(k_1,k_2,\ldots,k_n)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}(\theta,k_1,k_2,\ldots,k_n).$$

De plus, par le théorème du transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(T_n\frac{\partial\ln(\mathcal{L})}{\partial\theta}(\theta,X_1,X_2,\ldots,X_n)\right) &= \mathbf{E}\left(T_n\left(\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i - n\right)\right)\\
&= \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{N}^n}\varphi(k_1,\ldots,k_n)\underbrace{\left(\frac{k_1+\ldots+k_n}{\theta} - n\right)\mathcal{L}(\theta,k_1,\ldots,k_n)}_{=\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L}(\theta,k_1,\ldots,k_n)}\\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{E}(T_n).
\end{aligned}$$

Comme

$$\mathbf{E}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(\mathcal{L})(\theta, X_1, \dots, X_n)\right) = 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left((T_n - g(\theta))\frac{\partial\ln(\mathcal{L})}{\partial\theta}(\theta, X_1, X_2, \dots, X_n)\right) &= \mathbf{E}\left(T_n\frac{\partial\ln(\mathcal{L})}{\partial\theta}(\theta, X_1, X_2, \dots, X_n)\right)\\ &\quad - g(\theta)\mathbf{E}\left(\frac{\partial\ln(\mathcal{L})}{\partial\theta}(\theta, X_1, X_2, \dots, X_n)\right)\\ &= \mathbf{E}\left(T_n\frac{\partial\ln(\mathcal{L})}{\partial\theta}(\theta, X_1, X_2, \dots, X_n)\right).\end{aligned}$$

24. Montrer que si T_n est un estimateur sans biais de $g(\theta)$ admettant un moment d'ordre 2 pour tout $\theta \in I$, alors

$$\mathbf{V}(T_n) \geqslant \frac{g'(\theta)^2}{nF_X(\theta)}.$$

Posons, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$R_\theta(t) = \mathbf{E}\left(\left((\varphi(X_1, \dots, X_n) - \mathbf{E}(\varphi(X_1, \dots, X_n)) + t\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(\mathcal{L})(\theta, X_1, \dots, X_n)\right)^2\right).$$

Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$R_\theta(t) = \mathbf{V}(T_n)^2 + 2t\mathbf{E}\left((\varphi(T_n) - \mathbf{E}(\varphi(T_n))\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(\mathcal{L}(\theta, X_1, \dots, X_n)\right) + t^2\mathbf{E}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(\mathcal{L}(\theta, X_1, \dots, X_n)^2\right).$$

Comme $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(\mathcal{L}(\theta, X_1, \dots, X_n)$ n'est pas nulle, son moment d'ordre 2 est non strictement positif et donc $R_\theta(t)$ est un polynôme de degré 2. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $R_\theta(t)$ est l'espérance d'une variable aléatoire positive, donc $R_\theta(t) \geqslant 0$. Par suite, le discriminant de $R_\theta(t)$ est négatif ou nul. On obtient

$$\begin{aligned}\Delta &= 4\mathbf{E}\left((\varphi(T_n) - \mathbf{E}(\varphi(T_n))\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(\mathcal{L}(\theta, X_1, \dots, X_n)\right)^2 - 4\mathbf{V}(T_n)^2\mathbf{E}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(\mathcal{L}(\theta, X_1, \dots, X_n)^2\right)\\ &= 4g'(\theta) - 4\mathbf{V}(T_n)nI_X(\theta)\\ &\leqslant 0,\end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité de Cramer-Rao.

Un estimateur sans biais de $g(\theta)$ admettant un moment d'ordre 2 est dit efficace *s'il atteint la borne de Cramer-Rao, c'est-à -dire si*

$$\mathbf{V}(T_n) = \frac{g'(\theta)^2}{nF_X(\theta)}.$$

25. Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur efficace de θ.
dans le cas de $\overline{X_n}$,

$$\mathbf{V}(\overline{X_n}) = \frac{\theta}{n}, \qquad g'(\theta)^2 = 1, \qquad I_X(\theta) = \frac{1}{\theta}.$$

On a bien $\mathbf{V}(\overline{X_n}) = \dfrac{g'(\theta)^2}{nI_X(\theta)}$.

26. Nous allons maintenant chercher les estimateurs réguliers sans biais efficaces de θ.

(a) Soit T_n un estimateur efficace et sans biais de θ admettant un moment d'ordre 2. Montrer que T_n et $\overline{X_n}$ sont presque sûrement liées par une relation affine.

Alors $\mathbf{V}(T_n)$ existe et

$$\mathbf{V}(T_n) = \frac{g'(\theta)}{nI_X(\theta)} = \frac{\theta}{n} = \mathbf{V}(\overline{X_n})$$

et $\mathbf{E}(T_n) = \theta = \mathbf{E}(\overline{X_n})$. Comme T_n est un estimateur efficace, le discriminant de R_θ est nul et donc il existe $t_0 \in \mathbf{R}$, tel que $R_\theta(t_0) = 0$. Donc

$$\mathbf{E}\left(\left((\varphi(X_1,\dots,X_n) - \mathbf{E}(\varphi(X_1,\dots,X_n)) + t_0\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(\mathcal{L})(\theta,X_1,\dots,X_n)\right)^2\right) = 0.$$

En conséquence, la variable aléatoire suivante est presque sûrement nulle :

$$\begin{aligned}
&(\varphi(X_1,\dots,X_n) - \mathbf{E}(\varphi(X_1,\dots,X_n)) + t_0\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(\mathcal{L})(\theta,X_1,\dots,X_n)\\
&= T_n - \mathbf{E}(T_n) + t_0\left(\frac{n}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i - n\right)\\
&= T_n - \mathbf{E}(T_n) + t_0\left(\frac{n^2}{\theta}\overline{X_n} - n\right)\\
&= 0 \text{ presque sûrement.}
\end{aligned}$$

Par suite, $T_n = a + b\overline{X_n}$ pour un certain couple $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

(b) Montrer qu'il existe deux estimateurs de θ sans biais et efficaces et admettant un moment d'ordre 2, dont l'un est $\overline{X_n}$. Que peut-on penser du second pour les applications pratiques ?

Si T_n est un estimateur sans biais et efficace, d'après la question précédente il existe $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $T_n = a + b\overline{X_n}$ presque sûrement. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(T_n) &= a + b\mathbf{E}(\overline{X_n}) = \mathbf{E}(\overline{X_n}),\\
\mathbf{V}(T_n) &= b^2\mathbf{V}(\overline{X_n}) = \mathbf{V}(\overline{X_n}).
\end{aligned}$$

Donc $b^2 = 1$. Si $b = 1$, alors $a = 0$ et $T_n = \overline{X_n}$ presque sûrement. Si $b = -1$, alors $a = 2\theta$ et $T_n = 2\theta - \overline{X_n}$. Il s'agit bien d'un estimateur sans biais efficace, mais inutilisable en pratique puisque son calcul nécessite de connaître θ, qu'on cherche à estimer.

——— FIN DU CORRIGÉ ———

Chapitre 3

Rapport sur les épreuves orales

Les épreuves orales ont pour objectif « d'évaluer la capacité de concevoir, de mettre en œuvre et d'analyser l'enseignement d'une question mathématique donnée », ainsi que l'énonce l'arrêté définissant les épreuves du concours.

Elles supposent une solide préparation car il faut savoir, sur un sujet précis, rassembler et structurer ses connaissances en vue d'exposer les notions mathématiques afférentes, de proposer des applications et des exemples illustratifs, de sélectionner des exercices formateurs et adaptés. Pour cela, les candidats sont notamment encouragés à faire de nombreux exercices d'entraînement afin d'acquérir une familiarité et une aisance suffisantes avec les notions mathématiques qu'ils n'ont pas l'occasion d'enseigner. Il est également important de préparer des plans possibles pour les différents sujets proposés dont la liste est donnée au chapitre 5. À ce propos, il est vivement déconseillé d'utiliser sans recul les ouvrages livrant des leçons « prêtes à l'emploi ». D'une part, parce que le but de l'épreuve orale est précisément de montrer sa propre capacité à structurer l'exposé d'une question donnée, ce qui suppose souvent de comparer plusieurs ouvrages et de faire des choix réfléchis, d'autre part, parce que le jury connaît parfaitement ces ouvrages, ce qui l'amène souvent à s'assurer de la bonne maîtrise par les candidats des passages délicats et bien identifiés par lui.
Enfin, le jury attend du candidat qu'il montre sa capacité à s'engager dans un véritable échange scientifique, ouvert et constructif. Il est conseillé de se montrer attentif aux questions, d'expliciter ses pistes de recherche et le fil de son raisonnement mathématique. Au delà de la maîtrise des connaissances du programme, c'est bien la maîtrise des compétences mathématiques et professionnelles du candidat qui pourra ainsi être valorisée.

Chacune des deux épreuves orales comporte un temps de préparation de trois heures. Les candidats reçoivent une convocation aux épreuves d'admission mentionnant l'heure du début des opérations (accueil, consignes pratiques, vérification d'identité et tirage du sujet ; il est recommandé par sécurité de se présenter un quart d'heure avant), ainsi que l'heure de passage devant la commission d'oral pour chacune des deux épreuves qui ont lieu, sauf exception, sur deux jours consécutifs y compris dimanches et jours fériés. À leur première épreuve orale (épreuve d'exposé), les candidats tirent un couplage de deux sujets (au choix) qui relève soit du domaine de l'algèbre et géométrie soit du domaine de l'analyse et probabilités. Pour leur seconde épreuve orale (exemples et exercices), ils tirent un couplage de deux sujets (au choix) pris dans le domaine complémentaire (analyse et probabilités si le domaine de l'exposé était en algèbre et géométrie et vice-versa).

La bibliothèque de l'agrégation est disponible sous format numérique.
En salle de préparation, les candidats ont y accès ainsi qu'à d'autres ressources numériques : ouvrages numériques, programmes scolaires et documents ressources, derniers rapports du jury, programme

du concours, polycopiés numériques [1]. Ils ont également la **possibilité d'apporter leurs propres ouvrages sous réserve que ces derniers soient commercialisés [2] avec un numéro ISBN et qu'ils ne comportent aucune annotation, aucun surlignage, aucun marque page etc.**, faute de quoi ils pourraient être suspectés de tentative de fraude. Les candidats sont invités à bien s'en assurer avant de rejoindre le centre d'épreuves. Le jury insiste sur ce point, quelques candidats ne respectent toujours pas cette consigne.

Dans la salle de préparation, chaque candidat dispose d'un espace numérique de travail avec les ressources et logiciels prévus (*cf. infra* 4.1.2). Pour cela, des identifiants de connexion lui sont communiqués lors du tirage des sujets. Tous les fichiers qu'il crée sont enregistrés sur le réseau et, sous réserve de s'être deconnecté avant de quitter la salle de préparation, le candidat peut les retrouver dans la salle de jury en se reconnectant au réseau.

3.1 Considérations générales

Il appartient aux candidats de bien prendre connaissance des conditions de passation de chacune des épreuves orales (cf. *infra*), et notamment du fait qu'elles sont structurées en trois temps bien distincts et limités en durée : un temps de présentation ou d'exposé (avec notes), un temps de développement (sans notes) et un temps réservé aux questions du jury. Pendant les deux premières parties, le jury n'intervient pas, sinon en comptable du temps.

Comme pour les épreuves écrites, le jury attire l'attention sur la rigueur mathématique attendue, les énoncés des théorèmes et des définitions doivent être précis et complets, les quantificateurs ou connecteurs logiques doivent être rigoureusement utilisés.

Par ailleurs il convient de lire très attentivement le sujet et de bien en délimiter le périmètre pour éviter aussi bien des oublis que des hors sujets.

3.1.1 Critères d'évaluation

Le jury fonde son évaluation sur un ensemble de critères variés permettant d'apprécier à leur juste valeur les prestations des candidats. Il est particulièrement attentif :

- à la maîtrise mathématique du sujet :
  - maîtrise des contenus afférents au sujet et cela au niveau attendu par le concours ;
  - exactitude et précision des énoncés des définitions, théorèmes ou propriétés ;
  - rigueur des démonstrations et des raisonnements logiques, mise en évidence de l'utilisation des hypothèses ; maîtrise des quantificateurs, de la logique ;
  - capacité à mobiliser ses connaissances mathématiques en vue de résoudre un problème ou d'expliquer un phénomène ;
  - mise en lien des différentes idées et notions évoquées ;
  - etc.

- à la pertinence de la présentation au regard du sujet donné :
  - bonne couverture du thème avec un réel contenu mathématique et sans hors sujets ;
  - niveau auquel le candidat choisit de se placer (un niveau trop élémentaire est sanctionné de même qu'un niveau trop élevé si mal maîtrisé) ;

1. Liste publiée à l'adresse l'adresse suivante : http://interne.agreg.org
2. Les impressions de livres numériques ainsi que les polycopiés ne sont pas autorisés.

— cohérence du plan et des articulations entre les différentes parties et notions présentées ;
— choix du développement proposé ;
— diversité, richesse, progressivité des exercices retenus (ces derniers devant se compléter pour couvrir l'ensemble des problématiques du sujet) ;
— etc.

- aux qualités pédagogiques :
  — clarté de l'expression orale ;
  — clarté et cohérence des notations employées ;
  — capacité à motiver ses choix et ses actions, à expliquer clairement les raisons de sa démarche ;
  — gestion du temps ;
  — capacité à communiquer efficacement en se servant de différents supports (tableau, écran de projection) ;
  — présentation et gestion du tableau, organisation des calculs, etc.
  — capacités d'interaction avec le jury (écoute, réactivité, prise d'initiatives, capacité à mobiliser ses connaissances et à rectifier une erreur etc.) ;
  — utilisation convaincante, le cas échéant, des outils numériques ;
  — etc.

3.1.2 Usage des moyens informatiques

Les candidats trouvent en salle de préparation leur propre environnement numérique de travail. En amont des épreuves orales, ils peuvent se familiariser à cet environnement à l'adresse suivante :
`https://interne.agreg.org/agregOS/`.
L'enseignement des mathématiques nécessite l'utilisation d'outils informatiques, qu'il s'agisse de logiciels prêts à l'emploi ou d'algorithmes résolvant des problèmes de manière effective. Certaines tâches techniques (longs calculs, tracés de courbes, résolutions approchées de problèmes, etc.) sont facilitées par des logiciels spécialisés et certains logiciels interviennent couramment comme outils pédagogiques (représentation dynamique de situations géométriques, simulation d'expériences aléatoires etc...). L'enseignement d'algorithmique et de programmation fait partie intégrante des programmes de mathématiques au college comme au lycée ; les professeurs de mathématiques enseignant en classes préparatoires ont vocation à s'impliquer dans l'enseignement d'informatique inscrit dans les maquettes des formations.
C'est dans cet esprit que des moyens informatiques sont mis à disposition pour les deux épreuves orales afin que les candidats puissent valoriser leurs compétences dans ce domaine. Une utilisation pertinente en est attendue.
La liste des logiciels disponibles peut être consultée sur le site du jury à l'adresse suivante :
`http://interne.agreg.org`.
À noter : à partir de la session 2023, le logiciel Xcas ne sera plus disponible sur l'environnement numérique de travail du concours.

3.2 L'épreuve orale d'exposé

3.2.1 Déroulement de l'épreuve

L'épreuve orale d'exposé se déroule en trois temps :
- présentation du plan (durée maximale de **15 minutes**) ;
- développement d'un élément du plan choisi par le candidat (durée maximale de **15 minutes**) ;

- questions du jury (pour la **durée complémentaire de l'épreuve**).

3.2.2 Plan

Il s'agit de présenter les notions et les principaux résultats liés au sujet. C'est un exercice de synthèse qui suppose de savoir mettre en évidence les articulations entre les objets présentés et de bien faire ressortir les enchaînements d'idées. Ce ne doit pas être un catalogue de définitions et de résultats sans véritables liens entre eux.

Le candidat est invité à bien cerner le contour de la leçon. Il est inutile de détailler les notations et définitions élémentaires et de trop s'attarder sur les prérequis, afin de disposer d'un temps suffisant pour aborder la partie consistante et centrale du sujet.
Il n'est pas attendu du candidat qu'il écrive tout en détail au tableau. Il peut varier les modalités de présentation au cours des quinze minutes, afin de donner davantage de dynamisme à la leçon et mettre en valeur le coeur du sujet. Néanmoins, le propos doit rester rigoureux, les théorèmes importants ou les propriétés centrales du sujet doivent être énoncés avec précision (hypothèses, quantificateurs existentiels ou universels ...).

Le plan doit être cohérent sur l'ordre de présentation des différentes notions ou théorèmes. Il doit refléter les capacités de synthèse que l'on est en droit d'attendre d'un professeur de mathématiques. Il faut savoir prendre du recul et souligner oralement les liens entre les différents résultats présentés. Il est très apprécié d'être capable de fournir des exemples et contre-exemples des propriétés ou théorèmes cités. En particulier, il convient d'avoir réfléchi aux réciproques des conditions nécessaires ou suffisantes énoncées dans le plan. De même, les candidats sont invités, lorsque c'est pertinent, à proposer des applications, même si cela n'est pas explicitement demandé dans le libellé du sujet.
Une motivation **pertinente**, même orale, des notions fondamentales introduites est bienvenue, tout comme les exemples qui permettent d'illustrer les résultats théoriques. Le jury apprécie toute application dans des domaines variés témoignant d'une solide maîtrise mathématique et d'une bonne culture scientifique du candidat.
Ce dernier est encouragé à illustrer les exposés par des schémas, par exemple pour la méthode de Newton ou la comparaison série/intégrale. Enfin, certaines leçons ne peuvent se dispenser de l'outil informatique. Il convient de l'utiliser Ã propos et de maitriser les algorithmes présentés.

3.2.3 Développement

Le développement consiste à détailler et exposer une situation mathématique significative et importante de la leçon (souvent la démonstration d'un théorème), et **figurant explicitement dans le plan**. À ce titre le candidat doit s'assurer qu'il a prévu dans son plan le moment adéquat pour écrire proprement l'énoncé du développement. Ce développement se fait **sans notes**, celles-ci pouvant être consultées occasionnellement avec l'accord du jury (par exemple pour vérifier une hypothèse ou une notation). Il permet au jury d'apprécier les compétences mathématiques du candidat et sa capacité à effectuer une présentation vivante, claire et maîtrisée d'une question. Le développement ne doit pas se limiter à la « récitation » d'une démonstration apprise par cœur. Le candidat doit au contraire montrer qu'il domine son sujet en présentant le canevas de la démonstration, en annonçant avec précision les résultats intermédiaires qu'il cherche à établir et le type de raisonnement qu'il met en œuvre (raisonnement par l'absurde, par analyse-synthèse, par récurrence, etc.), en indiquant les moments où interviennent les hypothèses, etc. Il est également attendu une présentation rigoureuse (quantificateurs appropriés, hypothèses de récurrence précises...). Enfin, il est souhaitable pour le candidat de savoir aller plus en profondeur sur le développement présenté, notamment lorsqu'on modifie légèrement les hypothèses. Cela permet au jury de s'assurer de la compréhension de leur rôle dans la construction du résultat énoncé.

Le choix du développement revient au candidat et non aux examinateurs. Rappelons que ce choix est en soi un élément de l'évaluation. Le point développé doit être substantiel, consistant et au cœur du sujet. Il n'est pas admissible de démontrer un théorème en admettant l'essentiel du contenu mathématique de sa preuve dans un lemme énoncé dans le plan et en se contentant de faire de simples vérifications. Il est conseillé de s'assurer des démonstrations de bases relatives à un exposé : par exemple, sur une leçon sur le théorème des accroissements finis (216), faire un développement compliqué mais ne pas connaitre les grandes lignes de la démonstration du théorème des accroissements finis ne fait un bon effet.
Le jury a également sanctionné dans la notation les candidats qui ont proposé la résolution d'un exercice élementaire ou la présentation d'un exemple inconsistant. Ce n'est pas ce qui est attendu, outre le fait que cette pratique biaise la nature complémentaire des deux épreuves orales et pourrait s'interpréter comme une stratégie d'optimisation consistant à préparer des développements susceptibles d'être présentés aussi bien en exposé qu'en exercices. Enfin, certains candidats ont visiblement préparé des développements « passe-partout » qu'ils considèrent comme interchangeables entre plusieurs exposés mais qui s'avèrent souvent n'avoir qu'un lien très ténu avec le sujet choisi, ce qui est sanctionné par le jury.

3.2.4 Niveau de la leçon

Il convient d'éviter deux écueils : celui de se placer à un niveau trop élémentaire et celui de vouloir traiter des questions que l'on ne maîtrise pas ou mal. Il appartient au candidat de proposer un exposé en adéquation avec le niveau du programme de l'agrégation interne, en retenant des notions, théorèmes et exemples qu'il maîtrise.
Par ailleurs, se placer d'emblée dans un cadre plus vaste que celui qui est précisé dans l'intitulé du sujet n'est pas recommandé car c'est prendre le risque de ne pas développer des particularités spécifiques à la question posée ou de traiter des parties « hors sujet », inévitablement sanctionnées par le jury. Il est préférable, si on le souhaite, d'étendre les résultats présentés en fin d'exposé.

3.2.5 Questions du jury

Les questions du jury visent à s'assurer de la bonne compréhension et d'une maîtrise suffisante des notions présentées par le candidat. Les premières permettent souvent de corriger les éventuelles imprécisions ou erreurs figurant dans le plan ou dans le développement. Elles peuvent aussi consister à appliquer un résultat de la leçon sur un exemple proposé par le jury. Elles ne sont pas posées dans le but de piéger les candidats et ne nécessitent que très rarement de longs arguments. Si le candidat n'a pas proposé d'exemple ou de contre-exemple, cela pourra lui être demandé à ce moment là de l'épreuve. De même, le candidat doit s'attendre à ce que le jury lui demande des justifications, voire des démonstrations, de points ou notions qu'il aura exposés.

Les capacités de recherche et d'interaction du candidat avec le jury sont particulièrement évaluées lors de ce temps de l'épreuve. Réfléchir à haute voix, reformuler la question posée, se placer dans un cas particulier quand on ne voit pas comment traiter le cas général, s'aider de figures ou de schémas sont autant d'attitudes qui sont valorisées par le jury.
Le jury conseille aux candidats de bien prendre le temps d'écouter les questions et de ne pas hésiter á prendre quelques notes des indications fournies.

3.3 L'épreuve orale d'exemples et exercices

L'épreuve d'exemples et exercices consiste à présenter une sélection de situations particulières d'enseignement sur un thème donné. Le candidat témoigne ainsi de sa maîtrise mathématique du sujet et de sa réflexion pédagogique relative à son enseignement.

3.3.1 Déroulement de l'épreuve

En réponse au sujet qu'il a retenu, le candidat propose trois à six exercices ou exemples dont il rédige l'énoncé sur des feuilles pré-imprimées qui lui sont remises. À l'issue de la préparation, des photographies de ce document sont réalisées et remises aux examinateurs.

L'épreuve orale se déroule en trois temps :

- présentation motivée de l'ensemble des exercices ou exemples sélectionnés par le candidat (durée maximale de **10 minutes**) ;
- résolution commentée d'un des exercices ou exemples au choix du candidat parmi ceux qu'il vient de présenter (durée maximale de **15 minutes**) ;
- questions du jury (pour la **durée complémentaire de l'épreuve**).

L'épreuve n'est pas censée représenter une séance devant une classe de collège ou de lycée ; des objectifs plus ambitieux et un rythme plus soutenu doivent être adoptés sous réserve d'une bonne maîtrise des notions mathématiques sous-jacentes et d'une certaine qualité d'exposition.

L'attention des candidats est appelée sur les deux points suivants :

- la formulation d'un énoncé est un acte pédagogique et le candidat est invité à modifier ceux des ouvrages qu'il consulte, en fonction de l'objectif pédagogique qu'il se fixe. Ainsi, par exemple, des énoncés segmentés en de trop nombreuses questions ne demandant que des vérifications élémentaires ne sont pas adaptés à cette épreuve ;
- la démonstration d'une propriété du cours nécessite, si le candidat souhaite la proposer dans sa liste d'exercices ou d'exemples, un réel travail de transformation pédagogique pour qu'elle devienne un véritable exercice, au risque sinon de dévoyer le sens de cette épreuve en reprenant à l'identique des énoncés qui ont en fait toute leur place dans l'épreuve d'exposé.

Cette épreuve nécessite un important travail de préparation en amont car elle suppose une réflexion transversale préalable sur les notions figurant au programme afin de pouvoir en présenter des illustrations variées. Elle demande du recul et il ne faut pas s'étonner de voir le jury demander le schéma général de résolution d'un exercice proposé par le candidat, sans en demander tous les détails : cela suppose de bien maîtriser les mathématiques sous-jacentes et exclut en particulier la recopie d'exercices trouvés à la hâte dans divers recueils.

3.3.2 Présentation motivée des exercices ou exemples

Il s'agit d'expliquer soigneusement les raisons qui ont conduit au choix des exercices et il est inutile de recopier les énoncés au tableau, le jury en disposant déjà. Motiver le choix d'une liste d'exercices, c'est en expliquer la pertinence par des raisons d'ordre pédagogique ou mathématique (l'un n'excluant pas l'autre), préciser les prérequis, situer les exercices dans leur contexte, commenter leur apport sur le plan pédagogique, etc. Le jury recommande aux candidats de préparer soigneusement cette phase de l'épreuve, trop d'entre eux arrivant encore démunis de tout argumentaire suffisamment solide.

Voici quelques éléments de motivations possibles :

Objectif : S'il est important d'indiquer à quel public s'adressent les exercices et ce qu'ils supposent connu de ce public, ceci doit être fait brièvement. Il faut également décrire quel est l'objectif de chaque exercice : illustration ou complément d'un résultat de cours, entraînement à une technique de calcul particulière, mise en évidence d'une propriété remarquable, etc. Insistons : cette présentation doit être concise.

Niveau : Les difficultés éventuelles d'un énoncé doivent être mises en évidence. Le souci de graduer ces difficultés ou d'aider à les surmonter par des indications appropriées ou des questions intermédiaires constitue un aspect possible de la présentation des exercices. Il est important d'indiquer l'apport mathématique de chaque exercice choisi.

Compétences mathématiques : L'explicitation d'une ou plusieurs des six compétences mathématiques travaillées dans les exercices est appréciée.

Cohérence : Les énoncés ne doivent pas constituer une collection hétéroclite, sans que jamais ne se dégage une quelconque méthode un peu générale : leur ensemble doit posséder un certain degré de cohérence, variable selon les sujets. Il serait bon que les candidats puissent dégager les idées, méthodes générales qui entrent en jeu même si elles sont illustrées dans les exercices sur des cas particuliers. Indiquer les connexions pouvant relier certains énoncés est une démarche appréciée, de même que l'indication de la place de ces exercices dans une séquence d'enseignement. Dans tous les cas, il faut s'assurer que les exercices retenus sont en adéquation avec le sujet proposé et « balayent » effectivement l'ensemble du sujet.

Intérêt : Un exercice peut apporter un éclairage particulier sur une notion ou laisser entrevoir un développement de celle-ci ou encore en donner une application pertinente. De tels critères peuvent être mis en avant pour justifier du choix d'un exercice. Il est d'ailleurs bon de citer les concepts ou théorèmes sous-jacents. Lorsqu'il existe diverses méthodes ou outils pour résoudre un problème donné, un exercice peut avoir pour objectif d'en comparer certaines, ne serait-ce que sur des exemples.

Originalité : Le choix d'un exercice ne doit pas se limiter au recyclage de quelques situations.

3.3.3 Résolution détaillée d'un exercice ou d'un exemple

À l'issue de la présentation des exercices, le candidat désigne un exercice ou exemple qu'il se propose de résoudre en détail. Insistons, comme pour l'épreuve d'exposé, sur le fait que ce choix revient au candidat et non aux examinateurs, et qu'il constitue un élément de l'évaluation. Au cours de cette phase, tout comme de la précédente, les examinateurs n'interviennent pas et le candidat doit faire preuve d'autonomie.

Il convient néanmoins de mettre en avant certaines erreurs ou maladresses à éviter.
Il est très maladroit, et pénalisant, de choisir de développer un premier exercice très élémentaire (la résolution est supposée durer quinze minutes), même si on a donné une liste progressive et substantielle.
Il convient d'éviter de présenter un exercice que le nombre pléthorique de questions intermédiaires viderait de sa substance et qui cantonnerait le candidat à une succession de tâches atomisées.

On rappelle que les candidats doivent être capables de fournir un énoncé correct des théorèmes qu'ils utilisent lors de la résolution de leurs exercices.
Les candidats doivent aussi s'assurer que les énoncés des exercices qu'ils proposent ne comportent pas d'erreurs.

3.3.4 Questions du jury

Ces questions peuvent être de plusieurs sortes. Elles permettent souvent de corriger d'éventuels lapsus ou de mettre en évidence une faille dans la solution ou encore de s'assurer que le candidat a réellement saisi les divers aspects de la résolution (en examinant par exemple l'impact d'une modification des hypothèses sur le résultat annoncé). Il est bien souvent demandé au candidat de donner des précisions sur la résolution de l'exercice qu'il a proposé.
Le candidat doit s'attendre aussi à être interrogé, au moins partiellement, sur la résolution de **chacun des exercices** qu'il propose. À défaut d'une solution détaillée, il peut lui être demandé les méthodes utilisées ou les différents enchaînements de la résolution. Il est du plus mauvais effet de proposer un exercice que l'on ne sait absolument pas résoudre.
Par ailleurs, les examinateurs cherchent à déterminer si les notions apparaissant dans tel ou tel énoncé sont effectivement connues du candidat. En ce sens, un choix d'exercices trop ambitieux risque d'élever le niveau des questions posées. Il n'est pas recommandé d'évoquer des questions à propos desquelles on n'a aucun recul. Il est en revanche attendu une maîtrise du calcul.
Pour terminer, soulignons que les questions du jury n'ont en aucun cas pour but de déstabiliser le candidat. Elles visent simplement à cerner au mieux l'étendue de ses connaissances et compétences.
Encore un fois, précisons que le jury attend un échange scientifque avec le candidat.

Chapitre 4

Liste des sujets d'oral

Leçons d'algèbre et géométrie

101 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.
102 Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.
103 Anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.
104 Nombres premiers. Propriétés et applications.
106 PGCD dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ où $\mathbf{K}$ est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.
107 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs.
109 Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.
110 Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.
112 Changements de bases en algèbre linéaire et en algèbre bilinéaire. Applications.
113 Déterminants. Applications.
114 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications. Aspects algorithmiques.
117 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.
119 Utilisation des nombres complexes en géométrie.
120 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien. Applications.
121 Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cas d'un espace euclidien. Applications géométriques.
123 Isométries du plan affine euclidien, décomposition canonique. Applications.
125 Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, décomposition canonique. Applications.
128 Barycentres. Applications.
131 Applications affines en dimension finie. Propriétés et exemples.
137 Droites et cercles dans le plan affine euclidien.
142 Utilisation de groupes en géométrie.
143 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.
144 Notion de rang en algèbre linéaire et bilinéaire. Applications.
146 Coniques.
150 Diverses factorisations de matrices. Applications.

151 Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications. (On supposera connues les notions de valeurs propres, vecteurs propres et sous-espace propres).
155 Systèmes d'équations linéaires. Applications.
156 Valeurs propres. Recherche et utilisation.
158 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
159 Algorithme d'Euclide dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ où $\mathbf{K}$ est un corps commutatif. Calcul de PGCD et de coefficients de Bézout. Applications.
163 Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.
165 Idéaux d'un anneau commutatif. Exemples.
166 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
167 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
168 Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients-racines.
169 Structures quotients dans divers domaines de l'algèbre. Applications.
170 Méthodes de chiffrement ou de codage. Illustrations.
171 Groupe linéaire GL(E) dâ€™un espace vectoriel de dimension finie E. Sous-groupes. Applications.
172 Endomorphismes trigonalisables et nilpotents. Applications.

Leçons d'analyse et probabilités

201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. On pourra proposer des applications.
202 Séries à termes réels positifs. On pourra proposer des applications.
203 Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence. (Les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs sont supposés connus).
204 Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications.
205 Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation des fonctions.
206 Parties compactes de $\mathbf{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications.
207 Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.
208 Théorèmes de points fixes.
209 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.
210 Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
212 Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples.
213 Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques et hyperboliques, nombre π.
215 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
216 Théorèmes des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles. Applications.
217 Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
218 Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.
219 Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.
220 Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur.

221 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de **R** (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples.
223 Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.
224 Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de **R**, à valeurs réelles ou complexes.
225 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples.
227 Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Exemples.
228 Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles.
229 Suites de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale.
230 Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Covariance. Exemples.
231 Espérance, variance ; loi faible des grands nombres. Applications.
232 Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.
235 Exponentielles de matrices. Applications.
237 Construction de l'intégrale et lien avec les primitives.
241 Diverses notions de convergence en analyse et en probabilités. Exemples et applications. (Les définitions des notions de convergence sont supposées connues).
244 Inégalités en analyse et en probabilités. Par exemple : Cauchy-Schwarz, Markov, Bessel, convexité. . .
249 Loi normale en probabilités et statistiques.
251 Diverses méthodes de résolution approchée d'une équation numérique ou d'une équation différentielle.
254 Algorithmes d'approximation du nombre π.
256 Vitesse de convergence. Méthodes d'accélération de convergence.
257 Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels, ...
258 Couples de variables aléatoires possédant une densité. Covariance. Exemples d'utilisation.
260 Variables aléatoires discrètes, couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples d'application.
262 Étude métrique des courbes planes.
263 Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
264 Fonctions développables en série entière. Exemples et applications. (Les résultats relatifs aux séries entières sont supposés connus).
265 Inversion locale, difféomorphismes. Applications.
266 Applications linéaires continues, normes associées. Exemples.
267 La fonction Gamma.

Exemples et exercices d'algèbre et géométrie

301 Exercices sur les groupes.
302 Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans **Z**.
304 Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.
305 Exercices illustrant l'utilisation des nombres premiers.
306 Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM.

307 Exercices faisant intervenir des dénombrements.
309 Exercices faisant intervenir des polynômes et fractions rationnelles. On pourra se limiter aux corps de base **R** ou **C**.
310 Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
311 Exercices illustrant l'utilisation de la notion de rang.
312 Exercices illustrant l'utilisation des matrices inversibles.
313 Exercices illustrant l'utilisation de systèmes d'équations linéaires.
314 Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.
315 Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.
317 Exercices sur les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables.
319 Exercices faisant intervenir des décompositions de matrices.
321 Exercices faisant intervenir la réduction des matrices symétriques réelles dans des domaines variés.
322 Exercices sur les formes quadratiques.
323 Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.
325 Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimensions 2 et 3.
326 Exercices faisant intervenir la notion de barycentre ou d'application affine.
328 Exemples d'utilisation de transformations en géométrie.
330 Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimensions 2 et 3.
334 Exercices sur les coniques.
339 Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.
340 Exercices faisant intervenir des groupes en géométrie.
345 Exercices sur les polygones.
346 Exemples de problèmes modélisés par des graphes.
348 Exercices illustrant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices.
350 Exercices faisant intervenir des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice. Aspects algorithmiques.
351 Exercices faisant intervenir des polynômes irréductibles.
353 Exercices utilisant la notion d'endomorphisme nilpotent.
354 Exercices sur les cercles et les sphères.
355 Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux.
356 Exercices utilisant les permutations d'un ensemble fini.
357 Exercices utilisant le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Exemples et exercices d'analyse et probabilités

402 Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.
403 Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.
404 Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.
405 Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
407 Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.
408 Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.
409 Exemples d'utilisation de polynômes en analyse.
410 Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.

411 Exemples d'étude de fonctions définies par une série.
412 Exemples de développement d'une fonction en série entière. Applications.
413 Exemples d'applications des séries entières.
414 Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.
415 Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.
417 Exemples illustrant l'approximation de fonctions numériques.
418 Exemples d'utilisation de développements limités de fonctions d'une ou plusieurs variables.
421 Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Aspects algorithmiques.
422 Exemples d'étude d'intégrales impropres.
423 Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.
426 Exemples d'utilisation d'intégrales simples et multiples : calculs de longueurs, d'aires, de volumes, ...
427 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
428 Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires.
429 Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires.
430 Exemples d'étude et de résolution d'équations différentielles issues de domaines variés (sciences expérimentales ou autres sciences).
431 Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles.
432 Exemples d'approximations d'un nombre réel. Aspects algorithmiques.
434 Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.
435 Exemples de modélisations de situations réelles en probabilités.
436 Exemples d'applications de l'intégration par parties.
437 Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.
438 Exemples de problèmes de dénombrement. Utilisation en probabilités.
439 Exemples d'étude d'applications linéaires continues et de leur norme.
440 Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).
443 Exemples de méthodes et d'algorithmes de résolution approchée d'équations $F(X) = 0$, X désignant une variable réelle ou vectorielle.
444 Exemples de calcul approché de la limite d'une suite, de la somme d'une série. Aspects algorithmiques.
447 Exemples d'équations fonctionnelles.
448 Exemples d'estimation en statistiques : estimation ponctuelle, estimation par intervalles de confiance.
449 Exemples d'équations différentielles non linéaires.
451 Exemples d'applications des transformées de Fourier et de Laplace.
452 Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites.
453 Exercices illustrant l'utilisation de la loi binomiale en probabilités et en statistiques.
454 Exemples d'applications de la notion de compacité.
455 Exemples d'étude qualitative d'équations différentielles ou de systèmes différentiels.