

SESSION 2023

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

**Section : PHYSIQUE-CHIMIE
Option : PHYSIQUE**

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1500A	101	0385

Gradients d'indice : du phénomène de mirage aux applications modernes

L'analyse des déviations et déphasages subis par une onde électromagnétique est toujours riche d'enseignements sur le(s) milieu(x) qu'elle traverse. Ce problème en fournit quelques exemples.

On propose ici de s'intéresser tout d'abord à la modélisation de la propagation d'une onde dans un milieu inhomogène (partie I), puis à l'exploitation d'une expérience d'interférométrie mettant en jeu un gradient d'indice d'origine thermique (partie II), avant d'envisager enfin l'effet de mirage gravitationnel qui permet notamment aux astrophysiciens de détecter des masses non visibles dans l'univers (partie III).

Les trois parties de cette épreuve sont largement indépendantes entre elles ; il est néanmoins fortement recommandé de consacrer, en début d'épreuve, un temps raisonnable à la recherche de la partie I. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré. La plus grande importance sera accordée à la qualité de la rédaction et de la présentation ; les réponses aux questions qualitatives devront être claires et argumentées.

Constantes et données physiques :

Célérité de la lumière dans le vide :	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante des gaz parfaits :	$\mathcal{R} = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'air :	$M_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de gravitation universelle :	$\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse du Soleil :	$M_{\odot} = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$
Rayon du Soleil :	$R_{\odot} = 7,0 \times 10^8 \text{ m}$
Masse de la Terre :	$M_{\oplus} = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon de la Terre :	$R_{\oplus} = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$
Parsec :	$1 \text{ pc} = 3,1 \times 10^{16} \text{ m}$
Masse du proton :	$m_{\text{p}} = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Formulaire :

- Niveau d'intensité sonore (en dB) : $I_{\text{dB}} = 10 \log \frac{\langle \Pi_a \rangle_t}{\Pi_{\text{ref}}}$ où $\langle \Pi_a \rangle_t$ désigne la puissance acoustique surfacique moyenne transportée par l'onde considérée et $\Pi_{\text{ref}} = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

- Pour trois vecteurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} : $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$

- Pour un champ scalaire f et un champ vectoriel \vec{X} :

- $\text{div} (f \vec{X}) = f \text{div} \vec{X} + (\overrightarrow{\text{grad}} f) \cdot \vec{X}$

- $\overrightarrow{\text{rot}} (f \vec{X}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{X} + (\overrightarrow{\text{grad}} f) \wedge \vec{X}$

- $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{X}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{X}) - \Delta \vec{X}$

- $\overrightarrow{\text{grad}} \frac{X^2}{2} = (\vec{X} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{X} - (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{X}) \wedge \vec{X}$

- On donne l'intégrale suivante : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{2}{b^2}$

Préliminaire

Dans tout le problème, les milieux considérés – qu'ils soient traversés par la lumière ou par une onde d'une autre nature – sont supposés linéaires, isotropes, transparents et non dispersifs. Leur indice de réfraction, ou indice optique, au point M est noté indifféremment $n(M)$ ou $n(\vec{r})$.

Q1. Expliquer la signification de l'hypothèse de milieu *transparent* et *isotrope*, puis rappeler la définition de l'indice optique n d'un tel milieu.

I. Propagation d'une onde dans un milieu inhomogène

I.A - Marche d'un rayon lumineux à travers un milieu stratifié

Dans le cadre du modèle géométrique de la lumière, la trajectoire suivie par l'énergie lumineuse est représentée par une courbe géométrique \mathcal{C} appelée rayon lumineux. On propose ici de construire géométriquement la marche d'un rayon lumineux au sein d'un milieu inhomogène stratifié, constitué de plusieurs couches homogènes, horizontales, de même épaisseur et contiguës (cf. FIGURE 1). Chaque couche horizontale est repérée par un entier i ($i \in \mathbb{N}^*$) et caractérisée par son indice optique n_i supposé uniforme. On note α_i l'angle que forme le rayon lumineux \mathcal{C} avec l'horizontale au sein de la i -ième strate.



FIGURE 1 – Schéma-modèle du milieu stratifié étudié.

Q2. Énoncer les lois de la réfraction qui permettent de construire la marche d'un rayon lumineux au sein du milieu stratifié. En déduire une relation entre les couples (n_1, α_1) et (n_i, α_i) .

Q3. Préciser les conditions dans lesquelles il est possible d'observer un phénomène de réflexion totale à l'interface entre deux strates successives.

Q4. Reproduire schématiquement la FIGURE 1 sur la copie, puis représenter la marche du rayon lumineux pénétrant dans le milieu au point A_1 en formant l'angle α_1 avec l'horizontale. Pour réaliser cette construction, on supposera que la suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ des indices optiques est strictement décroissante ; les strates sont infinies dans les directions horizontales.

I.B - Transposition dans le domaine des ondes acoustiques

Dans l'article intitulé *Mirages acoustiques*, écrit par Jean-Michel Courty et Édouard Kierlik¹, on lit que :

[...] le son est dévié dans un milieu où sa vitesse de propagation n'est pas uniforme : les trajectoires des ondes sonores s'incurvent vers les zones où la vitesse de propagation du son est la plus faible. Ce phénomène est nommé réfraction ; en dehors du vent, deux grandeurs influent aussi sur la réfraction du son : la pression et la température. La vitesse du son croît d'environ 0,6 mètre par seconde et par degré Celsius : elle dépend de l'altitude puisque la température change avec cette dernière. Généralement, l'air se refroidit à mesure que l'on s'élève, et la vitesse du son est plus faible en altitude que près du sol. La situation est alors analogue à celle que l'on observe en parlant contre le vent : le son est dévié vers le haut. Cet effet est amplifié en cas d'orage où l'air au voisinage du sol est très chaud, la température diminuant fortement avec l'altitude. La réfraction est alors si importante que l'on n'entend pas le tonnerre d'orages qui éclatent à seulement quelques kilomètres de distance : tout se passe comme si l'on se trouvait dans une zone d'« ombre sonore ». L'effet inverse se produit lorsque l'air au sol est plus froid qu'en altitude : par les nuits froides d'hiver, une *Smart* qui traverse la campagne rugit comme une *Ferrari*² !

Q5. En s'appuyant sur l'extrait ci-dessus et sur les résultats de la partie I.A, comparer le sens de courbure de la trajectoire des ondes sonores à celui des rayons lumineux dans un milieu inhomogène.

Q6. Construire, par analyse dimensionnelle, l'expression de la célérité du son dans un fluide en fonction de sa masse volumique au repos μ_0 et de sa compressibilité isentropique χ_S (définie par $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$, où P désigne la pression du fluide et μ sa masse volumique).

Q7. Mettre en place un modèle simple qui permet de justifier numériquement l'affirmation selon laquelle « la vitesse du son [dans l'air] croît d'environ 0,6 mètre par seconde et par degré Celsius ». Le candidat sera libre d'introduire tout paramètre physique lui paraissant pertinent et en proposera, si cela s'avère utile, une valeur numérique.

Q8. Réaliser un schéma illustrant la dernière phrase de l'extrait : « par les nuits froides d'hiver, une *Smart* qui traverse la campagne rugit comme une *Ferrari* ». Accompagner le schéma d'une légende explicative, constituée d'une ou deux phrases.

En s'appuyant sur des mesures réalisées par la presse spécialisée lors d'essais de véhicules, on peut estimer qu'une *Smart* roulant à 90 km/h engendre un niveau d'intensité sonore de 65 dB

1. *Mirages acoustiques*, J.-M. Courty & É. Kierlik, Pour la Science, n° 298, août 2002.

2. Une *Smart* est une petite voiture citadine., tandis qu'une *Ferrari* est une puissante voiture de sport

en moyenne, alors qu'une Ferrari est associée à un niveau d'intensité sonore de 90 dB dans des conditions similaires.

Q9. Exploiter ces valeurs numériques pour mettre en doute la métaphore finale proposée par les auteurs de l'article : « par les nuits froides d'hiver, une *Smart* qui traverse la campagne rugit comme une *Ferrari* ! » Quel(s) autre(s) argument(s) pourrait-on invoquer pour continuer à nuancer la comparaison entre les sons produits par les deux véhicules ?

I.C - Équation eikonale

Le temps de cette sous-partie, on adopte le modèle ondulatoire vectoriel de la lumière. Selon ce modèle, les rayons lumineux correspondent aux lignes de champ du vecteur de Poynting moyen $\langle \vec{R} \rangle_t$ associé au champ électromagnétique. Le milieu diélectrique traversé est supposé linéaire, transparent, isotrope et sans propriété magnétique. Son indice optique $n(\vec{r})$, réel et stationnaire, varie continûment dans l'espace ; on suppose en outre qu'il ne dépend pas de la fréquence dans la gamme spectrale considérée. L'objectif de cette sous-partie est d'établir l'équation différentielle qui régit la trajectoire des rayons lumineux au sein d'un tel milieu.

Q10. Préciser la signification physique du vecteur de Poynting \vec{R} et expliquer pourquoi on s'intéresse à sa valeur moyenne temporelle dans le cas de la lumière.

Électromagnétisme dans un milieu diélectrique

On note respectivement \vec{P} , ρ_p et \vec{j}_p le vecteur polarisation, la densité de charges volumiques de polarisation et la densité de courants volumiques de polarisation dans le milieu diélectrique. On rappelle en outre que ces quantités sont liées entre elles par les relations

$$\begin{cases} \rho_p(\vec{r}, t) = -\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}, t) \\ \vec{j}_p(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (1)$$

Q11. Rappeler la définition du vecteur polarisation \vec{P} d'un milieu diélectrique, puis présenter qualitativement les notions de charges et de courants de polarisation.

Q12. Écrire les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique vérifiant les hypothèses rappelées au début de la partie I.C. On introduira le vecteur déplacement électrique \vec{D} dont on donnera l'expression et la dimension.

Des équations de Maxwell à l'équation eikonale

Dans le milieu inhomogène d'indice optique $n(\vec{r})$ réel et stationnaire, les champs \vec{E} et \vec{D} sont liés par

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 n^2(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2)$$

Pour traiter les questions suivantes, il est recommandé de se référer aux formules d'analyse vectorielle rappelées en introduction.

Q13. Montrer que l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ dans un tel milieu s'écrit sous l'une des deux formes suivantes, dont on peut montrer qu'elles sont équivalentes³ :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{grad} \left[\frac{1}{n^2} \vec{E} \cdot \text{grad} n^2 \right] = \vec{0} \quad (3)$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \text{grad} \left[n^2 \vec{E} \cdot \text{grad} \frac{1}{n^2} \right] = \vec{0} \quad (4)$$

On suppose que l'indice optique n du milieu varie sur une longueur caractéristique ℓ^* très grande devant la longueur d'onde du champ électromagnétique.

Q14. Par des considérations sur les ordres de grandeur mis en jeu, justifier que l'on puisse négliger le terme $\text{grad} \left[\frac{1}{n^2} \vec{E} \cdot \text{grad} n^2 \right]$ devant $\vec{\Delta} \vec{E}$ dans l'équation de propagation.

L'onde étudiée est monochromatique, de pulsation ω , et on suppose que les variations spatiales de son amplitude sont négligeables à l'échelle considérée. On pose ainsi

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}, t) \right\} \quad \text{avec} \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i[k_0 S(\vec{r}) - \omega t]} \quad (5)$$

où \vec{E}_0 est un vecteur constant, $k_0 = \omega/c$ et $S(\vec{r})$ est une fonction à valeurs réelles, appelée fonction eikonale.

Q15. Montrer que le champ magnétique \vec{B} de l'onde est donné par

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \text{grad} S(\vec{r}) \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (6)$$

Q16. Exprimer le vecteur de Poynting \vec{R} de l'onde en fonction de μ_0 , c , $\|\vec{E}\|$ et S . En déduire que les rayons lumineux de l'optique géométrique correspondent aux lignes de champ de $\text{grad} S$. Relier ce résultat au théorème de Malus-Dupin.

Q17. Montrer que l'équation de propagation impose à la fonction eikonale de vérifier

$$\|\text{grad} S\|^2(\vec{r}) = n^2(\vec{r}) \quad (7)$$

3. La démonstration de l'équivalence entre les deux équations n'est pas attendue.

Loi fondamentale de l'optique géométrique

On considère désormais un rayon lumineux \mathcal{C} , pour lequel on note s l'abscisse curviligne du point courant M le long du rayon lumineux étudié et \vec{e}_{\parallel} le vecteur unitaire local tangent au rayon lumineux. Les résultats établis précédemment permettent d'aboutir à la loi fondamentale de l'optique géométrique

$$\frac{d [n \vec{e}_{\parallel}]}{ds} (M) = \vec{\text{grad}} n (M) \quad (8)$$

Q18. Interpréter le résultat fourni par la loi fondamentale de l'optique géométrique dans le cas particulier d'un milieu homogène d'indice n uniforme.

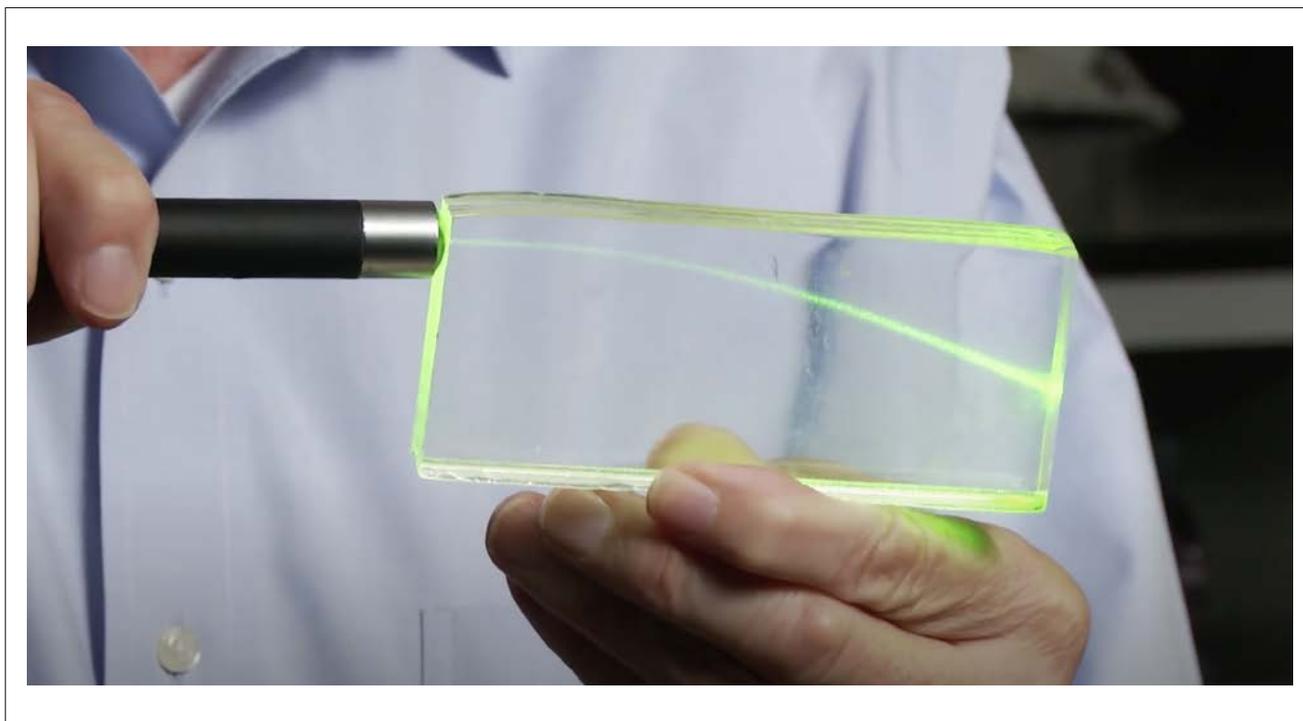


FIGURE 2 – Dans une vidéo intitulée « Refractive Properties of Gradient Index Optics », un enseignant fait passer un pinceau laser à travers un morceau de plexiglas inhomogène pour montrer la courbure induite par le gradient d'indice optique. (Source : <https://youtu.be/rnNjV3fh-4M>).

Q19. Le gradient d'indice dans l'échantillon de plexiglas de la FIGURE 2 est purement vertical. En explicitant la démarche suivie et les approximations effectuées, proposer une estimation numérique du gradient d'indice optique dans cet échantillon. Commenter le résultat obtenu.

Q20. Décrire, au moyen d'un schéma et d'un protocole d'accompagnement, une autre expérience réalisable au laboratoire d'un lycée pour mettre en évidence la courbure des rayons lumineux induite par un gradient d'indice. *Le protocole, dont la rédaction n'excèdera pas une demie-page, doit être suffisamment explicite pour pouvoir être mis en œuvre par des étudiants.*

II. Exploitation interférométrique du gradient d'indice optique induit dans l'air par une plaque chauffée

Les gradients d'indice optique peuvent être exploités pour réaliser des mesures dans le domaine de la thermodynamique. On s'intéresse dans cette partie à une méthode de mesure interférométrique du coefficient d'échange conducto-convectif entre une plaque métallique chauffée et l'air ambiant. Le dispositif expérimental, présenté sur les FIGURES 3 et 4, repose sur la mise en œuvre d'un interféromètre s'apparentant à un interféromètre de Mach-Zehnder, éclairé par un faisceau lumineux parallèle et monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0 .

Une plaque d'acier rectangulaire de faible épaisseur est placée dans un des bras de l'interféromètre. Elle est portée à la température T_{pl} au moyen d'un dispositif de chauffage avec lequel elle est en contact par sa face inférieure. Il en résulte l'existence d'un gradient de température dans l'air au-dessus de la plaque, supposé purement vertical, auquel est associé un gradient d'indice optique. Pour simplifier l'interprétation de la figure observée, on suppose que l'indice optique de l'air n'est modifié que dans le domaine situé au-dessus de la plaque chauffée (cf. FIGURE 4), appelé « zone d'influence thermique » de la plaque. Dans ce domaine, on considère que l'indice optique n ne dépend que de l'altitude z mesurée par rapport au plan de la plaque. Partout ailleurs, sa valeur est notée n_∞ . On suppose en outre que le faisceau lumineux qui traverse l'interféromètre est suffisamment large pour couvrir toute la hauteur de la zone d'influence thermique au-dessus de la plaque.

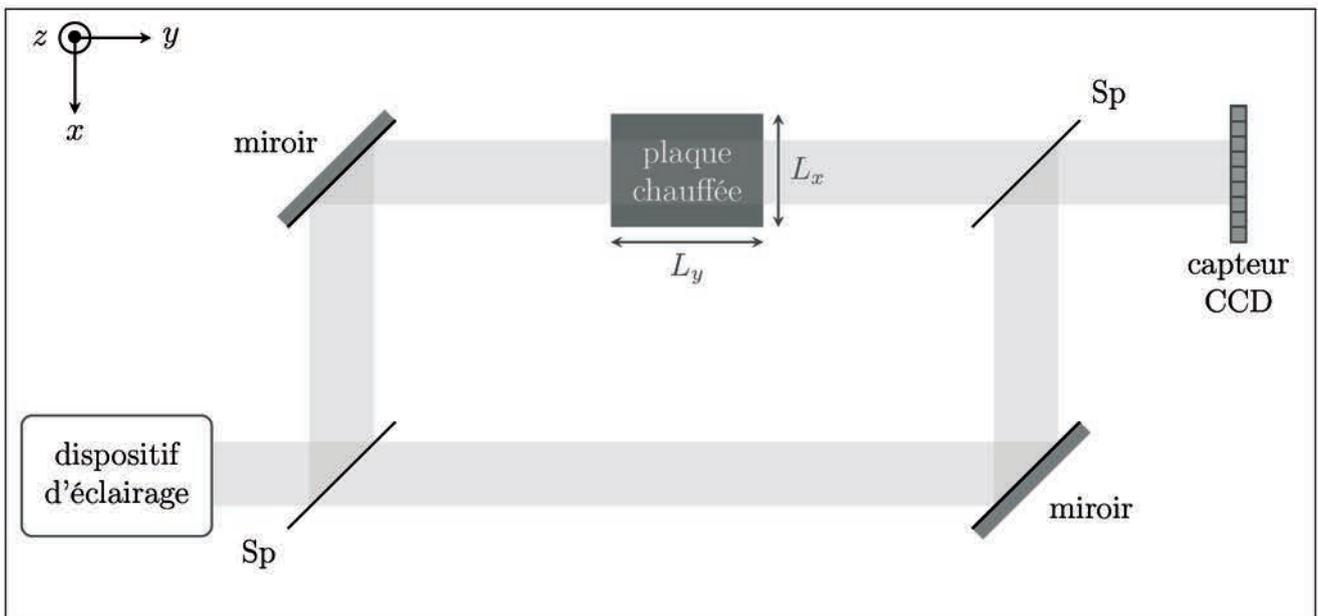


FIGURE 3 – Schéma de l'interféromètre de Mach-Zehnder, vu de dessus.

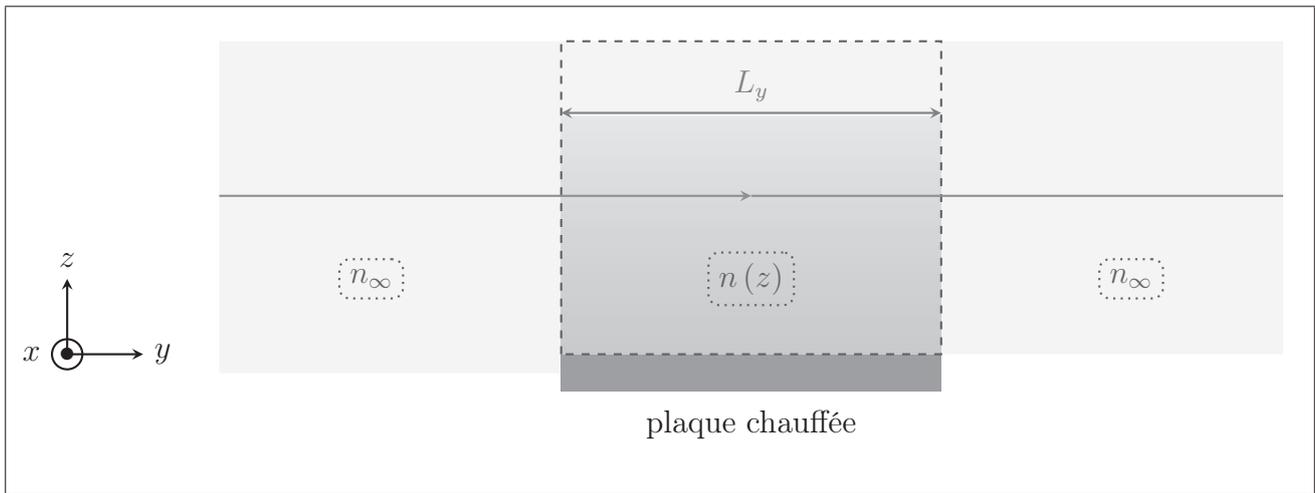


FIGURE 4 – Schéma-modèle du bras de mesure de l'interféromètre de Mach-Zehnder, vu en coupe verticale. La « zone d'influence thermique » de la plaque chauffée est supposée restreinte à la zone délimitée par les pointillés. Dans cette zone, l'indice optique n de l'air dépend de l'altitude z ; à l'extérieur de cette zone, il est supposé uniforme et noté n_∞ .

Données numériques utiles :

Dimensions de la plaque d'acier :	$L_x = 20 \text{ cm}$; $L_y = 26 \text{ cm}$ (épaisseur : $L_z = 0,26 \text{ cm}$)
Masse volumique de la plaque :	$\rho_{\text{pl}} = 7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Capacité thermique massique de la plaque :	$c_{\text{pl}} = 502 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
Conductivité thermique de l'air à $55 \text{ }^\circ\text{C}$:	$\kappa_{\text{a}} = 2,83 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

II.A - Considérations thermodynamiques

Pour l'étude à suivre, on suppose le régime stationnaire atteint. La face supérieure de la plaque chauffée définit le plan d'équation $z = 0$. On note $T(z)$ la température de l'air à l'altitude z dans la zone d'influence thermique de la plaque et T_∞ la température de l'air partout en dehors de cette zone. L'objectif est de déterminer une valeur expérimentale du coefficient d'échange h intervenant dans l'énoncé de la loi de Newton :

$$\varphi_Q = h [T_{\text{pl}} - T_\infty] \quad (9)$$

où φ_Q désigne le flux thermique surfacique cédé par la plaque à l'air environnant. Les valeurs des températures T_{pl} et T_∞ sont mesurées à l'aide de thermocouples :

Température	Valeur mesurée	Incertitude-type
T_{pl}	$55,0 \text{ }^\circ\text{C}$	$u(T_{\text{pl}}) = 0,2 \text{ }^\circ\text{C}$
T_∞	$21,0 \text{ }^\circ\text{C}$	$u(T_\infty) = 0,2 \text{ }^\circ\text{C}$

Q21. En considérant que h est de l'ordre de $10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, estimer l'ordre de grandeur du temps que met la plaque d'acier à atteindre la température T_{pl} après l'activation du système de chauffage, lequel délivre une puissance constante au cours du temps.

Q22. On suppose que l'air au voisinage immédiat de la plaque chauffée est au repos. Le flux thermique surfacique φ_Q est alors également donné par

$$\varphi_Q = -\kappa_a \frac{dT}{dz} (z = 0^+) \quad (10)$$

où κ_a est la conductivité thermique de l'air. Identifier la loi physique à l'origine de cette équation et dater le siècle au cours duquel elle a été énoncée.

II.B - Détermination du gradient de température dans l'air au voisinage immédiat de la plaque chauffée

La combinaison des équations (9) et (10) montre que la mesure du coefficient h requiert de déterminer la valeur expérimentale du gradient thermique vertical $\frac{dT}{dz}$ au-dessus de la plaque, laquelle peut être mesurée en analysant la figure d'interférences obtenue en sortie du dispositif présenté sur la FIGURE 3.

Q23. On néglige tout phénomène de déflexion des rayons lumineux au-dessus de la plaque chauffée (cf. FIGURE 4). Exprimer la différence de marche $\delta(z)$ entre les deux rayons lumineux interférant en un point d'altitude z du capteur CCD en fonction des indices optiques $n(z)$ et n_∞ , et de la longueur L_y de la plaque chauffée selon la direction Oy .

Q24. Dans l'hypothèse où l'indice optique suivrait une loi affine vis-à-vis de l'altitude z au-dessus de la plaque chauffée, décrire précisément la figure d'interférences attendue sur le capteur. Interpréter qualitativement le (ou les) écart(s) entre cette prédiction et la figure d'interférences réellement obtenue, présentée sur la FIGURE 5.

Dans la zone d'influence thermique au-dessus de la plaque chauffée, conformément à la loi de Lorentz-Lorenz, l'indice optique de l'air est supposé varier avec la température locale $T(z)$ selon

$$n(z) = n_\infty - a \times \left[\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T(z)} \right] \quad (11)$$

où a est un coefficient positif et T_∞ désigne la température de l'air en-dehors de la zone d'influence thermique.

Q25. On note $p(z)$ l'ordre d'interférences à l'altitude z au-dessus de la plaque et $p_0 = p(z = 0^+)$ la valeur particulière de l'ordre d'interférences juste au-dessus de la plaque. Montrer que la connaissance de $p(z)$ et de p_0 permet de remonter à la température $T(z)$ via

$$T(z) = \frac{T_\infty}{1 - \left[1 - \frac{T_\infty}{T_{pl}} \right] \times \frac{p(z)}{p_0}} \quad (12)$$

Q26. Dans l'article dont est extrait la FIGURE 5, les auteurs adoptent la valeur $p_0 = 7$. Discuter ce choix et estimer l'incertitude-type $u(p_0)$ associée à cette valeur.

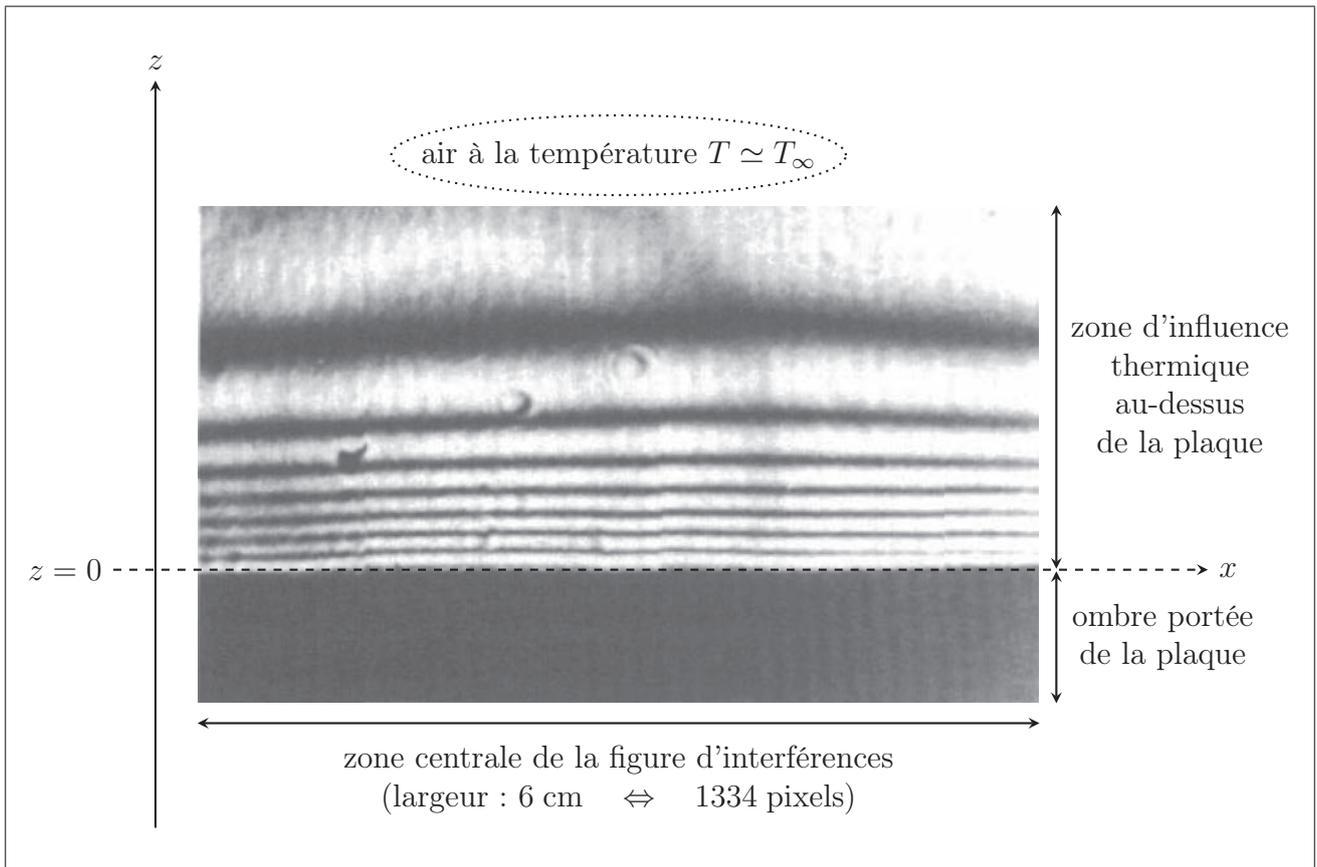


FIGURE 5 – Enregistrement de la partie centrale de la figure d’interférences. (Source : *A laboratory experiment for measuring the free convection heat transfer coefficient of a plane metal plate*, C. Roldan & al., Eur. J. Phys 14 128).

En pointant les franges brillantes et les franges sombres de l’interférogramme, il est donc possible de caractériser le champ de température $T(z)$ au-dessus de la plaque. Une analyse du profil moyen d’intensité, obtenu en considérant toute la largeur de l’interférogramme, conduit aux résultats de la FIGURE 6. Le modèle d’ajustement choisi est

$$T_{\text{mod}}(z) = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \exp(-k_1 z) \quad (13)$$

et les valeurs correspondantes des paramètres θ_1 , θ_2 et k_1 sont regroupées dans le tableau ci-dessous.⁴

Paramètre	Meilleur estimateur	Incertitude-type
θ_1	291,79 K	$u(\theta_1) = 0,53$ K
θ_2	328,71 K	$u(\theta_2) = 0,45$ K
k_1	1,339 cm ⁻¹	$u(k_1) = 0,055$ cm ⁻¹

4. Les données expérimentales ont été traitées en langage Python grâce à la fonction `curve_fit` du module `scipy.optimize`. Les incertitudes-type associées ont été estimées grâce à une simulation Monte-Carlo.

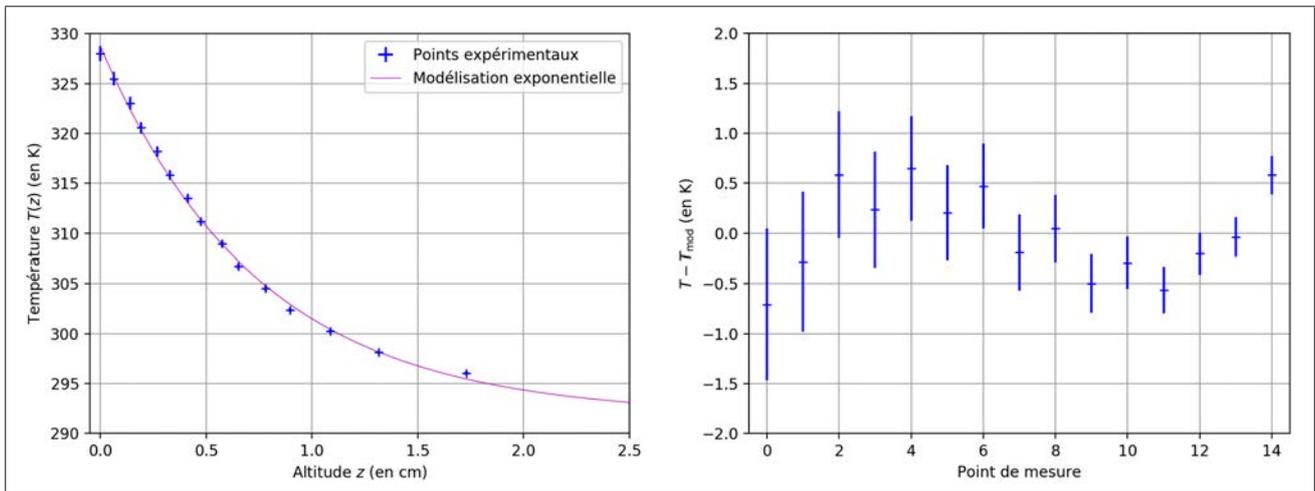


FIGURE 6 – Analyse de l’interférogramme : modélisation du champ de température $T(z)$ au-dessus de la plaque chauffée par une loi exponentielle (à gauche) et représentation des résidus verticaux associés à cette modélisation (à droite).

Q27. Discuter, en utilisant des arguments quantitatifs, l’adéquation du modèle exponentiel $T_{\text{mod}}(z)$ pour décrire le champ de température au-dessus de la plaque chauffée.

Q28. Calculer numériquement la valeur expérimentale du gradient $\frac{dT}{dz}(z = 0^+)$ et l’incertitude-type associée.

II.C - Résultat de la mesure du coefficient d’échange h

Pour la détermination expérimentale du coefficient d’échange conducto-convectif h entre la plaque et l’air ambiant, on propose de mettre en œuvre une simulation Monte-Carlo en langage Python. Le script afférent à cette simulation est retranscrit dans la FIGURE 7.

Q29. Compléter, sur la copie, les lignes 26 et 27 du script présenté dans la FIGURE 7.

Q30. Expliquer en quoi consiste l’analyse statistique réalisée aux lignes 31 et 32 du script.

Une fois le script dûment complété, son exécution conduit aux résultats suivants (sans arrondi ni troncature) :

$$\begin{cases} h : & 4.116648226851503 \\ u_h : & 0.18663000596655105 \end{cases}$$

Q31. Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat final de la mesure du coefficient h .

```

1 ## Importation des bibliothèques utiles
2 import numpy as np
3 import numpy.random as rd
4
5 ## Saisie des valeurs expérimentales et des incertitudes-type associées
6 Tpl, u_Tpl = 55.0, 0.2          # température de la plaque (en °C)
7 Tinf, u_Tinf = 21.0, 0.2       # température ambiante (en °C)
8 dT0, u_dT0 =                   # VALEURS NUMERIQUES OBTENUES EN Q28 (gradient de température
9                                 # au-dessus de la plaque (en K/m))
10
11 ## Définition de la conductivité thermique de l'air
12 def kappa(T):
13     """
14     Entrée : température T de l'air (en K).
15     Sortie : conductivité thermique de l'air à la température T (en W/m/K)
16     """
17     return 1.5207e-11*T**3 - 4.857e-8*T**2 + 1.0184e-4*T - 3.9333e-4
18
19 ## Simulation Monte-Carlo
20 NMC = 50000                    # nombre total d'expériences virtuelles simulées
21 Lh = []                        # initialisation d'une liste de stockage des valeurs de h obtenues
22
23 for i in range(NMC):          # à chaque expérience virtuelle
24     Tpl_MC = Tpl + rd.normal(0, u_Tpl)    # tirage d'une valeur de la température de la plaque
25     Tinf_MC = Tinf + rd.normal(0, u_Tinf)  # tirage d'une valeur de la température ambiante
26     dT0_MC = # A COMPLETER !              # tirage d'une valeur du gradient thermique
27     h_MC = # A COMPLETER !               # calcul de la valeur de h correspondante
28     Lh.append(h_MC)                   # ajout de la valeur de h à la liste Lh
29
30 ## Analyse statistique des résultats de la simulation
31 h = np.mean(Lh)
32 u_h = np.std(Lh, ddof = 1)

```

FIGURE 7 – Script Python proposé. La ligne 8 doit être complétée avec les valeurs numériques obtenues à la question 28.

III. Mirages gravitationnels

On s'intéresse dans cette dernière partie à la déviation d'un rayon lumineux au voisinage d'un corps massif tel que le Soleil. Dans la sous-partie III.A, le calcul est réalisé dans le cadre newtonien. La sous-partie III.B présente une méthode qui utilise indirectement ce phénomène de déviation gravitationnelle de la lumière pour détecter la présence de masses non visibles dans l'univers.

Les sous parties III.A et III.B sont assez largement indépendantes l'une de l'autre.

III.A - Déviation newtonienne de la lumière

On commence par considérer le mouvement d'une particule matérielle de masse m soumise au champ gravitationnel d'un astre de masse M , de rayon R et de centre L (voir FIGURE 8).

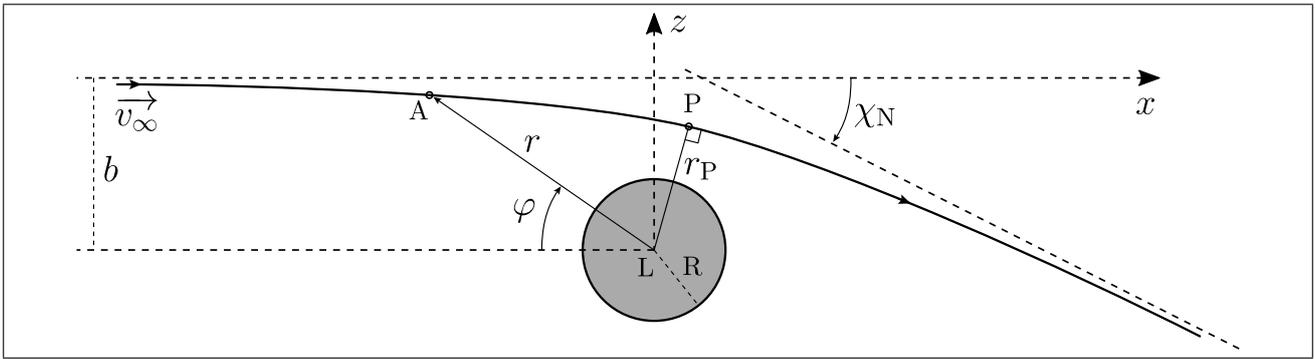


FIGURE 8 – Déviation d’une particule de masse m , localisée en A , par le champ gravitationnel d’un astre sphérique de masse M , de centre L et de rayon R . Le paramètre d’impact est noté b et la déviation totale χ_N .

Q32. Rappeler l’expression de la force gravitationnelle exercée par l’astre de masse M sur la particule de masse m localisé au point A sur la FIGURE 8. Vous ferez un schéma clair en y représentant les grandeurs utiles avec leur notation. Précisez la ou les hypothèse(s) qui doi(ven)t être faite(s) sur l’astre de masse M pour pouvoir utiliser l’expression de la force gravitationnelle trouvée précédemment.

Q33. Justifier que le mouvement de la particule de masse m est plan.

On utilisera les coordonnées polaires (r, φ) dans le plan de la trajectoire.

Q34. Montrer que

$$\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} - 2 \frac{\mathcal{G}M}{r} = 2 e_m \quad (14)$$

en précisant les expressions et le sens physique des grandeurs ℓ et e_m (on prendra l’origine des énergies potentielles à l’infini). Déterminer le signe de e_m dans le cas où la particule provient de l’infini. Nommer ce type de processus.

On s’intéresse désormais à la trajectoire d’un rayon lumineux. Voici ce qu’écrivait Soldner en 1801 lorsqu’il résolu ce problème pour la première fois :

*« J’espère que personne ne trouvera à redire au fait que je traite un rayon lumineux comme un corps massif. Les rayons lumineux possèdent toutes les propriétés absolues [fondamentales] de la matière, comme le montre le phénomène d’aberration, qui n’est possible que parce que les rayons lumineux sont véritablement matériels. De plus, on ne peut imaginer une chose qui existe et agit sur nos sens qui n’aurait pas la propriété de la matière. »*⁵

Q35. Commenter brièvement la phrase de Soldner en la replaçant dans son contexte historique. Justifier en quelques lignes que l’on peut utiliser l’équation (14) pour déterminer la trajectoire d’un rayon lumineux.

5. « Hopefully, no one would find it objectionable that I treat a light ray as a heavy body. That light rays have all the absolute [basic] properties of matter one can see from the phenomenon of aberration which is possible only because light rays are truly material. And furthermore, one cannot think of a thing which exists and works on our senses that would not have the property of matter. »

Q36. On note r_P la valeur de r au périhélie. Exprimer ℓ en fonction de la vitesse de la lumière v_P à ce moment là, et du périhélie r_P . Exprimer de même ℓ en fonction cette fois de la vitesse de la lumière à l'infini v_∞ et du paramètre d'impact b (voir FIGURE 8). En déduire la variation relative de la vitesse de la lumière $(v_P - v_\infty)/v_\infty$ et commenter.

On introduit la variable $u = r_P/r$, où r_P est le périhélie.

Q37. Rappeler le nom usuellement donné à la variable u et montrer que

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{\Phi_P}{v_P^2} \quad (15)$$

en précisant l'expression et la signification de Φ_P . Estimer l'ordre de grandeur de $-\Phi_P/v_P^2$ pour un rayon lumineux rasant la surface d'une étoile typique comme le Soleil, et pour un rayon lumineux rasant une planète typique comme la Terre. Commenter.

Q38. Déterminer la solution générale $u(\varphi)$, puis en déduire que

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_P)} \quad (16)$$

où φ_P est l'angle φ au périhélie. Donner les expressions de p et ϵ en fonction de r_P , Φ_P et v_P . Indiquer ce que représente ϵ et le relier à e_m . Préciser la nature des trajectoires et représenter leur allure en fonction de la valeur de ϵ .

Q39. En s'appuyant sur les ordres de grandeur estimés dans la question **Q37**, commenter la phrase suivante de Soldner : « *Mais comme nous ne connaissons aucun corps céleste dont la masse serait si grande qu'elle pourrait produire à sa surface une telle accélération de la pesanteur, un rayon lumineux décrit, dans le monde qui nous est connu, toujours une hyperbole.* »⁶.

Q40. On définit la compacité \mathcal{C} d'un astre de masse M et de rayon R comme valant $\mathcal{C} = \mathcal{G}M/(Rc^2)$. Les objets les plus compacts de l'univers sont les trous noirs. On admet que ces derniers peuvent se caractériser classiquement en stipulant que la vitesse de libération à leur surface est égale à la célérité de la lumière c . En déduire la compacité d'un trou noir. Commenter et discuter de la possibilité d'obtenir des orbites liées pour la lumière autour d'un astre? Donner une preuve observationnelle de l'existence des trous noirs.

Q41. On note χ_N la déviation totale de la lumière, c'est-à-dire l'angle entre le vecteur vitesse initial pour $t = -\infty$ et le vecteur vitesse final pour $t = +\infty$. Retrouver le résultat suivant de Soldner

$$\tan \frac{\chi_N}{2} = \frac{-\Phi_P/v_P^2}{\sqrt{1 + 2\Phi_P/v_P^2}} \quad (17)$$

En procédant aux approximations nécessaires, exprimer χ_N à l'ordre le plus bas en fonction de \mathcal{G} , M , du paramètre d'impact b et de la vitesse v_∞ .

6. « Since, however, we know of no celestial body whose mass would be so great that it could produce at its surface such an acceleration of gravity, a light ray describes, in the world known to us, always a hyperbola. »

III.B - Microlentille gravitationnelle

La déviation de la lumière étudiée précédemment est devenue aujourd'hui un outil de premier plan pour cartographier la distribution de matière dans l'univers (en particulier la matière noire).

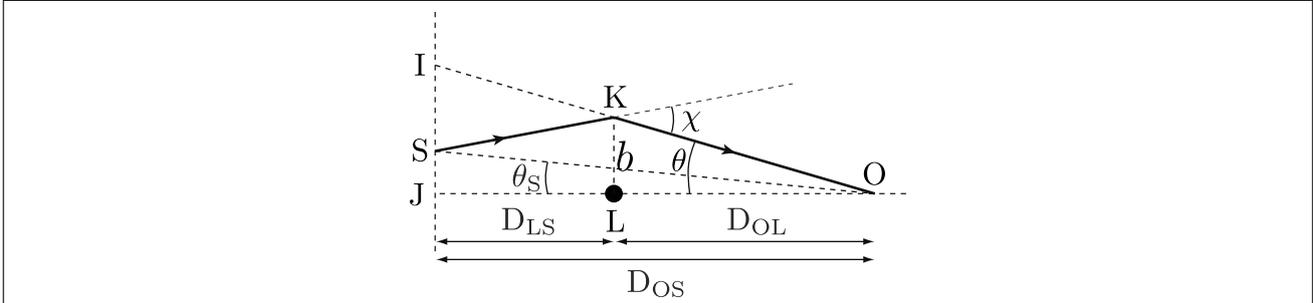


FIGURE 9 – Configuration géométrique d'un phénomène de lentille gravitationnelle. L'observateur est en O, la lentille gravitationnelle en L et la source lumineuse en arrière plan en S.

On considère la configuration de lentille gravitationnelle de la FIGURE 9. L'objet massif L, non lumineux, responsable de l'effet de lentille est modélisé comme une masse ponctuelle M . La source lumineuse S est située en arrière plan, loin de l'observateur O et de l'objet déflecteur L. On supposera ainsi que la déflexion a lieu sur une distance très petite devant ces distances, d'où la représentation en ligne brisée pour la propagation de la lumière sur la FIGURE 9. Par ailleurs, tous les angles sont supposés très petits : $\chi, \theta, \theta_S \ll 1$.

Dans le cadre de la relativité générale, on admettra que l'expression de l'angle de déviation χ des rayons lumineux par une masse ponctuelle M diffère de celle obtenue par Soldner d'un facteur 2 et s'écrit

$$\chi = \frac{4 \mathcal{G} M}{b c^2} \quad (18)$$

où b est le paramètre d'impact, qui peut être assimilé à la distance LK dans la limite des petits angles (voir la FIGURE 9).

Équation des lentilles

Q42. À l'aide de considérations géométriques simples et des approximations nécessaires, établir la relation suivante, qui permet de déterminer θ :

$$D_{OS} \theta = D_{OS} \theta_S + D_{LS} \chi \quad (19)$$

Puis, toujours dans le cadre des approximations faites précédemment, en exprimant b en fonction de θ et D_{OL} , déduire l'équation des lentilles suivante :

$$\theta^2 - \theta_S \theta - \theta_E^2 = 0 \quad \text{où} \quad \theta_E = \sqrt{\frac{4 \mathcal{G} M}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}}} \quad (20)$$

Décrire ce que voit l'observateur dans le cas $\theta_S = 0$.

L'angle θ_E est appelé rayon (angulaire) d'Einstein. C'est lui qui fixe une échelle angulaire naturelle du problème.

Q43. Application numérique : calculer l'ordre de grandeur de θ_E pour un effet de lentille gravitationnelle induit par un astre d'une masse solaire dans la galaxie (on pourra prendre comme distances caractéristiques 10 kpc). Le taux d'expansion de l'univers est aujourd'hui d'environ $H_0 \simeq 70 \text{ (km.s}^{-1}\text{)}/\text{Mpc}$. À l'aide de cette grandeur, estimer la taille de l'univers et en déduire un ordre de grandeur de l'effet de lentille gravitationnelle qui peut être observé dans le contexte cosmologique par une galaxie ($M = 10^{12} \times M_\odot$).

Images multiples et amplification

Q44. Déterminer les solutions θ_\pm correspondant aux deux images que voit l'observateur dans le cas $\theta_S \neq 0$. Représenter ces deux images sur la FIGURE 9, reproduite sur la copie ; faire également figurer le rayon d'Einstein θ_E .

L'effet de déflexion de la lumière n'est associé à aucun mécanisme d'absorption (ou d'émission), si bien que les effets de lentilles gravitationnelles conservent l'énergie ; cependant, la lentille modifie l'angle solide sous lequel la source est vue. On définit un facteur d'amplification gravitationnelle \mathcal{A} comme le rapport entre les angles solides sous lesquels sont observées l'image et la source, soit dans notre cadre :

$$\mathcal{A} = \frac{\theta}{\theta_S} \frac{d\theta}{d\theta_S} \quad (21)$$

Q45. Justifier l'expression (21) puis en déduire les amplifications \mathcal{A}_\pm des deux images en fonction du paramètre d'impact angulaire réduit $w \equiv \theta_S/\theta_E$. Vérifier que $\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_- = 1$.

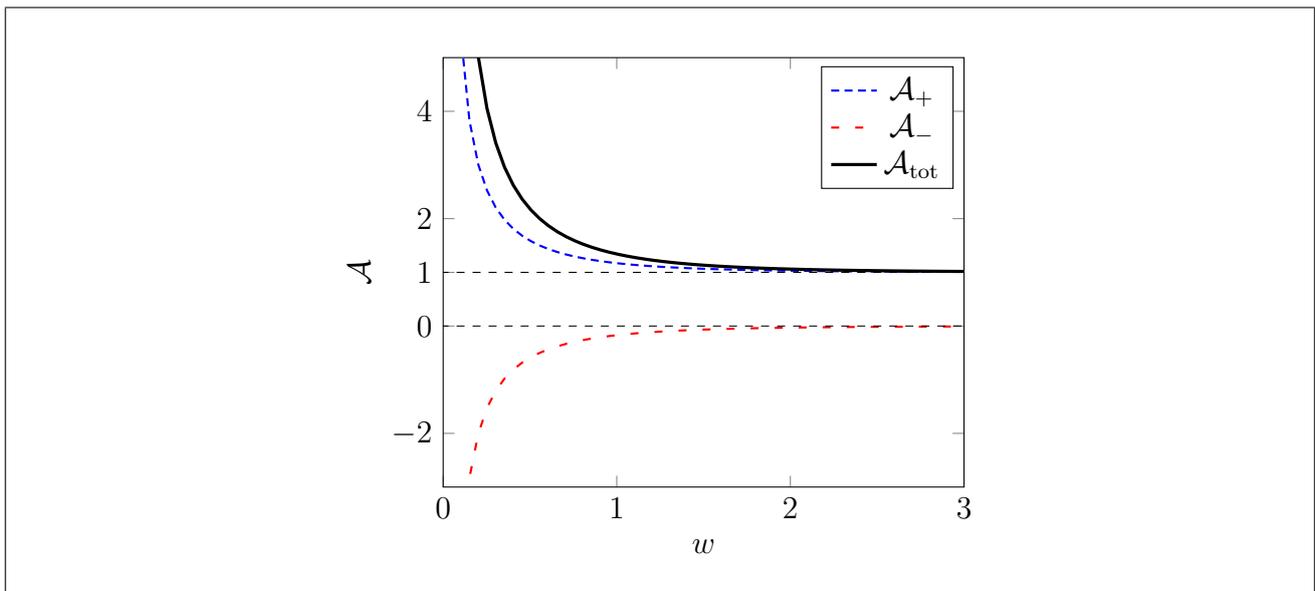


FIGURE 10 – Représentation graphique de \mathcal{A}_\pm en fonction de w , ainsi que l'amplitude totale définie par $\mathcal{A}_{\text{tot}} \equiv |\mathcal{A}_+| + |\mathcal{A}_-|$.

Q46. Discuter la valeur de $\mathcal{A}_{\text{tot}} \equiv |\mathcal{A}_+| + |\mathcal{A}_-|$ par rapport à 1. Calculer numériquement \mathcal{A}_{tot} pour une source sur le rayon d'Einstein $\theta_S = \theta_E$ (à défaut d'application numérique à partir de l'expression de \mathcal{A}_{\pm} , estimer la valeur demandée grâce au graphique). Discuter la limite $\theta_S \rightarrow 0$.

Microlentilles dans notre galaxie

On peut utiliser les résultats précédents pour détecter la présence d'objets massifs, comme les MACHO (Massive Astrophysical Compact Halo Object), lorsque ceux-ci passent devant une source lumineuse S d'arrière-plan (une étoile), en étudiant la variation transitoire de sa luminosité apparente lors du transit de l'objet massif au voisinage de la ligne de visée reliant l'observateur O à la source lumineuse S.

On suppose que le MACHO se déplace à la vitesse constante \vec{v} dans un plan perpendiculaire à la ligne de visée OS. On prend comme origine des temps $t = 0$ l'instant correspondant au minimum de l'angle θ_S (donc au paramètre d'impact), et on notera $w_0 \equiv w(t = 0)$.

Q47. À quelle distance angulaire typique doit passer le MACHO par rapport à l'étoile d'arrière plan pour voir un effet sensible ? Faire un schéma représentant la situation.

Q48. Justifier que

$$w(t) = \sqrt{w_0^2 + \frac{v^2 t^2}{R_E^2}} \quad (22)$$

où vous donnerez l'expression de R_E en fonction de θ_E et D_{OL} .

Q49. Sur la FIGURE 11, que vous reproduirez sur votre copie, tracer qualitativement $\mathcal{A}_{\text{tot}}(t)$ pour une valeur de w_0 plus petite que 0,5, puis pour une valeur de w_0 plus grande que 0,5.

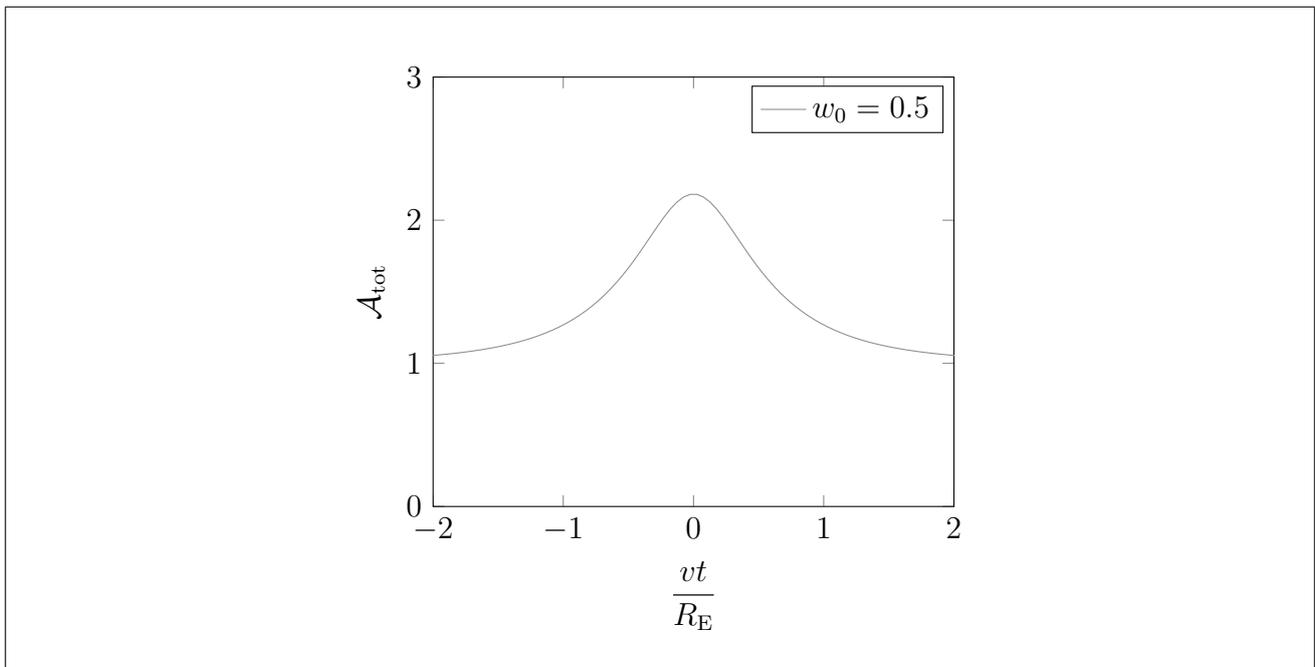


FIGURE 11 – Représentation graphique de $\mathcal{A}_{\text{tot}}(t)$ pour $w_0 = 0,5$.

Q50. Exprimer le temps caractéristique τ sur lequel l'amplification de la luminosité se produit. Évaluer numériquement τ pour un défecteur d'une masse solaire, se déplaçant à la vitesse de 200 km.s^{-1} , dans le cadre d'une lentille ayant lieu dans notre galaxie.

Q51. Si on échantillonne les courbes de lumière avec des intervalles de temps entre une heure et une année, avec les hypothèses de la question précédente, quel intervalle de masse (en unité de masse solaire) peut-on espérer détecter ?

Q52. Parmi les millions de courbes de lumière obtenues expérimentalement de façon automatisée, proposer quelques critères permettant de sélectionner celles qui correspondent à un effet de microlentille gravitationnelle et non pas à une variabilité d'une autre nature, telles que les étoiles variables, les supernovae etc...

Fin
