MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

EAI MAT 2

SESSION 2023

AGRÉGATION
Concours interne et CAER

Section
MATHÉMATIQUES

Deuxième épreuve

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

A

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie. Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

AGRÉGATION INTERNE
MATHÉMATIQUES

► Concours interne de l'Agrégation de l'enseignement public :

Concours	Section/option	Épreuve	Matière
EAI	1300A	102	0530

► Concours interne du CAER / Agrégation de l'enseignement privé :

Concours	Section/option	Épreuve	Matière
EAH	1300A	102	0530

Notations

Dans tout le problème on désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels avec m lignes et n colonnes. Lorsque $m = n$, on écrira plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{C}^k(I, F)$ l'espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^k$ sur l'intervalle I et à valeurs dans un espace vectoriel vectoriel normé F de dimension finie.

Pour $f \in \mathscr{C}^0([a, b], F)$, on notera $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Notations et rappels sur les équations différentielles

Les équations différentielles étudiées par la suite sont définies pour des fonctions d'une variable x à valeurs dans l'intervalle $I = [0, 1]$. Dans ce cadre, nous adoptons les définitions suivantes.

- *Une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ est du type*

  $$y' + uy = v \quad \text{avec } (u, v) \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})^2.$$

  La fonction v est le second membre de l'équation. Si $v = 0$, on dit que l'équation est homogène.

- *Une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ est du type*

  $$y'' + uy' + vy = w \quad \text{avec } (u, v, w) \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})^3.$$

  La fonction w est le second membre de l'équation. Si $w = 0$, on dit que l'équation est homogène.

- *Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une équation différentielle linéaire matricielle du premier ordre d'inconnue $Y \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ est du type*

  $$Y' + UY = V \quad \text{avec } U \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \text{ et } V \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})).$$

  La fonction V est le second membre de l'équation. Si $V = 0$, on dit que l'équation est homogène.

Soient $U \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $V \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. Pour $t_0 \in [0, 1]$ et $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on appelle problème de Cauchy la recherche d'une fonction $Y \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ vérifiant

$$\begin{cases} Y' + UY = V \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Dans ce cadre, on rappelle le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires matricielles (aussi appelées vectorielles) du premier ordre, qui pourra être utilisé tout au long du sujet :

Théorème de Cauchy

Soient $U \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $V \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, ainsi que $t_0 \in [0, 1]$ et $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Il existe une unique solution $Y \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ définie sur $[0, 1]$ du problème de Cauchy (1).

Présentation du problème de Sturm-Liouville

Par la suite, et jusqu'à la fin du problème, a, b, c et d désignent quatre réels fixés tels que $(a,b) \neq (0,0)$ et $(c,d) \neq (0,0)$.

- *On note $\mathscr{E}$ l'espace préhilbertien $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$. La norme associée est notée $\| \|_2$.*

- *On note $\mathscr{E}_2$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ constitué des fonctions g de $\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telles que*

$$ag(0) + bg'(0) = 0 \text{ et } cg(1) + dg'(1) = 0.$$

Pour $p \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on définit l'application linéaire

$$H_p : \begin{cases} \mathscr{E}_2 & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ y & \longmapsto & -y'' + py. \end{cases}$$

Par extension, et bien que H_p ne soit pas un endomorphisme (les espaces vectoriels de départ et d'arrivée sont distincts), on dit que le réel λ est une valeur propre de H_p s'il existe un élément y non nul de $\mathscr{E}_2$ vérifiant $H_p(y) = \lambda y$. Dans ce cas, y est un vecteur propre de H_p associé à λ et $\{y \in \mathscr{E}_2 \ / \ H_p(y) = \lambda y\}$ est le sous-espace propre de H_p associé à λ.

Enfin, pour $f \in \mathscr{E}$, on considère le problème de Sturm-Liouville, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$

$$\begin{cases} -y'' + py = f \\ ay(0) + by'(0) = 0 \\ cy(1) + dy'(1) = 0. \end{cases} \qquad SL_p(f)$$

Ainsi, $y \in \mathscr{C}^2(0,1],\mathbb{R})$ est une solution du problème $SL_p(f)$ si et seulement $y \in \mathscr{E}_2$ et si $H_p(y) = f$.

L'objectif de ce problème est d'étudier l'existence et/ou l'unicité de solutions du problème de Sturm-Liouville.

- *La partie **I** met en place des résultats classiques pour l'étude des équations différentielles linéaires.*

- *La partie **II** traite d'un exemple et pose le problème de l'existence et de l'unicité d'une solution à un problème de Sturm-Liouville explicite.*

- *Une étude spectrale de l'application H_p est proposée à la partie **III** et, lorsque cet opérateur est bijectif, une étude spectrale de l'inverse est menée en partie **V**.*

- *La partie **IV** étudie le problème de Sturm-Liouville lorsque l'application H_p est injective.*

- *La question initiale est traitée dans la partie **VI**, en lien avec le spectre de l'application H_p.*

I. Exercices préliminaires

Il s'agit de résultats classiques utiles par la suite. Bien entendu, ces résultats sont à établir, même s'ils apparaissent explicitement au programme du concours.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.

(a) Affirmation : « la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 4$, définie sur $\mathbb{R}$, est solution de l'équation différentielle $y' = y + 4$. »

(b) Affirmation : « l'unique solution du système de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + 4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

est la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 4$, définie sur $\mathbb{R}$. »

(c) Affirmation : « l'équation différentielle $y' = y + 4$ possède une unique solution définie sur $\mathbb{R}$. »

(d) Affirmation : « l'ensemble des solutions de l'équation $y' = y+4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. »

2. (a) On étudie l'équation différentielle scalaire homogène du premier ordre $y' + py = 0$, avec $p \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

En considérant, pour $y \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, la fonction $z : x \longmapsto y(x)e^{\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}$, déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

(b) On considère à présent une équation différentielle scalaire du premier ordre $y' + py = f$, avec $(p, f) \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})^2$.

En considérant, pour $y \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, la fonction $z : x \longmapsto y(x)e^{\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}$, établir que les solutions de l'équation sont les fonctions du type

$$y : x \longmapsto \alpha e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t} + \int_0^x f(u)e^{\int_0^u p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u$$

où α est une constante réelle arbitraire.

Jusqu'à la fin de cette partie, pour p un élément de $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, q et f des éléments de $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on considère les équations différentielles linéaires

$$y'' + py' + qy = f \qquad (E) \qquad\qquad y'' + py' + qy = 0 \qquad (EH)$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \qquad (S) \qquad\qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (SH).$$

On note $\mathscr{S}(E)$, $\mathscr{S}(EH)$, $\mathscr{S}(S)$ et $\mathscr{S}(SH)$ les ensembles des solutions de (E), (EH), (S) et (SH) respectivement.

3. (a) Vérifier que si y est solution de (E), alors $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution de (S).

(b) Réciproquement, montrer que si $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est solution de (S), alors z_1 est solution de (E) et $z_2 = z_1'$.

4. En déduire le résultat fondamental pour les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux suivant :
   Pour $t_0 \in [0,1]$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution de (E) vérifiant $y(t_0) = \alpha$ et $y'(t_0) = \beta$.
5. **(a)** Établir que l'ensemble $\mathscr{S}(EH)$ des solutions de (EH) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ de dimension 2.
   (b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction $\mathscr{S}(EH)$.
   (c) Pour tout couple de solutions (y_1, y_2) de (EH), on définit le wronskien w de ce couple de solutions par
   $$\forall x \in [0,1],\ w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$
   Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i. (y_1, y_2) est une base de $\mathscr{S}(EH)$.
   ii. Pour tout $x \in [0,1]$, $w(x)$ est non nul.
   iii. Il existe $x \in [0,1]$ tel que $w(x)$ est non nul.
   Indication : on pourra travailler sur le système (SH) équivalent à (EH).

Un tel couple (y_1, y_2) de solutions de (EH) est appelé système fondamental de solutions de (EH).

6. On considère à nouveau l'équation avec second membre (E).
   Montrer qu'il existe une fonction $u \in \mathscr{C}^2([0,1],]0, +\infty[)$ telle que la proposition suivante est vraie :
   la fonction y est solution de (E) si et seulement si la fonction z définie par $y = uz$ est solution d'une équation du type $-z'' + rz = g$.
   Les fonctions r et g seront explicitées à partir de p, q et f.
7. Établir que le wronskien $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ d'un système fondamental de solutions (y_1, y_2) d'une équation du type $-y'' + py = 0$ est une fonction constante non nulle.

Ainsi, la résolution d'une équation telle que (E) est équivalente à la résolution d'une équation du type $-y'' + py = f$. C'est cette équation réduite qui sera étudiée par la suite.

II. Étude d'un exemple d'équation de Sturm-Liouville

Dans cette partie, exceptée la dernière question, on étudie le problème de Sturm-Liouville $SL_p(f)$ dans le cas particulier $p = 0$, $a = c = 1$ et $b = d = 0$:

$$\begin{cases} -y'' = f \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases} \qquad SL_0(f)$$

8. Déterminer la solution y_1 de l'équation différentielle $y'' = 0$ vérifiant $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$.
   De même, déterminer la solution y_2 de $y'' = 0$ vérifiant $y_2(1) = 0$ et $y_2'(1) = -1$.
9. Vérifier que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de $y'' = 0$ vérifiant

$$\forall x \in [0,1],\quad y_1'(x) y_2(x) - y_1(x) y_2'(x) = 1$$

10. On pose

$$K_0(x,t) = \begin{cases} y_2(x)y_1(t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1, \\ y_1(x)y_2(t) & \text{si } 0 \leqslant x < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Pour $f \in \mathscr{E}$, on définit $\Phi(f)$ sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad \Phi(f)(x) = \int_0^1 K_0(x,t)f(t)\mathrm{d}t.$$

Établir que $\Phi(f)$ est l'unique solution de $SL_0(f)$.

On cherche à présent à résoudre ce même problème $SL_0(f)$ par une approche spectrale.
Sous les hypothèses définies dans cette partie, on a

$$\mathscr{E}_2 = \{g \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid g(0) = g(1) = 0\},$$

et

$$H_0 : \begin{cases} \mathscr{E}_2 & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ g & \longmapsto & -g''. \end{cases}$$

Ainsi, $y \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ est une solution de $SL_0(f)$ si et seulement si y appartient à $\mathscr{E}_2$ et $H_0(y) = f$.

11. L'application H_0 est-elle injective ?

12. Établir qu'il existe une suite de nombres réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante et de limite $+\infty$ tel que l'ensemble des valeurs propres de H_0 est $\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
On explicitera la valeur de λ_n ainsi qu'un vecteur propre associé φ_n vérifiant $\|\varphi_n\|_2 = 1$ et $\varphi_n'(0) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

13. Soit f un élément de $\mathscr{E}$. Montrer que l'unique solution y du problème $SL_0(f)$ est

$$y : x \longmapsto \alpha x - \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u,$$

où α est une constante réelle que l'on déterminera en fonctions d'intégrales dépendant de f.

14. Soit f un élément de $\mathscr{E}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_k = \langle f, \varphi_k \rangle$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel $F_n = \mathrm{Vect}(\varphi_k\,;\, 1 \leqslant k \leqslant n)$. Déterminer f_n en fonction des coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir que le problème $SL_0(f_n)$ admet une unique solution que l'on écrira à nouveau en fonction de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On notera y_n cette solution.

(c) Vérifier que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction $y \in \mathscr{E}$.

(d) Établir que y est la solution de $SL_0(f)$.

15. Dans cette question seulement, on pose $p_0 : x \longmapsto -\pi^2$, $a = c = 1$ et $b = d = 0$ et on s'intéresse au problème de Sturm-Liouville $SL_{p_0}(f)$ suivant :

$$\begin{cases} -y'' - \pi^2 y = f \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

On considère l'application linéaire

$$H_{p_0} : \begin{cases} \mathscr{E}_2 & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ y & \longmapsto & -y'' - \pi^2 y. \end{cases}$$

(a) L'application H_{p_0} est-elle injective ?

(b) Déterminer explicitement les solutions y_1 et y_2 de l'équation homogène $y'' + \pi^2 y = 0$ vérifiant respectivement

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = \pi. \end{cases}$$

Vérifier qu'il s'agit d'un système fondamental de l'équation homogène.

(c) Pour $f \in \mathscr{E}$, on veut résoudre l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = -f$ par la méthode dite de variation des constantes.

Pour cela on s'appuie sur le système fondamental (y_1, y_2) obtenu à la question précédente. On cherche alors les solutions de $y'' + \pi^2 y = -f$ sous la forme

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2, \text{ avec } (u_1, u_2) \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})^2 \text{ vérifiant } u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0.$$

Déterminer une solution particulière de l'équation $y'' + \pi^2 y = -f$ à l'aide d'une ou plusieurs intégrales dépendant de f, puis exprimer la solution générale de cette même équation.

(d) Lorsque $f : x \longmapsto \cos(\pi x)$, établir que le problème de Sturm-Liouville $SL_{p_0}(f)$ admet plusieurs solutions que l'on précisera.

(e) Lorsque $f : x \longmapsto \sin(\pi x)$, établir que le problème de Sturm-Liouville $SL_{p_0}(f)$ n'admet aucune solution.

III. Une étude spectrale de l'application H_p

On considère à présent le cas général où p est une fonction appartenant à $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et a, b, c, d sont quatre nombres réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$.

16. *Un calcul préliminaire.* Soit $y \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $\alpha > 0$.

(a) Établir l'inégalité

$$2 \int_0^1 |y(t) y'(t)| \mathrm{d}t \leqslant \alpha \int_0^1 y(t)^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 y'(t)^2 \mathrm{d}t.$$

Indication : On pourra remarquer que pour $\delta > 0$, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\left(\delta |y(x)| - \frac{1}{\delta} |y'(x)| \right)^2 \geqslant 0.$$

(b) Vérifier l'égalité $y^2(0) + y^2(1) = -\displaystyle\int_0^1 z'(x) \mathrm{d}x$, où $z : x \longmapsto y^2(x) \cos(\pi x)$ et en déduire que pour tous réels u et v il existe une constante $C(u, v)$ telle que

$$u y^2(0) + v y^2(1) \leqslant C(u, v) \int_0^1 y(t)^2 \mathrm{d}t + \int_0^1 y'(t)^2 \mathrm{d}t.$$

17. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et y dans $\mathscr{E}_2$ vérifiant $-y'' + py = \lambda y$.

(a) Établir l'égalité

$$y'(1)y(1) - y'(0)y(0) = \int_0^1 y'(t)^2 \mathrm{d}t + \int_0^1 (p(t) - \lambda) y(t)^2 \mathrm{d}t.$$

(b) En déduire l'existence d'une constante λ_0 dépendant de a, b, c, d, et de la fonction p, telle que, pour $\lambda < \lambda_0$, en posant $q : x \longmapsto p(x) - \lambda$, le problème $SL_q(0)$ n'a que l'application $y = 0$ comme solution. *Indication : on pourra traiter à part le cas $bd = 0$.*

On rappelle que H_p est l'application linéaire définie par

$$H_p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{E}^2 & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ y & \longmapsto & -y'' + py. \end{array} \right.$$

18. Montrer que H_p vérifie la relation de symétrie

$$\forall (y, z) \in \mathscr{E}_2^2, \ \ \langle H_p(y), z \rangle = \langle y, H_p(z) \rangle.$$

19. Établir que deux sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes de H_p sont orthogonaux.

20. Démontrer que tout sous-espace propre de H_p est de dimension 1.

IV. Fonction de Green

Dans toute cette partie, on considère une fonction $q \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que le problème $SL_q(0)$ n'a que la fonction $y = 0$ comme solution.

On rappelle que a, b c et d sont des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$.

21. Vérifier que l'application $H_q : \mathscr{E}_2 \longrightarrow \mathscr{E}$ est injective.

22. (a) Établir l'existence de deux éléments non nuls y_1 et y_2 de $\mathscr{E}_2$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} -y_1'' + qy_1 = 0 \\ ay_1(0) + by_1'(0) = 0 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{l} -y_2'' + qy_2 = 0 \\ cy_2(1) + dy_2'(1) = 0. \end{array} \right.$$

Indication : On pourra chercher à résoudre deux problèmes de Cauchy bien choisis.

(b) Montrer qu'un tel couple (y_1, y_2) est un système fondamental de solution de $y'' + qy = 0$ et qu'il est possible de choisir ce couple de sorte que

$$\forall x \in [0,1], \ w(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) = -1.$$

Jusqu'à la fin de cette partie, le couple (y_1, y_2) fait référence à un système fondamental de solutions de l'équation $-y'' + qy = 0$ vérifiant la relation $y_1 y_2' - y_1' y_2 = -1$ sur l'intervalle $[0,1]$.

23. Soit f un élément de $\mathscr{E}$.

(a) Vérifier que les solutions de l'équation différentielle $-y'' + qy = f$ sont exactement les fonctions de la forme

$$y : x \longmapsto \left(\alpha + \int_x^1 f(t)y_2(t)\mathrm{d}t\right)y_1(x) + \left(\beta + \int_0^x f(t)y_1(t)\mathrm{d}t\right)y_2(x).$$

où (α, β) sont deux constantes réelles arbitraires. Déterminer une forme analogue pour la dérivée y' de la solution précédente y.

(b) En déduire que $SL_q(f)$ admet une unique solution y qui s'écrit sous la forme

$$y : x \longmapsto \int_0^1 K_q(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

où l'on a posé

$$K_q(x,t) = \begin{cases} y_1(t)y_2(x) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1, \\ y_1(x)y_2(t) & \text{si } 0 \leqslant x < t \leqslant 1. \end{cases}$$

On dit que K_q est *la fonction de Green* associée au problème $SL_q(f)$.

(c) Établir que $K_q : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue sur $[0,1]^2$.

V. Analyse spectrale de l'application $\Phi_q = H_q^{-1}$

Dans toute cette partie, on considère une fonction $q \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que le problème $SL_q(0)$ n'a que la fonction $y = 0$ comme solution.

Pour rappel, l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ est muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ et on note $\|\ \|_2$ la norme associée.

D'après la partie précédente, pour $f \in \mathscr{E}$, le problème $SL_q(f)$ admet une unique solution, à savoir $\Phi_q(f)$ définie de la façon suivante :

$$\Phi_q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E}_2 \\ f & \longmapsto & \left(x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 K_q(x,t)f(t)\mathrm{d}t\right) \end{array} \right. .$$

Dans la mesure où $\mathscr{E}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$, on pourra considérer que Φ_q est un endomorphisme de $\mathscr{E}$ et introduire ses valeurs propres et ses espaces propres, par exemple, comme cela a été fait pour H_q précédemment.

24. Vérifier que H_q et Φ_q sont deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

25. Établir que pour tout $(f,g) \in \mathscr{E}^2$, on a

$$\langle \Phi_q(f), g\rangle = \langle f, \Phi_q(g)\rangle.$$

26. Montrer que Φ_q est une application continue de $(\mathscr{E}, \|\ \|_2)$ vers $(\mathscr{E}_2, \|\ \|_2)$.

27. **(a)** Vérifier que pour toute valeur propre λ de Φ_q, le sous-espace propre de Φ_q associé à λ est de dimension 1.

(b) Justifier que les sous-espaces propres de Φ_q correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

VI. Solutions de l'équation de Sturm-Liouville $SL_p(f)$

On revient au problème de Sturm-Liouville dans le cas général, c'est-à-dire trouver les solutions du système d'équations d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ suivant :

$$\begin{cases} -y'' + py = f \\ ay(0) + by'(0) = 0 \\ cy(1) + dy'(1) = 0. \end{cases} \qquad SL_p(f)$$

où p et f sont des éléments de $\mathscr{E}$.

28. Vérifier que le noyau et l'image de H_p sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\mathscr{E}$.

29. Établir l'existence d'un réel λ_0 tel que toute valeur propre λ de H_p vérifie $\lambda > \lambda_0$.

On fixe à présent une valeur $\lambda < \lambda_0$. Par suite, la fonction $q = p - \lambda$ est telle que les valeurs propres de H_q sont incluses dans $\mathbb{R}_+^*$.

30. Vérifier que μ est une valeur propre de Φ_q si et seulement si $\dfrac{1}{\mu} + \lambda$ est une valeur propre de H_p.

31. Dans cette question uniquement, on suppose que H_p est injective. Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{E}$, $SL_p(f)$ admet une unique solution.

32. Dans cette question, on suppose que H_p n'est pas injective et on note $\varphi \in \mathscr{E}_2$ un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

(a) Soit $f \in \mathscr{E}$. Montrer que si $\langle f, \varphi \rangle \neq 0$, alors $SL_p(f)$ n'a pas de solution.

(b) Soit $f \in \mathscr{E}$. Montrer que si $\langle f, \varphi \rangle = 0$, alors $SL_p(f)$ admet une infinité de solutions dont on précisera la structure.

FIN DU SUJET