

Session 2020

PE2-20-PG2

Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mardi 7 avril 2020
Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques

Durée : 4 heures
Épreuve notée sur 40

Rappel de la notation :

- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.**

Ce sujet contient 11 pages, numérotées de 1 à 11. Assurez-vous que cet exemplaire est complet. S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

PREMIÈRE PARTIE (13 points)

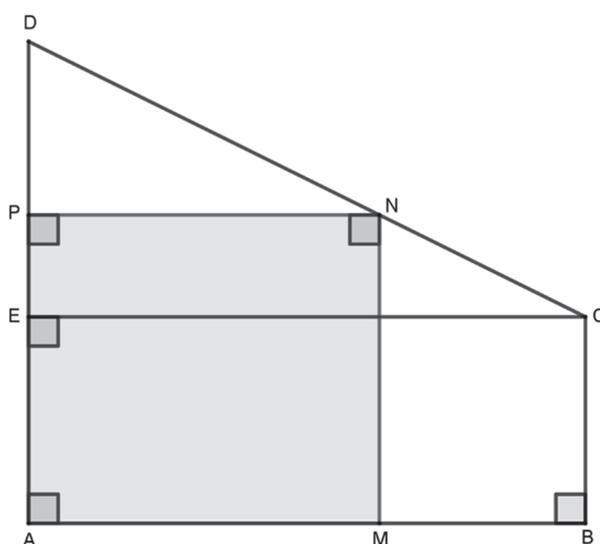
Madame Martin souhaite participer à l'effort de protection de la planète et s'engager dans le développement durable.

Elle a décidé d'installer des panneaux photovoltaïques, sur le toit de sa maison, pour produire sa propre énergie électrique ainsi qu'un récupérateur d'eau de pluie pour arroser son jardin.

PARTIE A : Installation de panneaux photovoltaïques

Le toit de la maison de madame Martin a la forme d'un trapèze rectangle ABCD représenté ci-dessous pour lequel on connaît les dimensions suivantes :

$$AB = 8 \text{ m} \quad AD = 7 \text{ m} \quad CB = 3 \text{ m}$$



Vue de dessus du toit (la figure n'est pas à l'échelle)

Le point E est le point de [AD] tel que ABCE soit un rectangle.

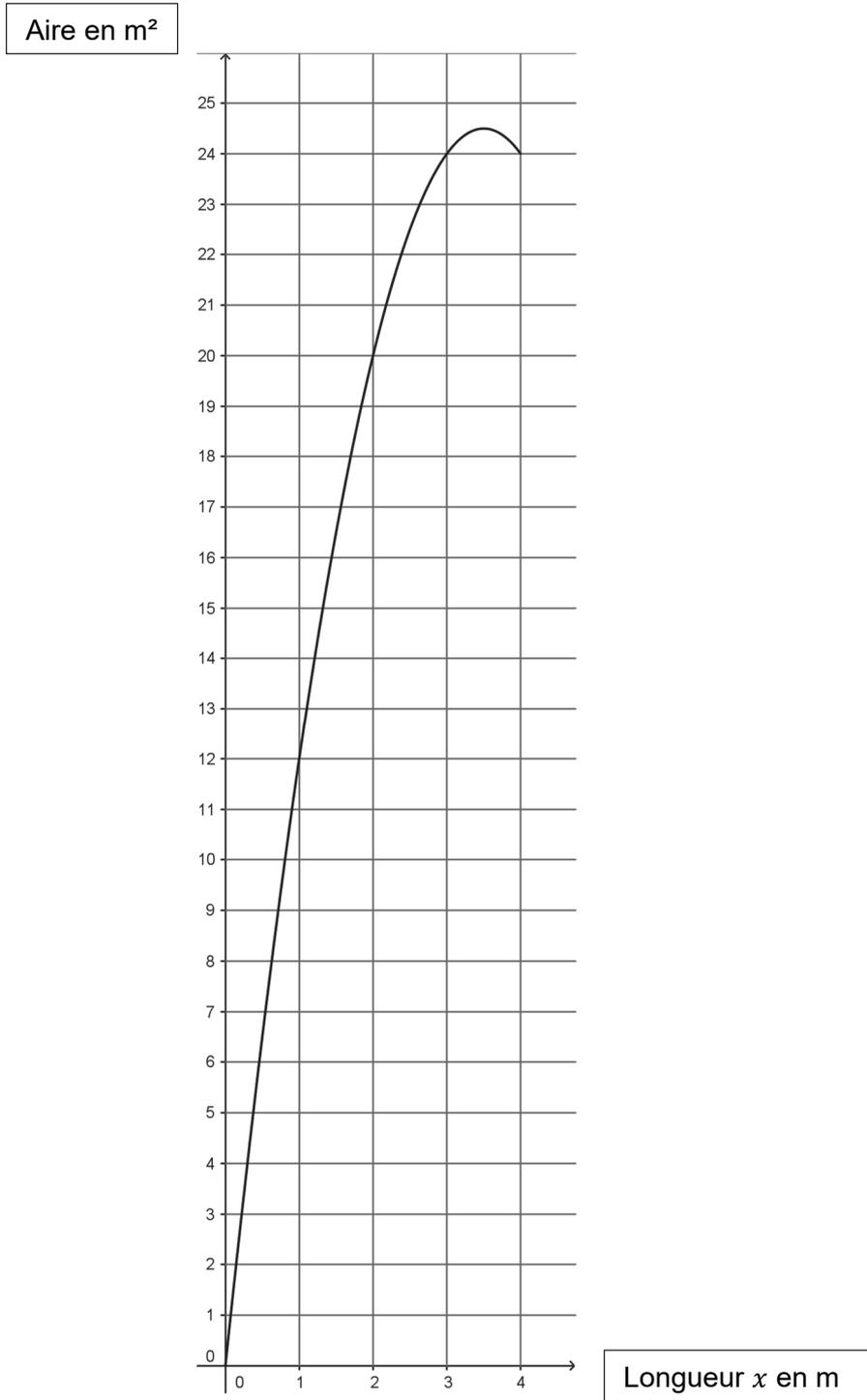
Le support dédié aux panneaux photovoltaïques correspond au rectangle AMNP où P est un point situé sur [DE] et N est l'intersection de la droite perpendiculaire à (AD) passant par P avec (CD).

On souhaite déterminer la position du point P sur [DE] pour que l'aire du support AMNP soit la plus grande possible.

On note x la longueur du segment [DP] exprimée en mètre et $A(x)$ l'aire du rectangle AMPN exprimée en mètre carré.

1. Expliquer pourquoi x doit être compris entre 0 et 4.
2. Démontrer que PN est égale à $2x$.
3. Montrer que, pour tout nombre x compris entre 0 et 4, on a : $A(x) = 14x - 2x^2$.
4. Calculer l'aire du support, en mètre carré, si l'on choisit $x = 2$.

5. Le graphique ci-dessous représente l'aire du support, en mètre carré, en fonction de la longueur x en mètre.



Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

- Quelle est l'aire, en mètre carré, du support si la longueur x est égale à 3 m ?
- Pour quelle(s) valeur(s) de la longueur x , l'aire du support est-elle égale à 12 m² ?
- Pour quelle valeur de la longueur x , l'aire du support est-elle maximale ?

PARTIE B : Les différentes énergies renouvelables

Les informations présentées dans cette partie sont extraites du site « RTE, Réseau de transport d'électricité ».

Le tableau ci-dessous indique la production française d'énergie électrique renouvelable par filière en 2017, exprimée en térawatt-heure (TWh).

Filière	Production
Filière éolienne	24 TWh
Filière solaire	9,2 TWh
Filière hydraulique	48,6 TWh
Filière des bioénergies	7 TWh

1. Calculer le pourcentage que représente l'énergie électrique produite par la filière solaire par rapport à l'énergie électrique produite par l'ensemble des filières des énergies renouvelables.
2. En 2017, l'électricité renouvelable a couvert 18,4 % de l'électricité consommée en France. Calculer la quantité totale d'électricité consommée en France en 2017. On donnera l'arrondi au dixième de térawatt-heure.

PARTIE C : Coût de l'énergie électrique

Chaque matin, madame Martin fait bouillir un demi-litre d'eau dans une bouilloire pour préparer son thé.

En utilisant les informations ci-dessous, calculer le prix de l'énergie électrique, toutes taxes comprises, utilisée par madame Martin pour préparer son thé chaque matin durant toute l'année 2018.

Document 1 : Caractéristiques de la bouilloire électrique de madame Martin

Durée du chauffage pour 0,5 L d'eau : 1 min 26 s

Puissance : 2200 W

Document 3 : Prix de l'énergie électrique

Prix hors TVA d'un kilowatt-heure (kWh) : 0,0997 €

TVA sur l'énergie électrique : 20%

Document 2 : Énergie électrique

$$E = P \times t$$

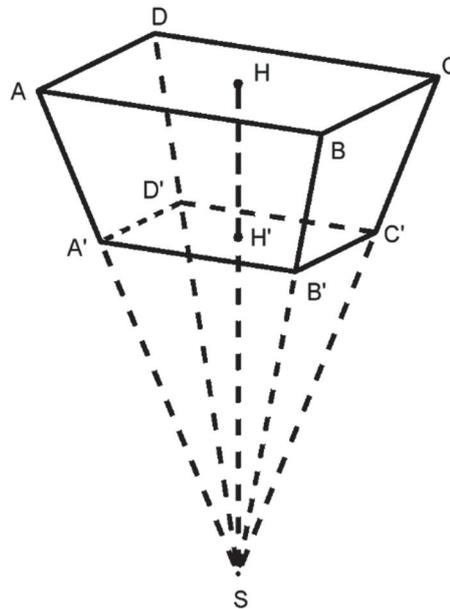
E désigne l'énergie en watt-heure (Wh)

P désigne la puissance en watt (W)

t désigne le temps en heure (h)

PARTIE D : Installation d'un récupérateur d'eau

Madame Martin choisit d'installer un récupérateur d'eau ayant la forme d'une pyramide à base rectangulaire tronquée, représentée par le solide ABCDA'B'C'D' sur le schéma ci-dessous qui n'est pas à l'échelle. Le plan (A'B'C') est parallèle au plan (ABC).



On donne les dimensions suivantes :

$$AB = 1,9 \text{ m}$$

$$AD = 92 \text{ cm}$$

$$HH' = 1,84 \text{ m}$$

$$SH = 4,60 \text{ m}$$

1. Calculer le volume V_1 de la pyramide SABCD, en mètre cube, arrondi au litre.

On rappelle la formule du volume d'une pyramide :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

2.
 - a. Calculer le coefficient de réduction permettant de passer de la pyramide SABCD à la pyramide SA'B'C'D'.
 - b. En déduire le volume V_2 de la pyramide SA'B'C'D', en mètre cube, arrondi au litre.
3. Montrer que le volume V du récupérateur d'eau est environ égal à $2,101 \text{ m}^3$.
4. Madame Martin possède un arrosoir d'une capacité de 12 litres.
Calculer le nombre d'arrosoirs qu'elle peut remplir complètement avec l'eau contenue dans son récupérateur plein.

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Pour gérer son parc d'éoliennes, un exploitant procède à des relevés de la vitesse du vent sur l'une d'entre elles. Durant l'année 2019, ces relevés ont été effectués toutes les minutes.

1. Combien de relevés ont été réalisés en 2019 ?
2. Le tableau suivant donne plusieurs résultats statistiques issus de ces relevés :

étendue	médiane	moyenne	maximum
23 m/s	14,3 m/s	13 m/s	24 m/s

On précise qu'une éolienne de ce parc :

- tourne dès que la vitesse du vent atteint 3 m/s,
 - a sa puissance électrique stabilisée dès que la vitesse du vent atteint 13 m/s,
 - s'arrête dès que la vitesse du vent est supérieure à 25 m/s.
- a. Le gérant prétend que les éoliennes de son parc n'ont pas fonctionné continuellement durant l'année 2019. A-t-il raison ? Justifier.
 - b. Peut-il affirmer que les éoliennes ont délivré une puissance électrique stabilisée pendant au moins la moitié du temps ? Justifier.

EXERCICE 2

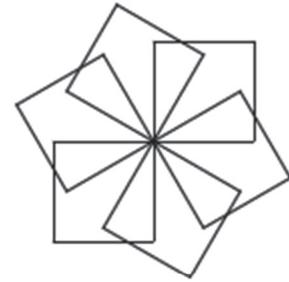
Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses **en justifiant la réponse**.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse, incorrecte ou une absence de réponse n'enlève pas de point.

1. **Affirmation 1** : « le nombre 4 700 001 est un nombre premier »
2. **Affirmation 2** : « les nombres 32^{12} et $16^{15} + 3$ sont égaux »
3. **Affirmation 3** : « La somme des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est toujours un nombre impair. »
4. **Affirmation 4** : « Le triangle ABC avec $AB = 6,4$ m, $BC = 4,8$ m et $AC = 8$ m est rectangle en B. »

EXERCICE 3

Pour réaliser la rosace ci-contre, on a défini un motif « Carré » et on a utilisé le programme ci-dessous.



```

quand cliqué
montrer
aller à x: -120 y: 0
s'orienter à 90
effacer tout
répéter 6 fois
  Carré
  tourner de 60 degrés
cacher

définir Carré
répéter 4 fois
  stylo en position d'écriture
  avancer de 50
  tourner de 90 degrés
  relever le stylo
  
```

1. Combien de motifs « Carré » composent la rosace ?
2. Quelle transformation géométrique permet de passer d'un motif « Carré » au motif « Carré » suivant ?
3. Clément souhaite modifier le programme pour que la rosace soit composée de 10 motifs comme ci-dessous.



Quelles modifications doit-il apporter au programme ?

4. Iness souhaite obtenir la figure ci-dessous où chaque motif est espacé de 10 pixels.



Par quelle instruction doit-elle remplacer l'instruction  pour obtenir cette nouvelle figure ?

EXERCICE 4

Kelly et Mourad ont chacun un dé cubique équilibré. Les faces de leurs dés sont soit rouges, soit bleues. Le dé de Mourad a 5 faces rouges et 1 face bleue.

Chacun lance son dé.

- Si les deux faces supérieures sont de la même couleur, alors c'est Mourad qui gagne.
- Si les deux faces supérieures sont de couleurs différentes, alors c'est Kelly qui gagne.

Kelly et Mourad se posent la question suivante :

Est-il possible de colorier les faces du dé de Kelly de sorte que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ?

1. Kelly propose de colorier 4 faces de son dé en rouge et 2 en bleu.
 - a. Démontrer que la probabilité que Mourad gagne est égale à $\frac{11}{18}$.
 - b. Le coloriage proposé permet-il de répondre affirmativement à la question que Kelly et Mourad se posent ? Justifier.
2. On appelle x le nombre de faces coloriées en rouge sur le dé de Kelly.
 - a. Montrer que la probabilité que Mourad gagne est égale à $\frac{2x+3}{18}$.
 - b. Déterminer la valeur de x pour répondre à la question que Kelly et Mourad se posent.

TROISIÈME PARTIE (14 points)

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

Voici un extrait de la note de service n° 2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ».

« Modéliser » et « calculer » sont deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes à l'école élémentaire qui doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :

- difficultés à « modéliser » : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;
- difficultés à « calculer » : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, la ou les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calcul utilisés.

Un enseignant propose à ses élèves de CE1 le problème suivant issu d'une évaluation nationale de 2012 (DEPP) : « L'album de Rémi et Chloé peut contenir 100 photos. Rémi veut ranger 24 photos et Chloé 16. Combien de places restera-t-il pour de nouvelles photos ? ».

Voici les réponses proposées par 5 élèves :

<p>Élève A</p> $\begin{array}{r} 100 \\ + 24 \\ + \underline{16} \\ \hline 140 \end{array}$ <p style="text-align: right;">C'est 140</p>	<p>Élève B</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: right;">100</td> <td style="text-align: right;">84</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">$-\underline{24}$</td> <td style="text-align: right;">$-\underline{16}$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">84</td> <td style="text-align: right;">72</td> </tr> </table> <p>Il reste 72 places.</p>	100	84	$-\underline{24}$	$-\underline{16}$	84	72
100	84						
$-\underline{24}$	$-\underline{16}$						
84	72						
<p>Élève C</p> $24 + 16 = 40$ $100 - 40 = 60$ <p style="text-align: right;">60 places</p>	<p>Élève D</p> $100 - 24 = 76 - 16 = 60$ <p>Il y a encore 60 places</p>						
<p>Élève E</p> $24 - 16 = 8$ <p style="text-align: right;">Réponse = 8</p>							

1. En s'appuyant sur l'extrait de la note de service proposé ci-dessus, analyser les cinq propositions d'élèves en termes de réussites et d'échecs pour chacune des compétences « modéliser » et « calculer ».
2. Proposer deux activités de remédiation que l'on pourrait envisager pour aider l'élève A à réussir ce type de problème, une avec du matériel et une sans matériel.
3. Proposer une activité de remédiation que l'on pourrait envisager pour aider l'élève B à comprendre son erreur.
4. On considère maintenant le problème suivant : « *L'album de Rémi peut contenir 100 photos. Rémi veut ranger 24 photos. Combien de places restera-t-il pour de nouvelles photos ?* ». En proposant ce second problème à la place du problème initial quelles erreurs risqueraient de ne pas être détectées ? En citer deux.

SITUATION 2

Un enseignant d'une classe de CM2 propose l'exercice suivant à ses élèves :

L'aire d'un rectangle est de 16 cm^2 .
 Trouve une longueur et une largeur possibles pour ce rectangle.
 Quel est alors son périmètre ?
 Cherche le plus de solutions possibles.

1. Citer au moins deux notions qu'un élève doit avoir travaillées pour pouvoir résoudre le problème ci-dessus.
2. Proposer quatre couples de réponses (longueur et largeur du rectangle, avec une longueur supérieure ou égale à la largeur) attendus d'un élève de CM2 aux deux premières questions.
3. Citer au moins deux difficultés qu'un élève peut rencontrer pour déterminer des couples de solutions.
4. Un élève propose comme couple de solutions les longueurs 4 cm et 4 cm. Un de ses camarades lui dit « Ta solution est fautive, car la figure est un carré. »
 Proposer des éléments que l'enseignant peut apporter à ces deux élèves pour les aider à trancher.
5. Un autre élève, qui a effectué la division ci-contre, propose comme couple de solutions les longueurs 5,33 cm et 3 cm.
 - a. Faire une hypothèse sur le raisonnement que l'élève a conduit pour proposer ce résultat.
 - b. Que révèle cette procédure sur les acquis de l'élève ?
 - c. Comment montrer à cet élève que cette réponse ne convient pas ?
 - d. Quelle exploitation l'enseignant pourrait-il faire en classe de cette proposition ?

$$\begin{array}{r|l}
 16 & 3 \\
 10 & \hline
 10 & 5,33 \\
 1 &
 \end{array}$$

SITUATION 3

Un enseignant propose à ses élèves de CM2 l'exercice suivant.

Dans le livre de recettes de cuisine de Corentin, on donne la recette pour faire 15 crêpes ou 25 crêpes :

<p>Pour 15 crêpes 300 g de farine 3 œufs 75 cL de lait 3 cuillères à soupe d'huile</p>	<p>Pour 25 crêpes 500 g de farine 5 œufs 125 cL de lait 5 cuillères à soupe d'huile</p>
---	--

Mais Corentin veut faire 10 crêpes seulement.
Donne la quantité d'ingrédients nécessaires pour faire 10 crêpes.

Madame Lucas veut préparer 60 crêpes pour la fête d'anniversaire de sa fille. Elle a emprunté le livre de recettes de Corentin.
Quelles sont les quantités d'ingrédients nécessaires pour faire 60 crêpes ?

1. Quelle est la principale notion du programme travaillée dans cet exercice ?
2. Analyser le choix des nombres de crêpes dans cet exercice.
3. Expliciter trois procédures correctes attendues des élèves pour calculer la masse de farine pour 10 crêpes.
4. Pour cette question, la production d'un élève est proposée ci-dessous :

10 crêpes : $25 - 15 = 10$
 $500 - 300 = 200$ g de farine
 $5 - 3 = 2$ œufs
 $125 - 75 = 50$ cl de lait
 $5 - 3 = 2$ cuillères à soupe d'huile

Pour 10 crêpes
 200g de farine
 2 œufs
 50cl de lait
 2 cuillères à soupe d'huile

60 crêpes : $15 + 25 + 20$
 $10 \times 2 = 20$
 $500 + 300 + 400 = 1200 \Rightarrow 1$ k 200 de farine
(200x2)
 $3 + 5 + 4 = 12$ œufs
(2x2)
 $125 + 75 + 300 = 500$ cl de lait
(150x2)
 $3 + 5 + 4 = 12$ cuillères d'huile
(2x2)

Pour 60 crêpes
 1k 200 de farine
 12 œufs
 500 cl de lait
 12 cuillères d'huile

300	
+125	
+75	
500	

Relever la ou les erreurs rencontrées et proposer une aide possible pour chacune d'entre elles.