MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Rapport du jury

Concours : **AGREGATION INTERNE ET CAERPA**

Section : **MATHEMATIQUES**

Session 2020

Rapport de jury présenté par : Françoise FLICHE, Présidente de jury

Les rapports des jurys des concours sont établis sous la responsabilité des présidents de jury

Table des matières

Chapitre 1

Généralités et statistiques

1.1 Déroulement de la session 2020

Les épreuves écrites ont eu lieu les 30 et 31 janvier 2020, la liste d'admissibilité a été signée le 09 mars 2020 avec :
- agrégation interne : 358 admissibles ;
- CAERPA : 56 admissibles.

L'arrêté du 10 juin 2020 a porté adaptation des épreuves de certaines sections du concours interne de recrutement de professeurs agrégés de l'enseignement du second degré ouvert au titre de l'année 2020 en raison de la crise sanitaire née de l'épidémie de covid-19.
https://www.legifrance.gouv.fr/eli/arrete/2020/6/10/MENH2013678A/jo/texte

La liste d'admission a été signée le 24 juin 2020 avec l'inscription de :
- agrégation interne : 165 admis sur liste principale ; 2 admis à titre étranger ; 10 candidats inscrits sur liste complémentaire ;
- CAERPA : 19 admis sur liste principale ; 1 candidat inscrit sur liste complémentaire.

Tous les postes mis au concours de l'agrégation interne et du CAERPA ont été pourvus.

1.2 Historique des concours (nombre de postes, d'admissibles ...)

Pour la session 2020, on recense 2216 inscrits sur l'ensemble des deux concours. 1473 candidats ont composé sur l'épreuve 1 et 1455 sur l'épreuve 2. Au total, 1449 candidats ont composé sur les deux épreuves.

Agrégation interne

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
2001	129	1944	1419	289	125
2002	129	1845	1400	288	129
2003	130	1842	1479	288	130
2004	130	1813	1382	287	130
2005	138	1897	1401	311	138
2006	110	2172	1599	273	110
2007	107	2198	1627	267	107
2008	107	2195	1682	257	107
2009	107	2124	1559	258	107
2010	114	2229	1426	267	114
2011	116	2442	1359	263	116
2012	125	2324	1589	281	125
2013	135	2266	1510	303	135
2014	130	2290	1495	302	130
2015	145	2317	1501	332	145
2016	148	2299	1510	333	148
2017	155	2248	1349	329	155
2018	155	2090	1280	330	155
2019	160	2071	1251	340	160
2020	165	1967	1250	358	165

CAERPA

Année	Contrats	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
2001	25	383	268	35	18
2002	23	326	229	22	10
2003	20	325	258	27	15
2004	24	311	241	21	9
2005	19	297	211	27	12
2006	19	329	240	18	13
2007	20	319	221	11	5
2008	15	356	258	22	11
2009	14	305	212	26	12
2010	12	346	207	17	8
2011	11	427	213	19	11
2012	13	350	228	29	13
2013	18	320	201	35	18
2014	19	317	217	32	14
2015	20	322	203	34	12
2016	13	335	214	35	13
2017	16	338	200	47	16
2018	17	353	205	55	17
2019	18	354	211	53	18
2020	19	303	199	56	19

1.3 Statistiques

1.3.1 Répartition femmes-hommes

Pour l'ensemble des deux concours, le pourcentage de femmes parmi les candidats présents à l'écrit est en légère baisse (35%). On note une baisse du pourcentage de femmes parmi les admissibles (29% contre 36,6% en 2019), qui se répercute sur la proportion de femmes parmi les admis : 27% de reçues contre 43,3% en 2019, 44,8% en 2018, 39,8% en 2017, se rapprochant ainsi de proportions plus anciennes, 30,4% en 2016.

	Agrégation interne			CAERPA		
	Femmes	Hommes	Total	Femmes	Hommes	Total
Inscrits	727	1344	2071	148	206	354
Présents	428	822	1250	80	119	199
Admissibles	105	253	358	15	41	56
Admis	48	117	165	2	17	19

1.3.2 Répartition par âge

Pour l'ensemble des deux concours, l'âge moyen des candidats présents est de 42,6 ans (41,3 ans pour les femmes et 43,3 ans pour les hommes). Les admissibles ont en moyenne 42,7 ans (41,2 ans pour les femmes et 43,3 ans pour les hommes) et les admis ont respectivement 42,6 ans, 41,4 ans et 43 ans. Ainsi, conformément à leur vocation, les concours internes de l'agrégation s'adressent principalement à des professeurs confirmés dans leur carrière.

Agrégation interne

Tranches d'âge	Présents	Admissibles	Admis
Moins de 30 ans	74	12	5
Entre 30 et 35 ans	223	55	24
Entre 35 et 40 ans	238	78	36
Entre 40 et 45 ans	250	83	41
Entre 45 et 50 ans	254	82	39
Entre 50 et 55 ans	131	32	17
Supérieur à 55 ans	80	16	3
Total	1250	358	165

CAERPA

Tranches d'âge	Présents	Admissibles	Admis
Moins de 30 ans	8	2	1
Entre 30 et 35 ans	34	9	1
Entre 35 et 40 ans	30	6	3
Entre 40 et 45 ans	45	17	7
Entre 45 et 50 ans	41	13	4
Entre 50 et 55 ans	23	4	1
Supérieur à 55 ans	18	5	2
Total	199	56	19

1.3.3 Répartition par profession

Ce sont essentiellement les professeurs certifiés qui sont reçus à l'agrégation interne (91% des admis, 92% des admissibles).

Agrégation interne

Professions	Présents	Admissibles	Admis
AUTRES	14	5	3
AUTRES ENS. TIT.	70	18	9
CERTIFIE	1121	330	150
PLP	45	5	3
Total	1250	358	165

CAERPA

Professions	Présents	Admissibles	Admis
CONT ET AGREE REM INSTITUTEUR	2	0	0
MAITRE CONTR.ET AGREE REM MA	10	3	1
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	187	53	18
Total	199	56	19

1.3.4 Répartition par académie

Agrégation interne

Académies	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	70	19	10
AMIENS	34	12	8
BESANÇON	17	5	1
BORDEAUX	47	16	8
CAEN	19	6	5
CLERMONT-FERRAND	23	6	2
CORSE	10	2	1
CRÉTEIL-PARIS-VERSAIL.	291	81	42
DIJON	20	6	2
GRENOBLE	58	17	6
GUADELOUPE	13	2	1
GUYANE	4		
LA RÉUNION	40	9	3
LILLE	71	24	14
LIMOGES	11	2	
LYON	62	27	10
MARTINIQUE	15	5	2
MAYOTTE	15	8	
MONTPELLIER	62	13	8
NANCY-METZ	41	9	4
NANTES	47	10	3
NICE	42	12	6
NOUVELLE CALÉDONIE	6	1	1
ORLÉANS-TOURS	52	14	4
POITIERS	22	8	4
POLYNÉSIE FRANÇAISE	3	1	
REIMS	23	6	2
RENNES	40	9	1
ROUEN	26	8	4
STRASBOURG	37	14	6
TOULOUSE	36	14	7
Total	1250	358	165

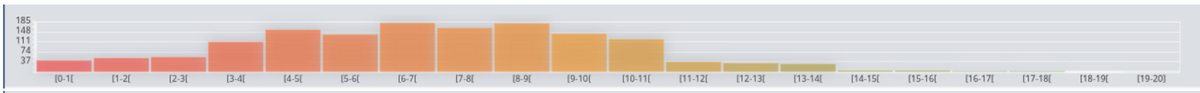
CAERPA

Académies	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	5		
AMIENS	3	1	
BESANÇON	1		
BORDEAUX	4	2	
CAEN	5	1	
CLERMONT-FERRAND	6	1	1
CRÉTEIL-PARIS-VERSAIL.	45	14	8
DIJON	2		
GRENOBLE	6	3	
GUADELOUPE	1		
LA RÉUNION	4	1	1
LILLE	22	4	
LIMOGES	3		
LYON	17	4	1
MARTINIQUE	2		
MONTPELLIER	4	2	
NANCY-METZ	3		
NANTES	15	4	1
NICE	2	1	
NOUVELLE CALÉDONIE	1		
ORLÉANS-TOURS	1		
POITIERS	3	1	
POLYNÉSIE FRANÇAISE	4		
REIMS	4	1	
RENNES	14	4	2
ROUEN	5	3	2
STRASBOURG	10	5	1
TOULOUSE	7	4	2
Total	199	56	19

1.3.5 Répartition des notes des épreuves écrites

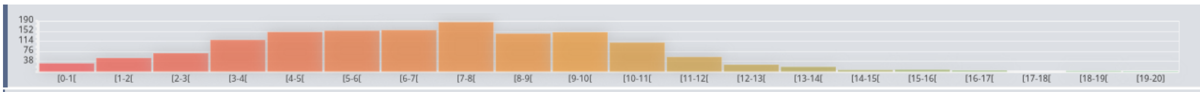
La barre d'admissibilité a été fixée à 87 points sur 200 (identique pour les deux concours). Le nombre d'admissibles au CAERPA a été proportionnellement plus élevé (si on le rapporte au nombre de postes offerts).

Répartition des notes attribuées à l'épreuve 1
Notes des 1473 copies



Note minimum	**0,00 / 20**
Moyenne	**6,87 / 20**
Note maximum	**20,00 / 20**
Ecart type	**3,15**
Quartile inférieur	4,60 / 20
Médiane	6,80 / 20
Quartile supérieur	9,00 / 20
Ecart interquartile	4,40

Répartition des notes attribuées à l'épreuve 2
Notes des 1455 copies



Note minimum	**0,20 / 20**
Moyenne	**6,84 / 20**
Note maximum	**20,00 / 20**
Ecart type	**3,17**
Quartile inférieur	4,60 / 20
Médiane	6,80 / 20
Quartile supérieur	9,00 / 20
Ecart interquartile	4,40

Chapitre 2

Programme du concours pour la session 2021

Le programme du concours pour la session **2021** est publié sur le site du ministère de l'Éducation nationale à l'adresse suivante :

https://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid100820/les-programmes-des-concours-enseignants-second-degre-session-2021.html

Chapitre 3

Rapport sur les épreuves écrites

L'arrêté définissant le concours dispose que les épreuves écrites « ont pour objectif d'évaluer la maîtrise des connaissances mathématiques et la capacité de les mobiliser pour étudier des situations, ainsi que la solidité, sur le plan scientifique, des acquis professionnels ».

Aussi, une bonne connaissance d'un minimum d'outils théoriques est-elle indispensable à la réussite de ces épreuves, ce qui suppose un travail de préparation visant la maîtrise des théorèmes fondamentaux et un entraînement à la résolution de problèmes afin d'acquérir de bons réflexes intellectuels.

Les correcteurs sont particulièrement attentifs à la clarté des raisonnements, à la précision des justifications et à l'exactitude des définitions ou des théorèmes employés. En particulier, lorsqu'un résultat est utilisé (théorème, propriété, etc.), il est important d'énoncer clairement les hypothèses à vérifier et la conclusion désirée. C'est d'autant plus important lorsque le candidat n'arrive pas à vérifier lesdites hypothèses car le correcteur peut alors valoriser ses connaissances et sa capacité à reconnaître une situation.

Il est attendu dans les copies les qualités exigibles d'un professeur de mathématiques, à savoir :

- la rigueur de la rédaction : choisir de façon pertinente les articles utilisés (singulier ou pluriel, défini ou indéfini) ; utiliser les quantificateurs appropriés ; distinguer la signification des divers symboles mathématiques usuels ; citer clairement les théorèmes ou résultats invoqués, en vérifier les hypothèses et s'abstenir de citer des hypothèses sans rapport avec le théorème ; éviter des arguments vagues comme « d'après le cours » ou « vu ce qui précède » ainsi que les locutions « il est évident que », « on voit que » ou « on a forcément » qui masquent fréquemment une absence d'argument ou de preuve ;
- la compréhension de la nature des objets mathématiques manipulés ;
- la maîtrise des techniques usuelles de démonstration : raisonnement par équivalence, raisonnement par analyse-synthèse, démonstration par récurrence, par l'absurde, par contraposée etc. ;
- la clarté de l'expression, la lisibilité de la présentation ainsi qu'une certaine attention à l'orthographe.

Il est aussi apprécié que les candidats expliquent leur démarche, concluent les questions et accompagnent, si c'est pertinent, leurs démonstrations de figures, schémas ou autres illustrations géométriques.

Cette année encore, le jury regrette un manque de rigueur et de logique dans les raisonnements : confusions entre implication et équivalence, condition nécessaire et condition suffisante (confusion entre « il faut » et « il suffit »), quantificateurs erronés ou absents, connaissance très approximative des définitions (limites, continuité, sup, inf etc.) et des théorèmes. Toutes ces insuffisances sont sévèrement sanctionnées tant il est essentiel qu'un professeur de mathématiques maîtrise ces fondamentaux pour dispenser un enseignement de qualité. Le jury tient à appeler l'attention des candidats sur la nécessité de fournir un travail important dans ce sens.

3.1 Première épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/71/2/s2020_agreg_interne_math_1_1239712.pdf

3.1.1 Présentation du sujet

L'objectif du sujet est d'établir et d'utiliser la décomposition de Bruhat pour le groupe linéaire. Pour une présentation rapide de cette décomposition, nous renvoyons aux notes d'exposé *Bruhat decomposition and applications* données par G. Lusztig, disponibles à l'adresse suivante :

`https://arxiv.org/abs/1006.5004`

La partie I amorce l'étude des drapeaux de sous-espaces vectoriels et permettait de tester les candidats sur les notions d'algèbre linéaire (théorème de la base incomplète, utilisation de la dimension, diagonalisation, trigonalisation, endomorphismes nilpotents). La partie II concerne l'étude des groupes quotients. La notion est illustrée à l'aide du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et d'une réalisation du groupe diédral. La question 12 introduit la notion de double classe. La partie III a pour but d'établir la décomposition de Bruhat (questions 15 à 17). Le début de la partie concerne les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes de matrices. Ensuite, on utilise la décomposition LU et les dernières questions traitent de topologie. La partie IV se concentre sur les actions de groupes et se conclut par un dénombrement d'orbites.

3.1.2 Remarques générales

Le sujet est assez progressif jusqu'à la question 15. Il est possible d'admettre le résultat des questions 15 et 16, qui sont difficiles, pour aborder la topologie et la décomposition LU, ainsi que la partie IV sur les actions de groupes. Les premières parties du sujet sont très proches des points qui figurent au programme du concours. La partie I a été traitée par la plupart des candidats. Les questions les plus abordées ont été ensuite les questions 13 et 14. La partie II a été abordée dans beaucoup de copies. Quelques candidats abordent les quatre parties de manière satisfaisante ; la longueur du sujet est raisonnable.
Le sujet a permis de distinguer les candidats qui savent mettre en place un raisonnement rigoureux et concis.

3.1.3 Commentaires par question

Les commentaires ci-dessous détaillent les erreurs les plus fréquemment rencontrées dans les copies. Les questions peu traitées ne font pas l'objet de commentaire.

Partie I

1 Pour l'inclusion stricte, évoquer que e_{j+1} n'est pas dans $\mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_j)$ aurait mérité une mention rapide de la liberté de $(e_1, ..., e_n)$. Certains candidats rédigent des récurrences inutiles. Les correcteurs attendent de la concision pour prouver que $\mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_j)$ est inclus dans $\mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_{j+1})$.

2 Cette question a été souvent mal comprise. Certains partent déjà de l'existence d'une base adaptée pour prouver qu'elle existe. D'autres évoquent la réunion d'espaces vectoriels $\mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_j) \cup \mathrm{Vect}\,(e_{j+1})$. Rappelons que la réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel. L'approche la plus rapide est de commencer par montrer que chaque E_i est nécessairement de dimension i, puis d'utiliser le théorème de la base adaptée. Rappelons que ce théorème permet de compléter des familles libres, et que ce caractère libre est un point à mentionner.

3 La notion de base orthonormée n'est pas toujours maitrisée. Normaliser les vecteurs d'une famille n'est pas suffisant pour orthonormaliser celle-ci. Dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, beaucoup de candidats oublient de mentionner que : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_j) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_j)$, qui est une propriété importante pour répondre à cette question. Affirmer « il suffit d'appliquer Gram-Schmidt » n'est pas une rédaction adaptée.

4 On relève des confusions entre valeurs propres et vecteurs propres ainsi qu'entre coordonnées et vecteurs via la représentation matricielle. La stabilité du drapeau construit n'est parfois pas vérifiée rigoureusement. Des candidats parlent de « base de diagonalisation de u » , mais le jury attend qu'elle soit clairement définie. Par ailleurs, notons que la famille de sous-espaces $F_k = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$, où E_{λ_i} désigne le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i, n'a pas de raison d'être un drapeau *total*. Attention, certains candidats pensent qu'un endomorphisme diagonalisable a nécessairement n valeurs propres distinctes.

5 a) Il convenait de rédiger proprement une récurrence ou un raisonnement par l'absurde. Le fait que la famille $(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), ..., u^{n_k}(x))$ soit liée n'implique pas que $u^{n_k}(x)$ s'exprime en fonction des autres vecteurs.

b) L'inclusion stricte des noyaux itérés est rarement justifiée avec rigueur. Certains candidats ont cherché à montrer que la suite des noyaux itérés était stationnaire mais n'ont pas réussi à conclure correctement. Rappelons enfin que l'ordre dans lequel sont donnés les vecteurs d'une base adaptée a son importance.

6 Souvent traitée convenablement. Un raisonnement par double implication est attendu. L'utilisation de la décomposition de Dunford n'est pas nécessaire mais a pourtant été assez souvent mentionnée, avec maladresse.

7 Il est important d'être vigilant sur l'ordre dans lequel on utilise les questions précédentes. On doit d'abord prouver l'existence d'un drapeau stable puis d'une base orthonormée adaptée à ce drapeau.

Partie II

8 a) Des candidats confondent « H distingué dans G » et « tous les éléments de H commutent avec les éléments de G » . Peu ont compris ce que signifiait « on a bien défini ainsi une loi de composition interne » . Il s'agissait de montrer que la multiplication sur G/H est indépendante du représentant choisi. Certains utilisent la caractérisation des sous-groupes, mais ici elle ne permettait pas de conclure car on ne peut pas préciser de quel groupe G/H est un sous-groupe. Attention à bien vérifier toutes les propriétés qui définissent un groupe. En particulier, vérifier que l'on a le même élément neutre à gauche et à droite, de même pour le symétrique. Parfois l'associativité a été oubliée.

b) On peut noter quelques confusions entre injectivité et surjectivité.

9 a) Disposer le calcul matriciel n'était pas suffisant. Il pouvait soit évoquer une propriété de cours, soit redémontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux. Une matrice triangulaire de déterminant 1 n'a pas forcément que des « 1 » sur sa diagonale : cette erreur est fréquemment commise.

b) Quelques erreurs sur l'inverse d'une matrice 2*2.

10 Parfois, les opérations de groupes ont été utilisées sur G/H, alors qu'on ne sait pas si G/H est un groupe. On montre que H est distingué dans G, pour pouvoir dire ensuite (question 11b) que G/H est un groupe. Certains ont bien vu qu'il existe $g \notin H$ tel que G soit réunion disjointe de H et gH, mais il est ensuite trop expéditif d'affirmer qu'un ensemble de la forme Hg' est égal à H ou gH.

11 a) Des notations pour la multiplication des matrices rendent le résultat indistinct du calcul et ne facilitent pas la lecture des copies. Beaucoup ont perdu du temps à établir la table de la loi, alors que pour la stabilité par multiplication, il suffisait de regarder les divers résultats de $A^k B^l A^{k'} B^{l'}$. Par ailleurs ceux qui ont établi la table de la loi ont souvent oublié de préciser que l'inverse restait bien dans Δ. Pour montrer que Δ est stable par inversion, certains se sont contentés de montrer que les matrices sont inversibles, sans vérifier que leurs inverses était bien dans Δ.

b) Une démonstration utilisant la question 10 était attendue. Certains candidats ont reconnu le groupe diédral, mais sans donner d'explication.

c) Cette question a posé beaucoup de problèmes de logique. L'application $A^kB^l \mapsto (A^k, B^l)$ n'est pas un morphisme de groupes entre Δ et $\Gamma \times R$. De plus pour montrer que deux groupes ne sont pas isomorphes, il ne suffit pas d'exhiber une application entre deux groupes qui n'est pas bijective. Une application bijective entre deux groupes n'est pas nécessairement un morphisme de groupes. Certains candidats n'arrivent pas à dénombrer le nombre d'éléments de $\Gamma \times R$ et concluent à l'aide des cardinaux.

12 a) Quelques incompréhensions sur la notion de classe à gauche.

b) Des arguments utilisent la notion de partition des classes à gauche ou de partition des classes à droite. Mais ici la fusion des deux est plus compliquée. Il est préférable de repasser par une relation d'équivalence (mentionnée dans quelques très rares copies).

Partie III

13 a) Souvent la matrice est donnée sans aucune explication.

b) Relation rarement justifiée. Certains ont exprimé P_σ comme blocs de P_{c_j}. Il convient de vérifier la cohérence, toutes les matrices sont de taille n. Quelques candidats affirment que P_σ est la somme des P_{c_j}.

c) Attention, être une matrice orthogonale ne signifie pas être de déterminant 1 ou -1. Certains candidats ont mentionné qu'une matrice orthogonale est la matrice de passage d'une base à une autre, mais il convient de préciser que ce sont des matrices de passages entre bases **orthonormées**. Enfin, certains candidats se sont limités à montrer que les colonnes étaient orthogonales deux à deux sans parler de leur norme.

d) Le lien entre le déterminant et la signature est rarement prouvé. Certains font le lien avec la question 13b) et concluent qu'il faut un nombre pair de cycles de taille paire. Il convient ensuite de faire le lien avec la signature. De nombreuses erreurs sur la signature d'un cycle : un cycle de taille k a pour signature $(-1)^{k-1}$.

14 a) Trop de preuves « avec les mains » en dessinant explicitement des matrices. On attend *a minima* un calcul explicite coefficient par coefficient de $E_{i,j}A$.

b) Des confusions entre les indices i et j. Beaucoup de candidats ne semblent pas connaître le résultat du produit par une matrice de dilatation et écrivent $L_i \leftarrow L_i + (\lambda - 1)L_i$.

c) Cette question est rarement abordée, et souvent mal comprise. La deuxième partie de la question trouve comme réponse des affirmations trop vagues comme « permute les lignes ou les colonnes selon σ » . Une bonne manière d'aborder cette question est d'utiliser une décomposition en produit de transpositions. Cela permet de voir que la « permutation des colonnes » n'est pas la même que la « permutation des lignes » .

15 Quelques tentatives infructueuses. Certains très bon candidats ont néanmoins abordé sérieusement la question.

16 a) La question n'a quasiment pas été abordée. Remarquons pourtant qu'une démarche possible aurait été de commencer par chercher quelles opérations élémentaires (puisque c'est le sujet des questions précédentes) correspondent à des matrices triangulaires supérieures. Cette question pouvait aussi être rapprochée de l'algorithme du pivot de Gauss.

b) Le lien avec la question 15 n'a pas été établi.

17 Quelques oublis pour $c \neq 0$.

18 Question bien traitée quand elle est abordée.

19 Cette question a été assez peu abordée, mais a permis de détecter des lacunes. En particulier, l'ensemble des matrices vérifiant la condition E_2 n'est pas l'image réciproque d'une seule fonction ϕ_k. Des confusions entre intersection et réunion. Attention, on ne peut pas affirmer qu'une intersection quelconque d'ouverts est un ouvert.

20 Trop de calculs matriciels, sans entrer dans les détails des coefficients. À ce stade du problème on peut s'attendre à ce que les candidats qui abordent la question reconnaissent un changement de base.

Pour la continuité (question d), la linéarité en dimension finie est rarement évoquée. Les candidats se contentent d'affirmer que l'expression est « polynomiale en les coefficients » .

Partie IV

22 La compatibilité a donné lieu à des preuves trop vagues. Cette question était l'occasion de faire le lien entre les connaissances d'algèbre linéaire et les rappels et compléments sur les actions de groupes. Elle a permis à certains candidats de montrer du recul sur les notions d'algèbre et d'algèbre linéaire.

23 La différence entre matrice et application linéaire n'est pas toujours claire, donc de nombreuses preuves sont floues. Bien mentionner que l'on considère des matrices dans une base : B_0.

3.1.4 Éléments de correction

Les indications exposées dans cette section proposent aux candidats des pistes de solution pour répondre aux questions du problème. Elles sont cependant parfois trop succinctes pour constituer un modèle de rédaction répondant à toutes les attentes du jury.

Partie I : drapeaux de sous-espaces vectoriels

1 On a clairement $E_0 \subsetneq E_1$ car $\dim E_1 = 1$. Soit $j \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. La famille $(e_1, \ldots, e_j)$ est extraite de $(e_1, \ldots, e_{j+1})$ donc $E_j \subset E_{j+1}$. Les deux familles de vecteurs considérées sont libres donc $\dim E_j = j < \dim E_{j+1} = j+1$, ce qui montre que $E_j \subsetneq E_{j+1}$. Par ailleurs, $(e_1, \ldots, e_n)$ engendre E donc $E_n = E$. Ainsi $(E_i)_{i\in[\![0\,;\, n]\!]}$ est un drapeau total.

2 On utilise le théorème de la base incomplète. Soit $(E_i)_{i\in[\![0\,;\, n]\!]}$ un drapeau total de E. On remarque que la suite $(\dim(E_i))_{i\in[\![0\,;\, n]\!]}$ est une suite strictement croissante d'entiers tels que $\dim E_0 = 0$ et $\dim E_n = n$. On a donc nécessairement $\forall i \in [\![0\,;\, n]\!]\ \dim E_i = i$. Soit $e_1 \in E_1 \smallsetminus \{0\}$. Si $n = 1$ la construction est terminée, sinon $n \geqslant 2$. Soit alors $i \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. Si $(e_1, \ldots, e_i)$ est une base adaptée au drapeau $(E_j)_{j\in[\![0\,;\, i]\!]}$ qui est un drapeau total de E_i, alors c'est une famille libre de i vecteurs de E_{i+1}, que l'on complète en une base de E_{i+1}. Comme on l'a remarqué, $\dim E_{i+1} = i+1$ donc la base obtenue est de la forme $(e_1, \ldots, e_{i+1})$. La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est alors une base de $E_n = E$, qui est adaptée au drapeau $(E_i)_{i\in[\![0\,;\, n]\!]}$.

3 D'après le résultat de la question précédente, le drapeau total $(E_i)_{i\in[\![0\,;\, n]\!]}$ admet une base adaptée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette base. On obtient une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée, telle que $\forall j \in [\![1\,;\, n]\!],\ \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_j) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j)$. La base othonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ est donc adaptée au drapeau total $(E_i)_{i\in[\![0\,;\, n]\!]}$.

4 Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u. Considérons le drapeau total associé à cette base. Pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Soit $j \in [\![1\,;\, n]\!]$ et $x \in E_j = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_j)$. En écrivant $x = \sum_{i=1}^{j} x_i e_i$ on constate que $u(x) = \sum_{i=1}^{j} x_i \lambda_i e_i \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_j) = E_j$. Donc ce drapeau total est stable par u.

5 Soit $x \in E$ vérifiant $u^{n-1}(x) \neq 0$.

a) Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. La famille $(u^{n-k}(x), u^{n-k+1}(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une famille libre de k vecteurs. En effet, soit $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1 \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{k} a_i u^{n-i}(x) = 0$. Alors $u^{k-1}(\sum_{i=1}^{k} a_i u^{n-i}(x)) = a_k u^{n-1}(x) = u^{k-1}(0) = 0$ et $u^{n-1}(x) \neq 0$ donc $a_k = 0$. De proche en proche, tous les a_i sont nuls et la famille considérée est libre.

b) Pour tout $i \in [\![0\,;\, n-1]\!]$, on a $\text{Ker } u^i \subset \text{Ker } u^{i+1}$, $\text{Ker } u^0 = \{0\}$ et $\text{Ker } u^n = E$. Comme $u^{n-i-1}(x) \in \text{Ker } u^{i+1} \setminus \text{Ker } u^i$, on a $\text{Ker } u^i \subsetneq \text{Ker } u^{i+1}$, et $(\text{Ker } u^i)_{i\in[\![0\,;\, n]\!]}$ est un drapeau total de E. On en déduit immédiatement que $\dim \text{Ker } u^i = i$ et que la famille $(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \ldots, u(x), x)$ est une base adaptée de ce drapeau.

De plus, ce drapeau est bien stable car si $y \in \text{Ker } u^i$ alors $u^i(u(y)) = u(u^i(y)) = u(0) = 0$ donc $u(y) \in \text{Ker } u^i$.

6 Supposons que u est trigonalisable. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Soit $(E_i)_{i\in[\![0\,;\, n]\!]}$ le drapeau total défini par cette base. Alors comme la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est triangulaire, on a pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ $u(e_i) \in \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_i)$, ce qui montre que le drapeau $(E_i)_{i\in[\![0\,;\, n]\!]}$ est stable par u. Réciproquement, si $(E_i)_{i[\![0\,;\, n]\!]}$ est un drapeau total stable, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base adaptée à ce drapeau. Alors la matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure et u est trigonalisable.

7 Soit u un endomorphisme trigonalisable d'un espace euclidien E. Alors il existe d'après la question précédente un drapeau total de E stable par u, et d'après la question 3 un tel drapeau admet une base adaptée orthonormée. On obtient ainsi une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Partie II : des groupes quotients

8 Soit $H \lhd G$.

a) Soit $g_1, g_2, g_1', g_2' \in G$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on a $g_i H = g_i' H$ si et seulement si il existe $h_i \in H$ tel que $g_i = g_i' h_i$. Supposons que ce soit le cas. Alors $g_1 H \star g_2 H = g_1 g_2 H = (g_1' h_1 g_2' h_2) H = (g_1' h_1 g_2') H$. Mais comme H est distingué dans G, on a $H g_2' = g_2' H$; ainsi il existe $h \in H$ tel que $h_1 g_2' = g_2' h$. Ceci montre que $h_1 g_2' H \subset g_2' H$ et donc que $g_1 H \star g_2 H \subset g_1' g_2' H$. De manière analogue on obtient l'autre inclusion, et donc la loi proposée est bien définie. C'est clairement une loi de composition interne.

Associativité : soit $g_1, g_2, g_2 \in G$. On a $(g_1 H \star g_2 H) \star g_3 H = g_1 g_2 H \star g_3 H = (g_1 g_2) g_3 H = g_1 (g_2 g_3) H = g_1 H \star (g_2 g_3) H = g_1 H \star (g_2 H \star g_3 H)$.

De plus H est neutre pour la loi de composition, et si $g \in G$, l'élément gH admet pour symétrique $g^{-1}H$; en effet $gH \star H = H \star gH = gH$ et $gH \star g^{-1}H = g^{-1}H \star gH = H$.

b) L'application π est surjective car si $x \in G/H$, il existe $g \in G$ tel que $x = gH$ et on a $\pi(g) = gH$. D'après la question précédente, on a $\pi(g_1 g_2) = g_1 g_2 H = (g_1 H) \star (g_2 H) = \pi(g_1) \star \pi(g_2)$, l'application π est donc un morphisme surjectif de groupes.

9 a) Soit $A \in TU_n^+(\mathbb{K})$ et $P \in T_n^+(\mathbb{K})$. Comme rappelé dans les notations, $T_n^+(\mathbb{K})$ est un groupe. Comme $TU_n^+(\mathbb{K}) \subset T_n^+(\mathbb{K})$, on obtient $P^{-1}AP \in T_n^+(\mathbb{K})$. De plus les coefficients diagonaux du produit de deux matrices triangulaires supérieures est le produit terme à terme des coefficients diagonaux. En effet, soit $T = (t_{i,j})_{i,j\in[\![1\,;\, n]\!]}$ et $T' = (t'_{i,j})_{i,j\in[\![1\,;\, n]\!]}$ deux matrices triangulaires supérieures. Soit $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. Le coefficient d'indice (i, i) de TT' est $TT'[i, i] = \sum\limits_{k=1}^{n} t_{i,k} t'_{k,i}$ mais $t_{i,k} = 0$ si $i > k$ et $t'_{k,i} = 0$ si $i < k$, donc $TT'[i, i] = t_{i,i} t'_{i,i}$.

Ainsi T^{-1} est triangulaire supérieure et $T^{-1}[i, i] = (T[i, i])^{-1}$. De plus $P^{-1}AP[i, i] = (P^{-1})[i, i] a_{i,i} P[i, i] = P^{-1}[i, i] P[i, i] = 1$ car $a_{i,i} = 1$. Ceci montre que $P^{-1} TU_n^+(\mathbb{K}) P \subset TU_n^+(\mathbb{K})$, donc que $TU_n^+(\mathbb{K}) \lhd T_n^+(\mathbb{K})$.

b) Si $n=1$, la réponse est oui, mais si $n \geqslant 2$ la réponse est non. On a par exemple en posant $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T_2^+(\mathbb{K})$ et $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in T_2^-(\mathbb{K})$, on a

$$P^{-1}T_1P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = T_2$$

et on construit un contre-exemple par blocs à partir de celui-ci pour $n \geqslant 3$ en remarquant que

$$\left(\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} T_1 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} T_2 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right).$$

10 Comme G/H a deux éléments, on a déjà $H \neq G$. Soit $g \in G \setminus H$. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble E, alors les classes d'équivalences constituent une partition de E. Ici, les classes à gauche et à droite constituent une partition de G donc on a $G = H \cup gH = H \cup Hg$, les réunions étant disjointes. On en déduit que $gH = Hg$ et donc que $H \lhd G$.

11 a) On a $\Delta \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, car par exemple les matrices A et B sont de déterminant non nul. On a aussi clairement $I_2 \in \Delta$. On remarque que $A^4 = B^2 = I_2$. On a $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^3B$, donc $BA^2 = A^3BA = A^6B = A^2B$ et $BA^3 = A^9B = AB$. Soit $k, k' \in [\![0\,;\,3]\!]$ et $l, l' \in [\![0\,;\,1]\!]$. Soit $C = A^kB^lA^{k'}B^{l'}$. Si $l = 0$ on a $C = A^{k+k'}B^{l'} = A^rB^{l'} \in \Delta$ où r est le reste dans la division euclidienne de $k+k'$ par 4. Si $l = 1$ on a de la même manière, grâce aux calculs que l'on vient de faire $C \in \Delta$, ce qui montre que Δ est stable par multiplication. Par ailleurs, l'inverse de A^k est $A^{4-k} \in \Delta$, l'inverse de B est $B \in \Delta$, l'inverse de AB est $BA^3 = AB$, l'inverse de A^2B est $BA^2 = A^2B$ et l'inverse de A^3B est $BA = A^3B$. Δ est donc stable par passage à l'inverse.

Ainsi Δ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit $C \in \Delta$. Les calculs effectués à la question précédente montrent que $C\Gamma = \{CA^k \mid k \in [\![0\,;\,3]\!]\} =< A >$ ou $C\Gamma = \{B, AB, A^2B, A^3B\} =< A > B$. Ainsi l'ensemble Δ/Γ possède exactement deux éléments, et d'après la question 3.1.4, $\Gamma \lhd \Delta$. D'après les rappels, dans ce cas Δ/Γ peut être muni d'une structure de groupe. Il n'y a qu'un seul groupe à deux éléments à isomorphisme près, donc Δ/Γ et R sont isomorphes ; un isomorphisme pourrait être donné explicitement par $< A > \mapsto I_2$ et $< A > B \mapsto B$.

c) On a vu que $BA \neq AB$ donc Δ n'est pas abélien, alors que puisque Γ et R sont cycliques (donc abéliens), le groupe $\Gamma \times R$ est abélien. Ainsi Δ et $\Gamma \times R$ ne sont pas isomorphes.

12 a) On a $HgK = \bigcup_{h \in H} hgK = \bigcup_{k \in K} Hgk$ donc une réunion de classes à gauches et une réunion de classes à droite.

b) La relation binaire $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow HxK = HyK \Leftrightarrow \exists h \in H,\ \exists k \in K,\ y = hxk$ est une relation d'équivalence. Elle est en effet :

— Réflexive : soit $x \in G$, $x\mathcal{R}x$ car $x = 1_G x 1_G$.

— Symétrique : soient $x, y \in G$, tels que $x\mathcal{R}y$. Il existe $h \in H$ et $k \in K$ tels que $y = hxk$ donc $x = h^{-1}xk^{-1}$ et $y\mathcal{R}x$.

— Transitive : soient $x, y, z \in G$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Il existe $h, h' \in H$ et $k, k' \in K$ tels que $y = hxk$ et $z = h'yk'$. Alors $z = h'hxkk'$ donc $x\mathcal{R}z$.

On a utilisé à chaque fois le fait que H et K étaient des sous-groupes de G.

Les classes d'équivalence pour cette relation sont les doubles classes, ce qui prouve que l'ensemble des doubles classes constitue une partition de G.

Partie III : décomposition de Bruhat et matrices

13 a) Pour $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$ on a $u_\sigma(\varepsilon_i)=\varepsilon_{i+1}$ et $u_\sigma(\varepsilon_n)=\varepsilon_1$. Ainsi pour $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, la colonne de coordonnées de $u(\varepsilon_i)$ dans la base $\mathcal{B}$ est constituée de 0 sauf à la i-ème position, qui est un « 1 ». La colonne de coordonnées de $u(\varepsilon_n)$ est $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.

On en déduit que $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1\\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

b) Si $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on a $u_{c_1\circ\cdots\circ c_k}(\varepsilon_i)=\varepsilon_{c_1\circ\cdots\circ c_k(i)}=\varepsilon_{\sigma(i)}$. On en déduit que $u_\sigma = u_{c_1\circ\cdots\circ c_k}$ a pour matrice dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $P_\sigma = P_{c_1}\times\cdots\times P_{c_k}$.

c) Les colonnes de P_σ constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; en effet dans une matrice P_σ tous les coefficients sont nuls sauf un, qui vaut « 1 » et qui est aussi le seul coefficient non nul de sa ligne, donc P_σ est orthogonale.

d) On peut par exemple revenir à la définition du déterminant, pour voir que $\det(P_\sigma)=\varepsilon(\sigma)$, où ε désigne la signature. En effet, si on note $p_{i,j}$ les coefficients de P_σ, on a $\det(P_\sigma) = \sum\limits_{s\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(s)\prod\limits_{k=1}^{n}p_{s(k),k}$. Si $s\neq\sigma$ il existe $k\in[\![1\,;\,n]\!]$ tel que $s(k)\neq\sigma(k)$ et donc $p_{s(k),k}=0$. Dans ce cas $\prod\limits_{k=1}^{n}p_{s(k),k}=0$ et tous les termes de la somme ci-dessus sont nuls, sauf celui pour $s=\sigma$. Ceci donne $\det(P_\sigma)=\varepsilon(\sigma)\prod\limits_{k=1}^{n}p_{\sigma(k),k}=\varepsilon(\sigma)$.

Ainsi

$$P_\sigma\in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma\in\mathfrak{A}_n,$$

où $\mathfrak{A}_n$ désigne le groupe alterné.

14 a) Notons $[T_{i,j}(\lambda)A]_{k,l}$ le coefficient d'indice (k,l) de la matrice $T_{i,j}(\lambda)A$. On a $[T_{i,j}(\lambda)A]_{k,l} = \sum\limits_{m=1}^{n}[T_{i,j}(\lambda)]_{k,m}[A]_{m,l}$

Si $k\neq i$ alors $[T_{i,j}(\lambda)]_{k,m}=\delta_{k,m}$ donc $[T_{i,j}(\lambda)A]_{k,l}=[A]_{k,l}$ et la ligne k n'est pas modifiée.

Si $k=i$ alors $[T_{i,j}(\lambda)]_{i,m}=1$ lorsque $m=i$ et λ lorsque $m=j$ donc $[T_{i,j}(\lambda)A]_{i,l}=[A]_{i,l}+\lambda[A]_{j,l}$

b) De manière analogue, on voit que $D_i(\lambda)A$ correspond à l'opération $L_i\leftarrow\lambda L_i$, que $AD_i(\lambda)$ correspond à $C_i\leftarrow\lambda C_i$ et $AT_{i,j}(\lambda)$ à $C_j\leftarrow C_j+\lambda C_i$.

c) On obtient respectivement $L_i\leftrightarrow L_j$ et $C_i\leftrightarrow C_j$. La matrice $P_\sigma A$ s'obtient en permutant les lignes de A ; la i-ième ligne de $P_\sigma A$ est la $\sigma^{-1}(i)$-ième ligne de A. La matrice AP_σ s'obtient en permutant les colonnes de A : la j-ième colonne de AP_σ est la $\sigma(j)$-ième colonne de A.

15 Soit $i,j\in[\![1\,;\,n]\!]$. La matrice $UP_{\sigma'}$ s'obtient en permutant les colonnes de U : la j-ième colonne de $UP_{\sigma'}$ est la $\sigma'(j)$-ième colonne de U. De même, la matrice $P_\sigma V$ s'obtient en permutant les lignes de V ; la i-ième ligne de $P_\sigma V$ est la $\sigma^{-1}(i)$-ième ligne de V. Ainsi les coefficients d'indice (i,j) de $UP_{\sigma'}$ sont nuls pour $i>\sigma'(j)$. Or le coefficient d'indice $(\sigma(j),j)$ de $P_\sigma V$, qui est le coefficient d'indice (j,j) de V n'est pas nul car V est inversible. On en déduit que pour tout $j\in[\![1\,;\,n]\!]$, $\sigma(j)\leqslant\sigma'(j)$. De manière analogue, on montre que pour tout $i\in[\![1\,;\,n]\!]$, on a $\sigma'(i)\leqslant\sigma(i)$ donc $\sigma=\sigma'$.

16 a) Soit A une matrice inversible. Montrons qu'il existe une matrice U triangulaire supérieure unipotente, une matrice V triangulaire supérieure et une matrice de permutation (et non de transposition) P_σ telles que $A = UP_\sigma V$. Comme $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1\,;\,n]\!]}$ est inversible, l'un au moins des coefficients de sa première colonne n'est pas nul. Soit $i_1 = \max\{k \in [\![1\,;\,n]\!],\ a_{k,1} \neq 0\}$. On effectue pour tout $i \in [\![1\,;\,i_1]\!]$ l'opération $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{i_1,1}} L_{i_1}$ en multipliant à gauche par une matrice triangulaire supérieure unipotente (obtenue comme produit de matrices de transvections). On effectue $C_1 \leftarrow \frac{1}{a_{i_1,1}} C_1$ puis pour $j \in [\![2\,;\,n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j - a_{i_1,j} C_1$ ce qui se fait en multipliant à droite par des matrices triangulaires supérieures (produit de matrices de transvections et de dilatation). On obtient alors une matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \star \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix}$$

On recommence ce type d'opérations sur les colonnes suivantes. On remarque que $i_2 = \max\{k \in [\![1\,;\,n]\!],\ a_{k,2} \neq 0\} \neq i_1$. Après le traitement de la dernière colonne, on obtient une matrice de permutation ne contenant qu'un seul « 1 »par ligne et par colonne.Ceci prouve que $U'AV' = P_\sigma$ avec U' et V' respectivement triangulaire supérieure unipotente et triangulaire supérieure car produits de telles matrices. Ainsi $A = UP_\sigma V$.

Remarque : Comme V est obtenue comme produit de matrices de dilatation et de transvection, c'est une matrice inversible. Ceci explique pourquoi, dans la question suivante et dans l'inclusion annoncée dans l'énoncé $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \subset \bigcup_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} T_n^+(\mathbb{K}) P_\sigma T_n^+(\mathbb{K})$, on ne fait intervenir que des matrices triangulaires supérieures *inversibles*.

b) Si $UP_\sigma V = U'P_{\sigma'}V'$ avec U, U', V, V' triangulaires supérieures inversibles, alors $P_{\sigma'}^{-1} U'^{-1} U P_\sigma = V'V^{-1}$. D'après la question 3.1.4 on a donc $\sigma = \sigma'$ car $U'^{-1}U$ et $V'V^{-1}$ sont triangulaires supérieures inversibles.

17 Si $c = 0$ on obtient

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Sinon on suit l'algorithme décrit à la question précédente et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & -c^{-1} \end{pmatrix}$$

Détail de l'algorithme, en notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lorsque $c \neq 0$:

a) Annuler la première sur colonne en effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{a}{c} L_2$. On a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$$

le coefficient en haut à droite de cette matrice est $b - \frac{ad}{c} = -\frac{1}{c}$ car $ad - bc = 1$.

b) Effectuer les opérations $C_1 \leftarrow \frac{1}{c} C_1$, puis $C_2 \leftarrow C_2 - dC_1$ qui donnent

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Enfin, $C_2 \leftarrow -cC_2$ donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) On en déduit que

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & d \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Puis la décomposition voulue en inversant les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{c} & d \\ 0 & -c \end{pmatrix}$

18 a) Si A satisfait la propriété $(\mathbf{E}_1)$, alors A est le produit de deux matrices inversibles, donc est inversible. Si A satisfait la propriété $(\mathbf{E}_2)$, alors tous les mineurs principaux de A sont non nuls, en particulier le mineur d'ordre n, autrement dit $\det(A) \neq 0$ et A est inversible.

b) Soit A une matrice satisfaisant la propriété $(\mathbf{E}_1)$. On écrit $A = UV$ avec $U \in T_n^-(\mathbb{C})$ et $V \in T_n^+(\mathbb{C})$. Soit $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$. On écrit par blocs :

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ U_2 & U_3 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ 0 & V_3 \end{pmatrix}$$

où $U_1 \in T_k^-(\mathbb{C})$, $U_3 \in T_{n-k}^-(\mathbb{C})$, $V_1 \in T_k^+(\mathbb{C})$ et $V_3 \in T_{n-k}^+(\mathbb{C})$. Alors

$$A = UV = \begin{pmatrix} U_1V_1 & U_1V_2 \\ U_2V_1 & U_2V_2 + U_3V_3 \end{pmatrix}$$

Ceci montre que le k-ème mineur principal de A est $\det(U_1V_1) = \det(U_1)\det(V_1) \neq 0$.

c) Si $n = 1$ il n'y a rien à montrer. Soit $n \geqslant 2$. Supposons que l'implication $(\mathbf{E}_2) \Rightarrow (\mathbf{E}_1)$ est vraie pour toutes les matrices d'ordre au plus $n-1$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dont tous les mineurs principaux sont non nuls. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & a \end{pmatrix}$$

où $A_1 = U_1V_1$ avec $U_1 \in T_{n-1}^-(\mathbb{C})$ et $V_1 \in T_{n-1}^+(\mathbb{C})$. On cherche $U \in T_n^-(\mathbb{C})$ et $V \in T_n^+(\mathbb{C})$ par blocs, sous la forme

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ B & b \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} V_1 & C \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

vérifiant $A = UV$, autrement dit $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et :

$$\begin{cases} U_1V_1 & = A_1 \\ U_1C & = A_2 \\ BV_1 & = A_3 \\ BC + bc & = a \end{cases}$$

Les mineurs principaux de A_1 sont non nuls, on sait donc par hypothèse qu'il existe U_1 et V_1 tels que $U_1V_1 = A_1$ avec U_1 triangulaire inférieure et V_1 triangulaire supérieure inversibles d'ordre $n-1$. Ces matrices U_1 et V_1 étant inversibles, le système $U_1X = A_2$ admet une unique solution $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et le système ${}^tV_1\,{}^tY = {}^tA_3$ admet une unique solution $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$. Si l'on pose $b = 1$ et $c = a - BC$ on a trouvé une décomposition $A = UV$ satisfaisant les conditions cherchées.

Remarquons que le choix de $b = 1$ permet de montrer que l'on peut imposer par exemple à la matrice triangulaire inférieure de n'avoir que des 1 sur sa diagonale.

19 Les applications ϕ_k introduites par l'énoncé sont des fonctions polynomiales en les coefficients de A, donc continues. Les matrices satisfaisant la relation $(\mathbf{E}_2)$ sont les éléments de l'ensemble $\bigcap_{k=1}^{n} \varphi_k^{-1}(\mathbb{C}^*) \subset \varphi_n^{-1}(\mathbb{C}^*) = \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{C}^*$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, et que les φ_k sont continues, les $\varphi_k^{-1}(\mathbb{C}^*)$ sont des ouverts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; on a donc une intersection finie d'ouverts de $GL_n(\mathbb{C})$, c'est un ouvert de l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

20 a) On remarque que $\tau \circ \tau = \mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}$, donc que $P_\tau^{-1} = P_{\tau^{-1}} = P_\tau$. Soit $T \in T_n^+(\mathbb{C})$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est T. Alors la matrice de $P_\tau T P_\tau$ est celle de f dans la base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_{\tau(1)}, \ldots, \varepsilon_{\tau(n)})$. Soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Alors, en posant $i = n - j + 1$, on a $f(\varepsilon_{\tau(k)}) = f(\varepsilon_{n-k+1}) = \sum\limits_{j=1}^{n-k+1} t_{j,n-k+1}\varepsilon_j = \sum\limits_{i=k}^{n} t_{n-i+1,n-k+1}\varepsilon_{\tau(i)}$, ce qui montre que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est triangulaire inférieure, et reste inversible puisque T l'était. Ceci prouve que $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau \subset T_n^-(\mathbb{C})$. De manière analogue, on montre que $P_\tau T_n^-(\mathbb{C}) P_\tau \subset T_n^+(\mathbb{C})$ et donc que $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau = T_n^-(\mathbb{C})$.

b) D'après la question a), $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau = T_n^-(\mathbb{C})$ donc $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) = T_n^-(\mathbb{C}) T_n^+(\mathbb{C})$. D'après les questions 18 c) et 3.1.4, cet ensemble est un ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

c) De manière analogue à la question précédente, on utilise le fait que $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) = T_n^-(\mathbb{C}) T_n^+(\mathbb{C})$. On raisonne alors de la même manière que pour prouver la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $A^{(k)} = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1\,;\,k]\!]}$ les matrices extraites à considérer. Le spectre S_k des $A^{(k)}$ est fini donc leur réunion $S = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$ aussi. Comme A est inversible, 0 n'est pas dans le spectre de A, donc S est un ensemble fini de complexes non réduit à $\{0\}$. On peut donc considérer $\lambda = \min\{|s|\,,\ s \in S \setminus \{0\}\}$. Dans ce cas, pour tout $p > \frac{1}{\lfloor|\lambda|\rfloor}$, on a $A - \frac{1}{p} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui satisfait la condition $(\mathbf{E}_2)$. On a ainsi exhibé une suite de matrices de $T_n^-(\mathbb{C}) T_n^+(\mathbb{C})$ qui converge vers A.

d) L'application $A \mapsto P_\tau A$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, $A \mapsto P_\tau A$ est continue. Cette application est de plus clairement involutive, donc bijective et de réciproque continue. C'est un homéomorphisme.

e) Comme l'application $A \mapsto P_\tau A$ est un homéomorphisme, $T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. D'après la question 3.1.4, l'ensemble $\bigcup_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \neq \tau}} T_n^+(\mathbb{C}) P_\sigma T_n^+(\mathbb{C})$ est son complémentaire dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et c'est donc un fermé d'intérieur vide.

Partie IV : décomposition de Bruhat et drapeaux

21 On définit bien ainsi une action car si $(e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} \in \Delta$, on a $\mathrm{Id}_E \cdot (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} = (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ et si $g, h \in \mathrm{GL}(E)$, alors $g \cdot (h \cdot (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}) = (g \circ h) \cdot (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$.

Soit $g \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $g \cdot (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} = (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ alors l'application linéaire g admet la matrice I_n pour matrice dans la base $(e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ donc $g = \mathrm{Id}_E$. Tous les stabilisateurs sous l'action sont réduits au neutre : l'action est fidèle.

Soit $(e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ et $(\varepsilon_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ deux bases de E. On sait qu'il existe un automorphisme de E qui envoie la base $(e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ sur la base $(\varepsilon_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$. Ceci montre que l'action définie dans cette question est transitive.

22 On vérifie ici aussi que l'on définit bien une action de groupe, en particulier que si $g \in \mathrm{GL}(E)$ et $(E_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} \in \mathcal{D}$, alors $(g(E_i))_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} \in \mathcal{D}$.

Soit $(E_i)_{i \in [\![0\,;\,n]\!]}, (F_i)_{i \in [\![0\,;\,n]\!]} \in \mathcal{D}$. On vérifie de même qu'à la question précédente qu'il existe $g \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $g \cdot (E_i)_{i \in [\![0\,;\,n]\!]} = (F_i)_{i \in [\![0\,;\,n]\!]}$ en considérant l'automorphisme qui envoie une base adaptée sur une base adaptée, ce qui donne à la fois la transitivité et la compatibilité des actions.

23 Soit g un automorphisme élément du stabilisateur de $\delta(B_0)$.

Comme pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on a g qui laisse stable $\operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i)$, la matrice de g dans la base B_0 est triangulaire supérieure et inversible car g l'est. Réciproquement, si g est un automorphisme dont la matrice est triangulaire dans la base B_0, alors g stabilise $\delta(B_0)$, par compatibilité des actions sur $\mathcal{D}$ et sur Δ.

24 La relation $\mathcal{R}$ est

— Réflexive : soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $M^{-1}M = I_n \in T_n^+(\mathbb{K})$.

— Symétrique : soit $M, N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Si $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbb{K})$, alors $N^{-1}M = (M^{-1}N)^{-1} \in T_n^+(\mathbb{K})$.

— Transitive : soit $M, N, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Si $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbb{K})$ et $N^{-1}P \in T_n^+(\mathbb{K})$, alors $M^{-1}NN^{-1}P = M^{-1}P \in T_n^+(\mathbb{K})$.

25 a) C'est une conséquence de la question 3.1.4 : Si M et N sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sont telles que $\overline{M} = \overline{N}$, alors il existe une matrice triangulaire supérieure inversible T telle que $N = MT$. Alors $N \cdot \delta(B_0) = M \cdot T \cdot \delta(B_0) = M \cdot \delta(B_0)$.

b) Comme on l'a vu, l'application $M \mapsto M \cdot (\delta(B_0))$ définie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est surjective car l'action est transitive (question 3.1.4). Le passage au quotient φ rend cette application injective d'après la question 3.1.4 : si $\varphi(\overline{M}) = \varphi(\overline{N})$, alors $M^{-1}N \cdot \delta(B_0) = \delta(B_0)$ et $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbb{K})$ donc $\overline{M} = \overline{N}$.

L'application φ est donc injective et surjective.

26 On a pour $X, Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(\overline{XY}) = (XY) \cdot \delta(B_0) = X \cdot (Y \cdot \delta(B_0)) = X \cdot \varphi(\overline{Y})$.

27 Soit $X, Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et U, V deux matrices triangulaires supérieures inversibles, P_σ une matrice de permutation, telles que $X^{-1}Y = UP_\sigma V$. On a en utilisant le fait que l'on travaille dans le quotient par $T_n^+(\mathbb{K})$:

$$(\overline{X}, \overline{Y}) = X \cdot (\overline{I_n}, \overline{X^{-1}Y}) = X \cdot (\overline{I_n}, \overline{UP_\sigma V}) = XU \cdot (\overline{U^{-1}}, \overline{P_\sigma V}) = XU \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$$

Si de plus il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ tels que

$$(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}) = A \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_{\sigma'}}) = (\overline{A}, \overline{AP_{\sigma'}})$$

alors $A \in T_n^+(\mathbb{K})$ et il existe T une matrice triangulaire supérieure telle que $AP_{\sigma'} = P_\sigma T$. Comme la permutation de la décomposition de Bruhat est unique (ou en invoquant directement la question 15), on en déduit que $\sigma = \sigma'$.

28 On vient de montrer que pour tout $(\overline{X}, \overline{Y}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K})$ il existait un unique couple $(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$ dans l'orbite de $(\overline{X}, \overline{Y})$ sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Ainsi, l'ensemble des orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K})$ est en bijection avec $\{(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}),\ \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ donc possède $n!$ éléments.

3.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/71/4/s2020_agreg_interne_math_2_1239714.pdf

3.2.1 Présentation du sujet

Le sujet a pour objectif principal l'étude de la différentiabilité de l'application distance à un fermé en dimension finie, avec notamment le fait qu'à l'extérieur, l'application est différentiable en x si et seulement si $d(x, F)$ est atteinte en un unique point du fermé.
Le sujet est progressif et commence par des résultats classiques sur cette distance et sur la projection sur un convexe fermé.
On étudie ensuite la dimension 1, d'abord sur des exemples, puis de manière plus générale, en utilisant la structure des ouverts de $\mathbb{R}$.
On étudie ensuite des exemples en dimension n, avant de traiter le cœur du problème dans les parties 5 et 6. Ces parties sont plus délicates. Les exemples permettent également d'étudier le problème sur le bord de la partie.

3.2.2 Remarques générales

Le sujet est un problème de calcul différentiel, mais couvre une partie importante du programme d'analyse. La majeure partie des candidats traite principalement les deux premières parties.

3.2.3 Commentaires par questions

Partie I

1. La borne inférieure n'est pas atteinte a priori (c'est l'objet de la question 3). Beaucoup de candidats proposent des démonstrations fausses consistant à écrire :
   « $d_F(x) = 0 \iff \inf\limits_{f \in F} ||x - f|| = 0 \iff ||x - f|| = 0$ ». À ce stade du problème, la proposition $\forall x \in E,\, d_F(x) = 0 \iff x \in \overline{F}$ doit être démontrée. Si on a montré que, pour tout vecteur f de F, $||x - f|| > \varepsilon$, alors on ne peut qu'en déduire que $d(x, F) \geqslant \varepsilon$ (on perd l'inégalité stricte a priori. La conservation de l'inégalité stricte demanderait une justification soigneuse). Si $d(x, F) = 0$, il est faux d'affirmer que toute suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de points de F converge vers x.

2. (a) On ne peut pas utiliser le fait que la borne inférieure est atteinte, puisqu'il s'agit de l'objet de la question 3. La borne inférieure n'est pas *le plus petit* des minorants (qui n'existe pas !). La définition de fonction lipschitzienne n'est pas toujours connue.
   En général, il est faux d'écrire que $\inf\limits_{x \in A}(f(x) + g(x)) \leqslant \inf\limits_{x \in A} f(x) + \inf\limits_{x \in A} g(x)$ (prendre $A = [-1, 1]$, $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto -x$).

   (b) Comme dans la question précédente, le raisonnement doit être complet ici. Il est faux de soustraire des inégalités. On ne peut pas « majorer dans les valeurs absolues » ni « appliquer la valeur absolue » à une inégalité, puisque $x \mapsto |x|$ n'est pas croissante. On rappelle que pour une fonction k-lipschitzienne, la constante k ne peut pas être prise dans un corps quelconque. La valeur absolue est souvent oubliée : beaucoup de candidats utilisent la simple inégalité $\forall (x, y) \in E^2, d_F(x) - d_F(y) \leqslant ||x - y||$ pour conclure.

3. (a) Certains candidats montrent que K est fermé et borné, mais ne concluent pas. $\varnothing$ est fermé. Certains candidats pensent que l'intersection de deux parties non vide est toujours non vide. Pour pouvoir affirmer qu'un fermé borné est compact, il convient de rappeler que c'est une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. F n'est pas bornée a priori.

   (b) Peu de candidats ont compris qu'il s'agissait de passer du minimum sur K au minimum global. Rappelons qu'une fonction réelle continue n'atteint sa borne inférieure sur un compact que si ce dernier est non vide. Beaucoup de candidats ont voulu montrer que d_F admet un minimum sur K.

4. (a) Beaucoup trop de candidats écrivent que $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||\,||v||$. Une démonstration géométrique est peu convaincante. Il convient de respecter la notation du produit scalaire de l'énoncé. On ne peut pas effectuer le calcul comme si u et v étaient des nombres réels.

(b) Certains candidats utilisent l'inégalité triangulaire et obtiennent une inégalité large, sans pouvoir conclure ou concluent en affirmant que l'inégalité est stricte puisque $f \neq f'$, ce qui n'est pas évident. Beaucoup de candidats écrivent que $\forall (u,v) \in E^2$, $||u+v||^2 \leqslant ||u||^2 + ||v||^2$. Il faut préciser que $\frac{1}{2}(f+f') \in F$, car F est supposée convexe.
Attention à la nature des objets mathématiques manipulés : écrire que $\Gamma(x)^2 \leqslant d_F(x)^2$ n'a pas de sens puisque que $\Gamma(x)$ est un ensemble.
Peu de candidats pensent à rappeler que $\Gamma(x)$ est effectivement non vide avant de conclure que c'est un singleton. Attention au fait que $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante.

(c) i. $\varphi(t)$ n'est ni une fonction ni un polynôme, mais un nombre réel. Certains candidats trouvent un polynôme dont les coefficients dépendent de l'indéterminée ou un polynôme en « x ».

ii. Beaucoup de candidats montrent que φ admet un minimum en regardant le signe du coefficient dominant. Or l'existence du minimum n'a rien à voir avec cela (on travaille sur le segment $[0,1]$). Une fonction dérivable admettant un minimum local en 0 n'est pas nécessairement croissante sur un voisinage de 0 à droite (penser à la fonction $x \mapsto x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0).
Attention à la nature des objets mathématiques manipulés : l'inégalité $0 \leqslant (f-\pi(x))t \leqslant f-\pi(x)$ n'a pas de sens, puisque $f-\pi(x)$ est un vecteur.
Certains souhaitent utiliser les variations d'une fonction polynômiale de degré 2, mais considèrent que la courbe représentative d'une telle fonction est toujours une parabole directe (une justification est attendue ici). Les raisonnements de ce type étaient en général très imprécis et les arguments indispensables n'ont pas été assez mis en avant.

(d) Question peu abordée.

Partie II

5. Beaucoup de candidats sont mal à l'aise avec le fait que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $d_{\{0\}}(x) = x$ et que pourtant $d_{\{0\}}$ ne soit pas dérivable en 0. C'est une illustration du fait que l'on ne dérive pas une expression de x, mais bien une fonction. Beaucoup de candidats ont du mal à montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. Il suffit, pour cela, d'étudier les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement en 0. L'étude des limites à gauche et à droite de la dérivée est possible, mais requiert par exemple l'usage du théorème de la limite de la dérivée. Il existe des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'a pas de limite en 0 (par exemple $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0). Beaucoup de candidats conservent l'écriture avec la norme sans passer à la valeur absolue : il subsiste alors un doute quant à la compréhension de la nature de $d_{\{0\}}$. On rappelle que $0 \in \mathbb{R}_+$ et $0 \in \mathbb{R}_-$. Attention, la notation $d'_{\{0\}}(0^+)$ ne désigne pas a priori la dérivée à droite en 0, mais la limite à droite en 0 de la dérivée. Il ne faut pas dire que $d_{\{0\}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour ensuite dire qu'elle n'est pas dérivable en 0. Dire qu'une fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ n'implique pas qu'elle n'est pas dérivable en 0. Certains candidats pensent que $d'_{\{0\}}$ admet un point de discontinuité en 0, ce qui n'est pas le cas (la situation est analogue à $x \mapsto \frac{1}{x}$).

6. Plusieurs candidats écrivent qu'une réunion de fermés est un fermé, ce qui est manifestement faux, puisque toute partie de $\mathbb{R}$ est une réunion de singletons et qu'un singleton est fermé. Plusieurs candidats justifient que $\mathbb{Z}$ est fermé par l'argument "toutes ses parties finies sont fermées". L'argument est incorrect, puisque c'est le cas pour toutes les parties de $\mathbb{R}$. Une réunion dénombrable de fermés n'est généralement pas fermée (penser à $\mathbb{Q}$). La majorité des parties de $\mathbb{R}$ ne sont ni ouvertes ni fermées. Certains candidats écrivent que $d_{\mathbb{Z}}$ est continue en tout point de $\mathbb{Z}$, car sa restriction à $\mathbb{Z}$ est constante et donc continue. Mais toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est continue en restriction à $\mathbb{Z}$, puisque $\mathbb{Z}$ est discret, mais n'est généralement pas continue en tout point de $\mathbb{Z}$ (on peut penser à l'indicatrice de $\mathbb{Q}$). Beaucoup de candidats « passent à la limite » dans une fonction sans se préoccuper de la continuité de la fonction au point limite. Or, la fonction partie entière n'est pas continue en tout point, donc on ne peut pas déduire directement de $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \lfloor x_n \rfloor$ que $a = \lfloor a \rfloor$ et donc que a est entier (on peut

raisonner par l'absurde, car si a n'est pas entier, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en a). On rappelle qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert ; il n'est pas nécessaire de préciser que la réunion est dénombrable. Éviter de noter $\overline{\mathbb{Z}}$ le complémentaire de $\mathbb{Z}$, surtout dans une question demandant de montrer que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. Enfin, $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ n'est pas dense dans $\mathbb{Z}$.

7. $\forall f \in \mathbb{Z}, f \in \mathbb{Z} \iff f-1 \in \mathbb{Z}$ ne suffit pas à assurer que $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f \mapsto f-1$ est surjective (penser à $\forall n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \iff n+1 \in \mathbb{N}$). Beaucoup de candidats semblent penser que pour montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique, il est nécessaire de montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+kT) = f(x)$. On relève l'utilisation d'une formule fausse $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$. On attend une démonstration de la formule $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. Beaucoup de candidats affirment sans démonstration que $\forall x \in \mathbb{R}, d_{\mathbb{Z}}(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x)$ ou que l'entier le plus proche d'un réel x est $\lfloor x \rfloor$ ou $\lfloor x \rfloor + 1$. Un dessin ne constitue pas une démonstration. Le fait que $d_{\mathbb{Z}}$ soit 1-périodique ne dépend pas de x. Attention, si une fonction n'est pas impaire, elle n'est pas automatiquement paire.

8. Comme dans la question 7, le fait que l'entier le plus proche de x soit 0 ou 1 doit être (rapidement) justifié. On s'attend à ce que le dessin de $d_{\mathbb{Z}}$ ne soit pas grossièrement contradictoire avec ce qui a été démontré en début de problème. Certains candidats oublient la périodicité de la question précédente.

9. Attention, l'utilisation des limites de la dérivée requiert l'usage d'un théorème avec ses hypothèses. Des candidats confondent la limite du taux d'accroissement et la limite de la dérivée. Attention au fait qu'ici, on demande la dérivabilité en tout point de $[0, 1[$, pas la dérivabilité de la restriction à $[0, 1[$. $d_{\mathbb{Z}}$ n'est pas dérivable en 0. Une fonction affine par morceaux n'est généralement pas dérivable en tout point, même si elle est continue. La proposition « une fonction continue est dérivable » est grossièrement fausse. Certains candidats parlent « d'union de fonction dérivables ». On rappelle que le mot « composée » fait référence à la loi $\circ$ et que la fonction valeur absolue n'est pas la composée de $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$.

10. (a) Question peu traitée. L'expression des coefficients de Fourier est peu connue. Un simple changement de variable permet de retrouver les coefficients de Fourier d'une fonction T-périodique à partir des coefficients de Fourier d'une fonction 2π-périodique. Le 2 est souvent oublié. Le coefficient 2π est parfois oublié ou mal placé.

    (b) Certains candidats montrent que la série de Fourier converge normalement de manière directe à l'aide du calcul précédent, mais oublient de justifier que la somme est bien égale à $d_{\mathbb{Z}}$. Il existe des fonctions continues périodiques dont la série de Fourier diverge. Quand on divise par un entier n, il convient de traiter à part le cas où $n = 0$.

    (c) Les constantes multiplicatives sont nécessaires dans les équivalents.Ainsi, il est faux d'affirmer que $\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. L'assertion $\sum \frac{1}{(2n+1)^2} \sim \sum \frac{1}{4n^2}$ n'a pas de sens. Les sommes de deux séries à termes positifs équivalents ne sont en général pas égales. La positivité d'un terme général est souvent oubliée. Rappelons que $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$ et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, alors que $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ diverge. Plusieurs candidats confondent le critère de convergence de Riemann et celui de d'Alembert. Dans une expression du type $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots$, n est muet, donc la somme n'en dépend pas. En particulier, elle ne peut pas dépendre de la parité de n.

11. (a) La réflexivité n'est pas évidente et découle du fait que Ω est ouvert. Pour la transitivité, de nombreux candidats prennent le même intervalle pour les couples (x, y) et (y, z).

    (b) Certains candidats pensent que la classe d'un réel x est égale à n'importe lequel des intervalles $]a, b[$ de la définition. Peu le décrivent comme la réunion de tels intervalles. Parmi eux, certains l'affirment sans le démontrer. Lorsque l'énoncé demande explicitement de montrer que les intervalles sont disjoints, « c'est évident » n'est pas une réponse acceptable. Le fait que les classes d'équivalence sont deux à deux disjointes ne vient pas seulement de la transitivité (car sinon, ce serait vrai pour les relations d'ordre). Certains candidats affirment qu'un fermé de $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles fermés deux à deux disjoints, ce qui est faux et inutile ici. Certains candidats se contentent de dire que le résultat est vrai car Ω est ouvert et qu'une réunion d'ouverts est un ouvert.

(c) L'ensemble I et la famille $((a_i, b_i))_{i \in I}$ sont très rarement définis. La majorité des candidats se contente d'affirmer sans justification le caractère fini ou dénombrable.

12. (a)

    (b) Question peu abordée.

13. Il ne suffit pas de dire que $d_F(x) = 0$ pour affirmer que d_F est dérivable en x et que $d_F'(x) = 0$, mais bien de dire que d_F est nulle sur un voisinage de x. Par exemple, $f : x \mapsto x$ vérifie $f(0) = 0$ et pourtant $f'(0) = 1 \neq 0$ et $g : x \mapsto |x|$ vérifie $g(0) = 0$ et g n'est pas dérivable en 0. De manière générale, on rappelle que l'on ne dérive pas $f(x)$ mais f.

14. (a) i. Certains candidats utilisent le fait que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \geqslant 0$, ce qui est insuffisant. Certains candidats utilisent le fait que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour montrer que 0 est adhérent à Ω, mais $\forall n \geqslant 2, \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \notin \Omega$. Certains candidats pensent à tort que $\Omega = \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

    iv. Le théorème d'encadrement est rarement cité et la minoration par 0 est souvent omise.

Partie III

15. (a) De nombreux candidats concluent que $\Gamma(x) = x_0$ au lieu de $\Gamma(x) = \{x_0\}$.

    (b) Parfois, les calculs sont menés comme si $E = \mathbb{R}$, avec notamment h (élément de E) en dehors du produit scalaire. « h petit » n'est pas une notion bien définie.

    (c) On rappelle que $\sqrt{\cdot}$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition. On rappelle également qu'elle ne peut être dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puisqu'elle n'est pas définie sur cet ensemble.

16.

17. (a) Le dessin proposé doit être de qualité raisonnable. Il faut notamment éviter que la parabole soit grossièrement dissymétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Un élément de $\mathbb{R}^2$ est un couple de réels, égal à son couple de coordonnées dans la base canonique. On peut donc utiliser le signe = entre les deux.

    (b) Écrire le complémentaire de F et affirmer que ce dernier est ouvert sans le justifier (ce qui n'est pas plus simple à faire) ne rapporte pas de point. La fonction $(x, y) \mapsto y - x^2$ n'est clairement pas linéaire. Beaucoup affirment que F est la réunion de deux fermés, sans justifier le caractère fermé des deux ensembles.

    (c) Affirmer sans démonstration que $\mathrm{Fr}(F)$ est la réunion d'une parabole et de l'axe des abscisses ne rapporte pas de point.

Partie IV

18. (a)

    (b) Beaucoup de candidats raisonnent en dimension 3. Rappelons que dans ce cas, il n'existe pas de plans orthogonaux.

    (c)

Partie V

25. (b) On ne peut pas remplacer a par x ici.

Partie VI

28. (b) i. Beaucoup de candidats traitant la question oublient de vérifier que le coefficient du terme de degré 2 est effectivement non nul pour montrer qu'il s'agit bien d'un polynôme de degré 2.

29. (a) Question sans difficulté particulière.

3.2.4 Éléments de correction

Partie I

1. Soit $x \in E$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $d_F(x) = \inf\limits_{f \in F} \|x - f\| = 0$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists f \in F, \|x - f\| \leqslant \varepsilon$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $f_n \in F$ tel que $\|x - f_n\| \leqslant \frac{1}{n}$.
La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc vers x et $x \in \overline{F}$. Ainsi, $x \in F$, puisque F est fermée.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $x \in F$. Alors,

$$0 \leqslant \inf_{f \in F} \|x - f\| \underset{\text{car } x \in F}{\leqslant} \|x - x\| = 0$$

Donc, $d_F(x) = 0$.

2. (a) Soient $(x, y) \in E^2$ et $f \in F$. Alors,

$$d_F(y) = \inf_{g \in F} \|x - g\| \leqslant \|y - f\| \leqslant \|y - x\| + \|x - f\|$$

(b) Comme $\forall f \in F, \|x - f\| \geqslant d_F(y) - \|y - x\|$, par passage à la borne inférieure (qui est le plus grand des minorants),

$$d_F(x) = \inf_{f \in F} \|x - f\| \geqslant d_F(y) - \|y - x\|$$

Ceci étant vrai quels que soient x et y, en les échangeant, on obtient :

$$d_F(y) \geqslant d_F(x) - \|x - y\| = d_F(x) - \|y - x\|$$

Donc,

$$d_F(y) - d_F(x) \leqslant \|y - x\| \quad \text{et} \quad d_F(x) - d_F(y) \leqslant \|y - x\|$$

Ainsi, $|d_F(y) - d_F(x)| \leqslant \|y - x\|$.

3. (a) Comme $\|x_0 - x\| = r \leqslant r$, $x_0 \in \overline{B}(x, r)$ et $x_0 \in F$ par hypothèse. Ainsi, $x_0 \in K$. Donc, *K est non vide.*

Par ailleurs, K *est fermée* comme intersection de parties fermées et *bornée*, car incluse dans la partie bornée $\overline{B}(x, r)$. C'est donc *une partie compacte de E*, puisque E est un $\mathbb{R}-e.v.n.$ de dimension finie.

(b) D'après la question précédente, K est une partie compacte non vide de E. Donc, comme la fonction réelle $y \mapsto \|x - y\|$ est continue, elle admet un minimum sur K.

Soit $f_0 \in F$ réalisant ce minimum. Alors, pour tout $f \in F$,

- si $\|x - f\| \leqslant r$, $f \in K$, donc $\|x - f\| \geqslant \|x - f_0\|$;
- si $\|x - f\| > r$, comme $r = \|x - x_0\|$ et $x_0 \in K$, $\|x - f\| > \|x - x_0\| \geqslant \|x - f_0\|$;

donc, dans tous les cas, $\|x - f\| \geqslant \|x - f_0\|$. Ainsi, $f_0 \in \Gamma(x)$ et $\Gamma(x) \neq \varnothing$.

4. (a) Soit $(u,v) \in E^2$.

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \left\|v^2\right\| + 2\langle u,\, v\rangle$$

et

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \left\|v^2\right\| - 2\langle u,\, v\rangle$$

donc

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \left\|v^2\right\|\right)$$

(b) On applique ce qui précède à $u := \frac{1}{2}(f-x)$ et $v := \frac{1}{2}(f'-x)$. Compte tenu de ce que $\|u\| = \|v\| = \frac{1}{2}d_F(x)$ puisque $f \in \Gamma(x)$ et $f' \in \Gamma(x)$, on obtient

$$\left\|\frac{1}{2}\left(f+f'\right) - x\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}\left(f-f'\right)\right\|^2 = 2\left(\frac{1}{4}d_F(x)^2 + \frac{1}{4}d_F(x)^2\right) = d_F(x)^2$$

Or, $\left\|\frac{1}{2}\left(f-f'\right)\right\|^2 = \frac{1}{4}\left\|f-f'\right\|^2 > 0$, puisque $f \neq f'$. Donc,

$$\left\|\frac{1}{2}\left(f+f'\right) - x\right\|^2 < d_F(x)^2$$

Ainsi, par stricte croissante de $\sqrt{\cdot}$, on en déduit que $\left\|\frac{1}{2}\left(f+f'\right) - x\right\| < d_F(x)$, ce qui est absurde puisque comme F est convexe, $\frac{1}{2}\left(f+f'\right) \in F$ et $d_F(x) = \inf\limits_{g\in F}\|x-g\|$. Donc, $f = f'$ et $\Gamma(x)$ *est un singleton* (puisqu'il est non vide).

(c) i. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$\varphi(t) = \|t(f-\pi(x)) + \pi(x) - f\|^2 = \|f-\pi(x)\|^2 t^2 + 2\langle f-\pi(x),\, \pi(x)-x\rangle t + \|\pi(x)-x\|^2$$

φ est donc la restriction à $[0,1]$ d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

ii. Comme, pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)\pi(x) + tf \in F$ (puisque F est convexe),

$$\varphi(t) = \|(1-t)\pi(x) + tf - x\|^2 \geqslant \|\pi(x)-x\|^2 \geqslant \varphi(0)$$

Ainsi, *φ admet un minimum en 0.*
Si $\varphi'(0) < 0$, alors $\varphi(t) - \varphi(0) \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\sim} t\varphi'(0)$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]0,\alpha]$, $\varphi(t) < \varphi(0)$, ce qui contredit le point précédent.
Donc, $\varphi'(0) \geqslant 0$, c'est à dire $2\langle f-\pi(x),\, \pi(x)-x\rangle \geqslant 0$, d'où

$$\langle f-\pi(x),\, x-\pi(x)\rangle \leqslant 0$$

(d) Pour tout $f \in F$,

$$\|x-f\|^2 = \|x-z\|^2 + \|z-f\|^2 - 2\underbrace{\langle x-z,\, f-z\rangle}_{\leqslant 0} \geqslant \|x-z\|^2$$

donc

$$\|x-f\| \geqslant \|x-z\|$$

Ainsi, $\|x-z\| = d_F(x)$ et $z = \pi(x)$ par unicité.

Partie II

5. $\forall x \in \mathbb{R}, d_{\{0\}}(x) = |x|$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, d_0'(t) = \frac{t}{|t|} = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

$d_{\{0\}}$ n'est pas dérivable en 0, puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{d_{\{0\}}(x) - d_{\{0\}}(0)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ \frac{d_{\{0\}}(x) - d_{\{0\}}(0)}{x} = -1$$

donc

$$\frac{d_{\{0\}}(x) - d_{\{0\}}(0)}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \frac{d_{\{0\}}(x) - d_{\{0\}}(0)}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x < 0}}{\longrightarrow} -1 \neq 1$$

6. $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$ est ouvert comme union d'ouverts, donc $\mathbb{Z} = \mathbb{R} \backslash \left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[\right)$ *est bien un fermé.*

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{Z}}(x+1) &= \inf \{ |x + 1 - k| \, , k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \inf \{ |x - l| \, , l \in \mathbb{Z} \} \ \text{ puisque } \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ k & \longmapsto & k-1 \end{array} \text{ est surjective.} \\ &= d_{\mathbb{Z}}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $d_{\mathbb{Z}}$ *est 1-périodique.*

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{Z}}(-x) &= \inf \{ |-x - k| \, , k \in \mathbb{Z} \} = \inf \{ |x + k| \, , k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \inf \{ |x - l| \, , l \in \mathbb{Z} \} \ \text{ puisque } \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ k & \longmapsto & -k \end{array} \text{ est surjective.} \\ &= d_{\mathbb{Z}}(x) \end{aligned}$$

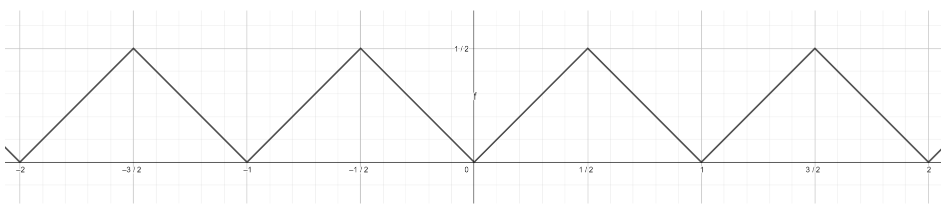
Ainsi, $d_{\mathbb{Z}}$ *est paire.*

8. Soit $x \in [0, 1[$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

- si $k \geqslant 1$, $|x - k| = k - x \geqslant 1 - x \geqslant \min(x, 1 - x)$;
- si $k \leqslant 0$, $|x - k| = x - k \geqslant x \geqslant \min(x, 1 - x)$.

Donc, $d_{\mathbb{Z}}(x) \geqslant \min(x, 1-x)$. Par ailleurs, $|x - 0| = x$ et $|x - 1| = 1 - x$. Donc,

$$d_{\mathbb{Z}}(x) = \min(x, 1 - x) = \frac{x + 1 - x - |x - (1 - x)|}{2} = \frac{1 - |2x - 1|}{2}$$



9. $d_{\mathbb{Z}}$ *est dérivable en tout point de* $]0, 1/2[\cup]1/2, 1[$*, mais pas en* 0 *ni en* $1/2$*.*

10. (a) Comme $d_{\mathbb{Z}}$ est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(d_{\mathbb{Z}}) = 0$.

$$a_0(d_{\mathbb{Z}}) = 2\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\,dt = 4\int_0^{1/2} t\,dt = 4\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{t=0}^{1/2} = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en effectuant une intégration par parties,

$$\begin{aligned}
a_n(d_{\mathbb{Z}}) &= 2\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\cos(2\pi nt)\,dt \\
&= 4\int_0^{1/2} t\cos(2\pi nt)\,dt \\
&= 4\left(\left[\frac{t}{2\pi n}\sin(2\pi nt)\right]_{t=0}^{1/2} - \frac{1}{2\pi n}\int_0^{1/2} \sin(2\pi nt)\ dt\right) \\
&= 4\left(\frac{1}{(2\pi n)^2}\Big[\cos(2\pi nt)\Big]_{t=0}^{1/2}\right) \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right) \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{2}{n^2\pi^2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) $d_{\mathbb{Z}}$ est continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, donc sa série de Fourier converge normalement, et donc simplement et uniformément, sur $\mathbb{R}$ vers $d_{\mathbb{Z}}$.

(c) Notons d'abord que *les séries convergent par comparaison à des séries de Riemann convergentes.*

D'après la question précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ d_{\mathbb{Z}}(t) = \frac{a_0(d_{\mathbb{Z}})}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(d_{\mathbb{Z}})\cos(2\pi nt) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2(2n+1)\pi t)}{(2n+1)^2}$$

En évaluant en 0, on obtient :

$$0 = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Si l'on pose $S := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, alors

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8}$$

Les calculs sont justifiés par le fait que les séries sont toutes convergentes.

Donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

En utilisant la formule de Parseval,

$$\int_{-1/2}^{1/2}|d_{\mathbb{Z}}(t)|^2\ dt = \frac{|a_0(d_{\mathbb{Z}})|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(d_{\mathbb{Z}})|^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^4\pi^4}$$

Or,

$$\int_{-1/2}^{1/2} |d_{\mathbb{Z}}(t)|^2 \, dt = 2\int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_{t=0}^{1/2} = \frac{1}{12}$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{2}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right) = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} - 1$$

En posant $S' := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, on a

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{16}S + \frac{\pi^4}{96}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$$

11. (a) **Réflexivité.** Soit $x \in \Omega$.
Comme Ω est ouvert, il existe un intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $x \in]a, b[\subset \Omega$. Ainsi, $x \sim x$.
Symétrie. Évident.
Transitivité. Soit $(x, y, z) \in \Omega^3$. Supposons que $x \sim y$ et $y \sim z$.
Il existe donc deux intervalles ouverts $]a, b[$ et $]c, d[$ inclus dans Ω tels que $(x, y) \in]a, b[^2$ et $(y, z) \in]c, d[^2$.
Ainsi, $y \in]a, b[\cap]c, d[$, d'où $] \min(a, c), \max(b, d)[=]a, b[\cup]c, d[\subset \Omega$ et $(x, z) \in] \min(a, c), \max(b, d)[^2$.
Donc, $x \sim z$.
$\sim$ est donc une relation d'équivalence.

(b) *Les classes d'équivalence sont 2 à 2 disjointes.* Cela vient de la transitivité et de la symétrie.
Soit $x \in \Omega$.
Pour tout $y \in \mathrm{Cl}(x)$, il existe un intervalle ouvert $]a_y, b_y[$ inclus dans Ω tel que $(x, y) \in]a_y, b_y[^2$ et pour tout $z \in]a_y, b_y[$, $z \in \mathrm{Cl}(x)$ (à l'aide de l'intervalle $]a_y, b_y[$), donc

$$\forall y \in \mathrm{Cl}(x),\ y \in]a_y, b_y[\subset \bigcup_{t \in \mathrm{Cl}(x)}]a_t, b_t[\quad \text{et} \quad \forall y \in \mathrm{Cl}(x),\ ]a_y, b_y[\subset \mathrm{Cl}(x)$$

Ainsi,

$$\mathrm{Cl}(x) = \bigcup_{y \in \mathrm{Cl}(x)}]a_y, b_y[$$

$\mathrm{Cl}(x)$ est donc bien un ouvert. C'est une partie connexe de $\mathbb{R}$ comme réunion de connexes d'intersection non vide (puisque $\forall y \in \mathrm{Cl}(x), x \in]a_y, b_y[$), donc un intervalle.
Finalement, $\mathrm{Cl}(x)$ *est un intervalle ouvert.*

(c) $I := \Omega/\sim = \{\mathrm{Cl}(x)\ ,\ x \in \Omega\}$ est une partition de Ω. Pour tout $i \in I$, i est un intervalle ouvert que l'on note $]a_i, b_i[$. *Les intervalles* $]a_i, b_i[, i \in I$ *sont deux à deux disjoints et*

$$\Omega = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$$

Par ailleurs, pour tout $i \in I$, il existe un rationnel r_i élément de $]a_i, b_i[$, puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Les intervalles étant deux à deux disjoints, $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ i & \longmapsto & r_i \end{array}$ est injective. *Donc, I est fini ou dénombrable*, car $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

12. (a) **1$^{\text{er}}$cas :** a_{i_0} et b_{i_0} réels.

Pour tout $f \in F$, $f \leqslant a_{i_0}$ ou $f \geqslant b_{i_0}$, donc $|x-f| \geqslant \min(x-a_{i_0}, b_{i_0}-x)$. De plus $a_{i_0} \in F$ et $b_{i_0} \in F$. Ainsi,

$$d_F(x) = \min(x-a_{i_0}, b_{i_0}-x) = \frac{1}{2}(x-a_{i_0}+b_{i_0}-x-|a_{i_0}+b_{i_0}-2x|) = \frac{b_{i_0}-a_{i_0}}{2} - \left|\frac{b_{i_0}+a_{i_0}}{2}-x\right|$$

2$^{\text{e}}$cas : $a_{i_0} = -\infty$ et b_{i_0} réel.

Pour tout $f \in F$, $f \geqslant b_{i_0}$ donc $|x-f| \geqslant b_{i_0}-x$. De plus, $b_{i_0} \in F$. Ainsi,

$$d_F(x) = b_{i_0} - x$$

3$^{\text{e}}$cas : a_{i_0} réel et $b_{i_0} = +\infty$.

$$d_F(x) = x - a_{i_0}$$

4$^{\text{e}}$cas : $a_{i_0} = -\infty$ et $b_{i_0} = +\infty$.

Ce cas n'est pas possible, puisque F est supposée non vide dans tout l'énoncé.

(b) Si a_{i_0} et b_{i_0} sont réels, d_F est dérivable en x si et seulement si $x \neq \dfrac{a_{i_0}+b_{i_0}}{2}$.

Dans les autres cas, d_F est dérivable en x.

13. Comme $x \in \mathring{F}$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant $]x-\alpha, x+\alpha[\subset F$. d_F est alors nulle sur $]x-\alpha, x+\alpha[$, donc sur un voisinage de x. *Elle est donc dérivable en x et $d_F'(x) = 0$.*

14. (a) $\mathring{F} =]0,1[$ donc $\mathrm{Fr}(F) = \{0,1\}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_F(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x \leqslant 0 \\ 0 \text{ si } x \in]0,1[\\ x-1 \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$. d_F n'est pas dérivable en 0, ni en 1.

(b) i. $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\left]\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^3}, \dfrac{1}{n}\right[\subset \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, donc $\Omega \subset \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. Ω est ouvert comme réunion d'ouverts. *F est donc fermé* comme complémentaire d'un ouvert.

$0 \in F$, puisque $0 \notin \Omega$. Supposons que $0 \in \mathring{F}$. Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que $]-\alpha, \alpha[\subset F$. Ainsi, il existe un entier n tel que $n \geqslant 2$ et $\frac{1}{n} < \alpha$ (puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$). Donc, $\left]\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^3}, \dfrac{1}{n}\right[\subset]-\alpha, \alpha[\subset F$. Absurde.

Donc, $0 \in \mathrm{Fr}(F)$.

ii. Soient m et n deux entiers tels que $2 \leqslant m < n$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m^3} &\iff \frac{1}{m^3} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m(m+1)} \\ &\iff (0 <) \frac{1}{m^2} < \frac{1}{m+1} \text{ car } m > 0 \\ &\iff m+1 < m^2 \end{aligned}$$

Comme $m \geqslant 2$, $m^2 \geqslant 2m \geqslant m+2 > m+1$. Ainsi,

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m^3}$$

D'où,

$$\left]\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[\cap \left]\frac{1}{m}-\frac{1}{m^3}, \frac{1}{m}\right[= \varnothing$$

L'unicité en découle. L'existence est évidente.

Par ailleurs,

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} < x < \frac{1}{n}.$$

Donc,

$$n < \frac{1}{x} < n+1.$$

D'où,

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n.$$

iii. Soit $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

1^er^cas : $x \in \Omega$. Alors, en posant $n := \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$,

$$x \in \left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[.$$

De plus, comme $\frac{1}{x} < n+1$,

$$0 < \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 < n \quad \text{donc} \quad 0 < \frac{1}{n} < \frac{x}{1-x}$$

Comme $\frac{1}{n} \in F$,

$$d_F(x) \leqslant \frac{1}{n} - x < \frac{1}{n^3} < \frac{x^3}{(1-x)^3} \leqslant 8x^3 \text{ car } 1 - x > \frac{1}{2}$$

2^e^cas : $x \in F$. Alors,

$$d_F(x) = 0 \leqslant 8x^3$$

Dans tous les cas, $d_F(x) \leqslant 8x^3$.

iv. Pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$,

$$0 \leqslant \frac{d_F(x) - d_F(0)}{x} = \frac{d_F(x)}{x} \leqslant 8x^2 \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, d_F est dérivable en 0 à droite et $(d_F)'_d(0) = 0$.

v. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $x \in F$ donc $d_F(x) = 0$. Ainsi, d_F *est dérivable à gauche en 0 et* $(d_F)'_g(0) = 0$.
Comme $(d_F)'_g(0) = (d_F)'_d(0)$, d_F *est dérivable en* 0.

Partie III

15. (a) $d_F : x \mapsto \|x - x_0\|$ *et pour tout* $x \in E$, $\Gamma(x) = \{x_0\}$.

(b) Soit $x \in E$. Pour tout $h \in E$,

$$g(x+h) = \|x - x_0 + h\|^2 = \|x - x_0\|^2 + 2\langle x - x_0,\, h\rangle + \|h\|^2 = g(x) + \langle 2(x - x_0),\, h\rangle + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$$

On en déduit que g *est différentiable en* x *et que* $\nabla g(x) = 2(x - x_0)$.

(c) Posons $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}$. u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\forall t > 0, \forall h \in \mathbb{R},\, du(t).h = \frac{h}{2\sqrt{t}}$$

Donc, $d_F\big|_{E\setminus\{x_0\}} = u \circ g\big|_{E\setminus\{x_0\}}$ est différentiable sur $E\setminus\{x_0\}$ et pour tous $a \in E\setminus\{x_0\}$ et $h \in E$,

$$\begin{aligned} d(d_F)(a)\cdot h &= (du(g(a)) \circ dg(a))\cdot h \\ &= du(g(a))\cdot(dg(a)\cdot h) \\ &= \frac{2\langle a - x_0,\, h\rangle}{2\sqrt{g(a)}} \\ &= \left\langle \frac{1}{\|a-x_0\|}\,(a-x_0),\, h\right\rangle \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\nabla d_f(a) = \frac{1}{\|a-x_0\|}\,(a-x_0) = \frac{1}{\|a-\pi(a)\|}\,(a-\pi(a))$$

(d) i. Soit $h \in E$. Comme on suppose que d_F est différentiable en x_0, on a

$$d_F(x_0+u) = d_F(x_0) + \langle \nabla d_F(x_0),\, u\rangle + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}(\|u\|)$$

Donc, comme $d_F(x_0) = 0$,

$$d_F(x_0+th) = \langle \nabla d_F(x_0),\, th\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t) = t\,\langle \nabla d_F(x_0),\, h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$$

ii. Soit $h \in E$. D'après ce qui précède, comme $d_F(x_0+th) = \|th\| = |t|\,\|h\|$,

$$\frac{|t|}{t}\,\|h\| = \frac{d_F(x_0+th)}{t} = \langle \nabla d_F(x_0),\, h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(1)$$

Les limites à gauche et à droite donnent

$$\|h\| = \langle \nabla d_F(x_0),\, h\rangle = -\,\|h\|$$

ce qui implique que $\|h\| = 0$ et $h = 0_E$, et ce pour tout $h \in E$. Absurde, puisque $\dim(E) \neq 0$.
d_F n'est donc pas différentiable en x_0.

16. (a) Soit $x \in E$. Comme F est convexe, $\Gamma(x)$ est un singleton.
Notons p le projecteur orthogonal sur F. Alors, pour tout $f \in F$, comme $x - p(x) \perp p(x) - f$,

$$\|x-f\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)-f\|^2 \geqslant \|x-p(x)\|^2$$

avec égalité si et seulement si $f = p(x)$. Donc, $p(x) \in \Gamma(x)$ et $\pi(x) = p(x)$ par unicité.

(b) Soit $a \in E$. Pour tout $h \in E$,

$$\begin{aligned} d_F^2(a+h) &= \|a+h-\pi(a+h)\|^2 = \|a-\pi(a)+h-\pi(h)\|^2 \\ &= \|a-\pi(a)\|^2 + \|h-\pi(h)\|^2 + 2\,\langle a-\pi(a),\, h-\pi(h)\rangle \\ &= d_F^2(a) + \langle 2\,(a-\pi(a)),\, h\rangle + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|) \end{aligned}$$

puisque, comme $\pi(h) \perp h-\pi(h)$, $\|h-\pi(h)\|^2 = \|h\|^2 - \|\pi(h)\|^2 \leqslant \|h\|^2$ et $\pi(h) \perp a-\pi(a)$.
Donc, d_F^2 est différentiable en a et $\nabla d_F^2(a) = 2\,(a-\pi(a))$.

(c) Soit $a \in E\setminus F$. On pose $g := d_F^2$ et on considère à nouveau $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}$.

$d_F\big|_{E\setminus F} = u \circ g\big|_{E\setminus F}$ est différentiable en a et pour tout $h \in E$,

$$\begin{aligned} d(d_F)(a)\cdot h &= (du(g(a)) \circ dg(a))\cdot h \\ &= du(g(a))\cdot(dg(a)\cdot h) \\ &= \frac{2\langle a - \pi(a),\, h\rangle}{2\sqrt{g(a)}} \\ &= \left\langle \frac{1}{\|a-\pi(a)\|}\,(a-\pi(a)),\, h\right\rangle \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\nabla d_f(a) = \frac{1}{\|a-\pi(a)\|}(a-\pi(a))$$

(d) i. Comme d_F est différentiable en a de gradient u, on a

$$d_F(a+th) = d_F(a) + \langle u,\, th\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t) = t\left(\langle u,\, h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(1)\right) \text{ car } d_F(a) = 0$$

Or, $\forall t \in \mathbb{R}$, $d_F(a+th) = \|a+th-\pi(a+th)\| = \|a+th-a\| = |t|\,\|h\|$, puisque π est le projecteur orthogonal sur F, $a \in F$ et $h \in F^\perp$.
Ainsi,

$$\frac{|t|\,\|h\|}{t} = \langle u,\, h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(1)$$

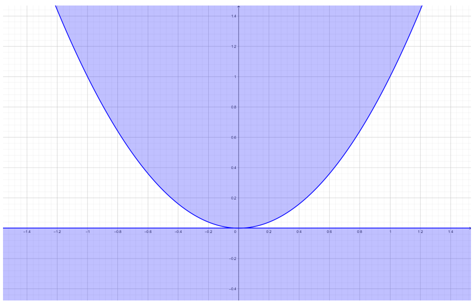
En prenant la limite à droite en 0, $\|h\| = \langle u,\, h\rangle$.

ii. Comme pour tout $h \in F^\perp$, $-h \in F^\perp$, d'après la question précédente,

$$\langle u,\, h\rangle = \|h\| = \|-h\| = \langle u,\, -h\rangle = -\langle u,\, h\rangle$$

Ainsi, $\|h\| = \langle u,\, h\rangle = 0$.
Donc, $F^\perp \subset \{0_E\}$. Absurde, puisque $F \neq E$. *d_F n'est donc pas différentiable en a.*

17. (a)



(b) Posons $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & y \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & y - x^2 \end{array}$ sont continues (car polynomiales).
Ainsi, $f_1^{-1}(\mathbb{R}_-)$ et $f_2^{-1}(\mathbb{R}_+)$ sont des parties fermées. *Donc, F est une partie fermée comme réunion finie de fermés.*

(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \in F$. Supposons que $0_{\mathbb{R}^2} \in \mathring{F}$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $B(0_{\mathbb{R}^2}, \varepsilon) \subset F$.

Soit $x > 0$ tel que $x < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $x < 1$. On pose $u := \begin{pmatrix} x \\ x^3 \end{pmatrix}$.

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + x^6} = x\underbrace{\sqrt{1+x^4}}_{\leqslant 2} \leqslant 2x < \varepsilon$$

Donc, $u \in B(0_{\mathbb{R}^2}, \varepsilon)$. Ainsi, $u \in F$. Donc, $x^3 \leqslant 0$ ou $x^3 \geqslant x^2$. Or, $x > 0$. Donc, $x^3 \geqslant x^2$. D'où, $x \geqslant 1$. Absurde, puisque $x < 1$. *Ainsi,* $0_{\mathbb{R}^2} \in F \backslash \mathring{F} = \mathrm{Fr}(F)$ *(F est fermée).*

(d) Soit $u := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Si $u \in F$ **:** alors $d_F(u) = 0 \leqslant \|u\|^2$.

Si $u \notin F$ **:** $y > 0$ et $y < x^2$. Donc, comme $f := \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in F$,

$$d_F(u) \leqslant \|u - f\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right\| = |y| = y < x^2 \leqslant \|u\|^2$$

Dans tous les cas, $d_F(u) \leqslant \|u\|^2$.

(e) Pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, $0 \leqslant d_F(h) \leqslant \|h\|^2$, donc $d_F(h) = \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$. Comme $d_F(0_{\mathbb{R}^2}) = 0$, on en déduit que

$$d_F(0_{\mathbb{R}^2} + h) = d_F(0_{\mathbb{R}^2}) + \langle 0_{\mathbb{R}^2},\, h\rangle + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$$

d_F est donc différentiable en $0_{\mathbb{R}^2}$ et $\nabla d_F(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Partie IV

18. (a) Comme $u \in \mathrm{Vect}\,(a)$, $\mathrm{Vect}\,(a, u, y) = \mathrm{Vect}\,(a, y)$ est donc un *sev* de dimension finie inférieure ou égale à 2, donc *inclus dans un plan noté $\mathcal{P}$.*

(b) Pour tout $u \in E$,

$$u \in S \iff (u \in \mathcal{P} \text{ et } u \in F) \iff (u \in \mathcal{P} \text{ et } \|u\| = 1)$$

S est donc le cercle unité de $\mathcal{P}$.

(c) On complète u en une base orthonormée (u, v) de $\mathcal{P}$. Pour tout vecteur x de $\mathcal{P}$, on note z_x l'affixe de x dans cette base.

Ainsi, $z_u = 1$, $z_a = \|a\| \in \mathbb{R}_+^*$ et il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z_y = e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned}\|y-a\|^2 = |z_y - z_a|^2 = \left|e^{i\theta} - \|a\|\right|^2 &= (\cos(\theta) - \|a\|)^2 + \sin^2(\theta)\\ &= 1 + \|a\|^2 - 2\cos(\theta)\,\|a\| \geqslant 1 + \|a\|^2 - 2\,\|a\| = (\|a\| - 1)^2\end{aligned}$$

Ainsi, $\|y-a\|^2 \geqslant (\|a\|-1)^2$ avec égalité si et seulement si $\cos(\theta) = 1$, donc si et seulement si $\theta = 0$ (car $\theta \in [0, 2\pi[$), d'où si et seulement si $y = u$.

On en déduit que $\Gamma(a) = \{u\}$, que $\pi(a) = \frac{1}{\|a\|}a$ et que $d_F(a) = \|a - \pi(a)\| = \|u - a\| = |\|a\| - 1|$.

19. Soit $a \in E$.

Si $a \neq 0_E$, d'après ce qui précède, $d_F(a) = |\|a\| - 1|$.

Si $a = 0_E$, pour tout $y \in F$, $\|y - a\| = \|y\| = 1$. Donc, $d_F(a) = 1 = |\|a\| - 1|$.

20. Soit $a \in E$ tel que $a \neq 0_E$ et $a \notin F$. Ainsi, $\|a\| \neq 1$.

Posons $\varphi : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & |t|\end{array}$ et $\psi : \begin{array}{ccc}E\backslash(\{0_E\} \cup F) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \|x\| - 1\end{array}$.

φ est différentiable et

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \forall h \in \mathbb{R},\, d\varphi(t)\cdot h = \mathrm{sgn}\,(t)\,h$$

D'après la question 15c, $\psi = -1 + d_{\{0_E\}}\big|_{E\backslash(\{0_E\}\cup F)}$ est différentiable et

$$\forall x \in E\backslash(\{0_E\} \cup F), \forall h \in E, d\psi(x)\cdot h = \left\langle \frac{1}{\|x\|}x,\, h\right\rangle$$

Comme $d_F = \varphi \circ \psi$ (noter que la composition est possible puisque ψ ne s'annule pas), d_F est différentiable en tout $x \in E\backslash(\{0_E\} \cup F)$ et

$$\begin{aligned}\forall h \in E, d(d_F)(x)\cdot h &= d\varphi(\psi(x))\cdot(d\psi(x)\cdot h)\\ &= \mathrm{sgn}\,(\|x\| - 1)\left\langle \frac{1}{\|x\|}x,\, h\right\rangle\\ &= \left\langle \frac{\mathrm{sgn}\,(\|x\|-1)}{\|x\|}x,\, h\right\rangle\end{aligned}$$

Ainsi, comme $d_F(x) = |\|x\| - 1|$,

$$\nabla d_F(x) = \frac{\mathrm{sgn}\,(\|x\|-1)}{\|x\|}x = \frac{\|x\|-1}{|\|x\|-1|}\frac{1}{\|x\|}x = \frac{1}{d_F(x)}\left(x - \frac{1}{\|x\|}x\right) = \frac{1}{\|x - \pi(x)\|}(x - \pi(x))$$

21. Pour tout $f \in F$, $\|0_E - f\| = \|f\| = 1$, donc $d_F(0_E) = 1$ et $\Gamma(0_E) = F$.

22. Pour tout $t \in]-1,1[$, $d_F(a+ta) = |\|a+ta\| - 1| = ||1+t|\,\|a\| - 1| = |1+t-1| = |t|$

    Supposons que d_F soit différentiable en a. Alors $t \mapsto d_F(a+ta)$ est dérivable en 0, ce qui est absurde.

    Donc, *d_F n'est pas différentiable en a.*

23. (a) Pour tout $t \in]-1,1[$, $\varphi(t) = |\|tv\| - 1| = ||t|\,\|v\| - 1| = ||t| - 1| = 1 - |t|$.
    $|\cdot|$ n'étant pas dérivable en 0, φ ne l'est pas non plus.

    (b) Supposons que d_F soit différentiable en 0. Alors, φ est différentiable (donc dérivable) en 0, car de plus, $t \mapsto tv$ est différentiable en 0 et d'image nulle en 0. Absurde. *d_F n'est donc pas différentiable en 0_E.*

Partie V

24. (a) D'après la question 2b, d_F est 1-lipschitzienne. Donc, pour tout $t > 0$,

$$d_F(a+tu) - d_F(a) \leqslant \|a+tu-a\| = |t|\,\|u\| \leqslant t\,\|u\|$$

    (b) Comme d_F est différentiable en a, de gradient égal à u,

$$d_F(a+tu) - d_F(a) = \langle u,\, tu\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t) = t\,\|u\|^2 + t\underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(1)$$

    Ainsi,

$$t\left(\|u\|^2 + \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\mathrm{o}}(1)\right) \leqslant t\,\|u\|$$

    Donc,

$$\|u\|^2 + \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\mathrm{o}}(1) \leqslant \|u\|$$

    Par passage à la limite en 0 à droite, on obtient

$$\|u\|^2 \leqslant \|u\|$$

    Donc, si $\|u\| > 0$, $\|u\| \leqslant 1$ et si $\|u\| = 0$, $\|u\| \leqslant 1$. *Dans tous les cas, $\|u\| \leqslant 1$.*

25. (a) Soit $x \in [a,y]$. Il existe $t \in [0,1]$ vérifiant $x = (1-t)a + ty$. Alors, comme $y \in \Gamma(a)$,

$$d_F(a) = \|a-y\| = \|a-x+x-y\| = \|a-x\| + \|x-y\|$$

    puisque $a - x = t(a-y)$ et $x - y = (1-t)(a-y)$ sont positivement liés (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire). *Ainsi,*

$$\|x-y\| = d_F(a) - \|a-x\|$$

    (b) Soient $x \in [a,y]$ et $z \in \Gamma(x)$.

$$d_F(x) \leqslant \|x-y\| = d_F(a) - \|a-x\| \leqslant \|z-a\| - \|a-x\| \leqslant \|z-x\| = d_F(x)$$

    Toutes les inégalités sont donc des égalités. *Donc,*

$$d_F(x) = \|x-y\|$$

26. (a) $d_F(a) > 0$, puisque $a \notin F$.

$$a - tv = a - \frac{t}{d_F(a)}(a-y) = \left(1 - \frac{t}{d_F(a)}\right) a + \frac{t}{d_F(a)} y \in [a, y] \text{ puisque } \frac{t}{d_F(a)} \in [0, 1]$$

Donc, d'après la question 25b,

$$d_F(a - tv) = \|a - tv - y\| = \left\| \left(1 - \frac{t}{d_F(a)}\right)(a-y) \right\| = \left(1 - \frac{t}{d_F(a)}\right) \underbrace{\|a-y\|}_{=d_F(a)} = d_F(a) - t$$

(b) On en déduit que

$$d_F(a) - t = d_F(a - tv) = d_F(a) + \langle u,\, -tv\rangle + \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\mathrm{o}}(t) = d_F(a) - t\,\langle u,\, v\rangle + \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\mathrm{o}}(t)$$

Ainsi,

$$-1 = -\langle u,\, v\rangle + \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\mathrm{o}}(1)$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\langle u,\, v\rangle = 1$$

Or, $\|u\| \leqslant 1$ (question 24b) et $\|v\| = \frac{\|a-y\|}{d_F(a)} = 1$, puisque $y \in \Gamma(a)$. Donc,

$$1 = \langle u,\, v\rangle \leqslant \|u\|\,\|v\| \leqslant 1$$

Ainsi, toutes les inégalités sont des égalités :

$$\langle u,\, v\rangle = \|u\|\,\|v\| = 1 \quad \text{et} \quad \|u\| = 1$$

(c) On en déduit que u et v sont positivement liés (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Or u et v sont unitaires. *Donc, $u = v$.* Ainsi,

$$y = a - d_F(a)\nabla d_F(a)$$

$\Gamma(a)$ est donc un singleton (puisque l'ensemble est non vide) et

$$\nabla d_F(a) = v = \frac{1}{d_F(a)}(a-y) = \frac{1}{d_F(a)}(a - \pi(a))$$

Partie VI

27. (a) Comme la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée. *Donc M est bien défini.*
Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|y_p - a\| &\leqslant \|y_p - x_p\| + \|x_p - a\|\\ &\leqslant d_F(x_p) + M\\ &\leqslant d_F(a) + |d_F(x_p) - d_F(a)| + M\\ &\leqslant d_F(a) + |x_p - a| + M\\ &\leqslant 2M + d_F(a)\end{aligned}$$

La suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

(b) *Le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence de ℓ.*

(c) Quitte à extraire (puisque toute suite extraite de $(x_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a), on peut supposer que $(y_p)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.
Par construction, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $y_p \in E\backslash V$ et $y_p \in F$. Comme V est un ouvert, $E\backslash V$ est fermé. Donc, $F \cap (E\backslash V)$ est fermé (comme intersection de fermés). *On en déduit que $\ell \in F \cap (E\backslash V)$.*

(d) On a
$$\|x_p - y_p\| \xrightarrow[p\to\infty]{} \|a-\ell\| \quad \text{et} \quad \|x_p - y_p\| = d_F(x_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} d_F(a)$$
par continuité de d_F. Ainsi,
$$d_F(a) = \|a-\ell\|$$
Comme $\ell \in F$, on en déduit que $\ell \in \Gamma(a) = \{\pi(a)\} \subset V$, *ce qui est absurde* puisque $\ell \in E\backslash V$. Ainsi,
$$\forall V \in \mathscr{V}(\pi(a)),\, \exists U \in \mathscr{V}(a),\, \forall x \in U,\, \Gamma(x) \subset V$$

28. (a) Comme $a \notin F$, $R = \|a - \pi(a)\| = d_F(a) > 0$.
Pour tout $y \in \overline{B}(a,R) \cap F$, $\|y-a\| \geqslant R$, car $y \in F$, et $\|y-a\| \leqslant R$, car $y \in \overline{B}(a,R)$. Donc, $y \in \Gamma(a) = \{\pi(a)\}$ *i.e.* $y = \pi(a)$. De plus, $\pi(a) \in \overline{B}(a,R) \cap F$. Ainsi,
$$\overline{B}(a,R) \cap F = \{\pi(a)\}$$

(b) i. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\varphi(t) = \|y-x\|^2 t^2 - 2\langle y-x,\, a-x\rangle t + \|a-x\|^2 - R^2$$
Comme $\|y-x\|^2 = d_F(x)^2 > 0$ (car $x \notin F$), φ est un trinôme du second degré.
Le produit des racines vaut $\dfrac{\|a-x\|^2 - R^2}{\|y-x\|^2} < 0$, car $0 \leqslant \|x-a\| < R$ puisque $x \in B(a,R)$.
Les racines sont donc de signes opposés.

ii. D'après ce qui précède, φ s'annule au plus une fois sur $[0,1]$. Par ailleurs, $\varphi(0) = \|a-x\|^2 - R^2 < 0$, $\varphi(1) = \|a-y\|^2 - R^2 \geqslant 0$ (car $y \in F$) et φ est continue. Donc φ s'annule sur $[0,1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
Ainsi, φ s'annule une et une seule fois sur $[0,1]$, *i.e.* $[x,y] \cap S(a,R)$ *est un singleton.*

iii. Bien évidemment, $\varphi(t_{x,y}) = 0$. $t_{x,y}$ est donc la racine positive de φ. *Ainsi,*
$$t_{x,y} = \frac{\langle y-x,\, a-x\rangle + \sqrt{\langle y-x,\, a-x\rangle^2 + d_F(x)^2\left(R^2 - \|a-x\|^2\right)}}{d_F(x)^2}$$

(c) On a
$$\begin{aligned}\|p(x,y) - y\| &= (1 - t_{x,y})\, \|x-y\| = (1-t_{x,y}) d_F(x) \\ &= \frac{d_F(x)^2 - \langle y-x,\, a-x\rangle - \sqrt{\langle y-x,\, a-x\rangle^2 + d_F(x)^2\left(R^2 - \|a-x\|^2\right)}}{d_F(x)}\end{aligned}$$
Or,
$$-\langle y-x,\, a-x\rangle \leqslant |\langle y-x,\, a-x\rangle| \leqslant \|y-x\|\,\|a-x\| \leqslant d_F(x)\,\|a-x\|$$
et
$$\sqrt{\langle y-x,\, a-x\rangle^2 + d_F(x)^2\left(R^2 - \|a-x\|^2\right)} \geqslant \sqrt{d_F(x)^2\left(R^2 - \|a-x\|^2\right)} = d_F(x)\sqrt{R^2 - \|a-x\|^2}$$
Donc,
$$\|p(x,y) - y\| \leqslant d_F(x) + \|a-x\| - \sqrt{R^2 - \|a-x\|^2}$$
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme d_F et la norme sont continues et comme $R = d_F(a)$,
$$d_F(u) + \|a-u\| - \sqrt{R^2 - \|a-u\|^2} \xrightarrow[u\to a]{} 0$$

Donc, il existe $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall u \in E, \|u-a\| < \alpha \implies d_F(u) + \|a-u\| - \sqrt{R^2 - \|a-u\|^2} < \varepsilon$$

Ainsi, *si* $\|x-a\| < \alpha$, *alors* $\|p(x,y) - y\| < \varepsilon$.

(d) Soit $V \in \mathscr{V}(\pi(a))$. Il existe $\delta > 0$ vérifiant

$$B(\pi(a), \delta) \subset V$$

D'après la question 27d, il existe un voisinage $U_1 \in \mathscr{V}(a)$ vérifiant

$$\forall x \in U_1, \, \Gamma(x) \subset B\left(\pi(a), \frac{\delta}{2}\right)$$

D'après la question précédente, il existe un voisinage $U_2 \in \mathscr{V}(a)$ vérifiant

$$\forall x \in U_2, \, \forall y \in \Gamma(x), \, \|p(x,y) - y\| < \frac{\delta}{2}$$

Posons $U := U_1 \cap U_2 \in \mathscr{V}(a)$. Alors, pour tout $x \in U$ et tout $y \in \Gamma(x)$,

$$y \in B\left(\pi(a), \frac{\delta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \|p(x,y) - y\| < \frac{\delta}{2}$$

donc

$$\|p(x,y) - \pi(a)\| \leqslant \|p(x,y) - y\| + \|y - \pi(a)\| < \delta$$

d'où

$$p(x,y) \in B(\pi(a), \delta) \subset V$$

29. (a) Soit $x \in B(a,R)$.

$\|x - p(x,y_x)\|^2 = \|x - a + a - p(x,y_x)\|^2 = \|x-a\|^2 + 2\langle x-a, \, a - p(x,y_x)\rangle + \|a - p(x,y_x)\|^2$

Le résultat en découle.

(b) Soit $x \in B(a,R)$.

$$\begin{aligned}\|x - p(x,y_x)\|^2 - \|a - p(x,y_x)\|^2 &= 2\langle x-a, \, a - p(x,y_x)\rangle + \|x-a\|^2 \\ &= 2\langle x-a, \, a-\pi(a)\rangle + 2\langle x-a, \, \pi(a) - p(x,y_x)\rangle + \|x-a\|^2\end{aligned}$$

D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ vérifiant

$$\forall x \in B(a,\eta), \, \forall y \in \Gamma(x), \, p(x,y) \in B(\pi(a), \varepsilon)$$

Ainsi, si $x \in B(a, \min(\eta, \varepsilon))$, alors

$2\,|\langle x-a, \, \pi(a) - p(x,y_x)\rangle| + \|x-a\|^2 \leqslant 2\,\|x-a\|\,\|\pi(a) - p(x,y_x)\| + \varepsilon\,\|x-a\| \leqslant 3\varepsilon\,\|x-a\|$

Donc, $2\langle x-a, \, \pi(a) - p(x,y_x)\rangle + \|x-a\|^2 = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(\|x-a\|)$ et

$$\|x - p(x,y_x)\|^2 - \|a - p(x,y_x)\|^2 = 2\langle x-a, \, a-\pi(a)\rangle + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(\|x-a\|)$$

30. Soient $x \in B(a,R)$ et $y_x \in \Gamma(x)$. Comme $p(x,y_x) \in S(a,R)$, $\|a - p(x,y_x)\| = R = d_F(a) = \|a - \pi(a)\|$.

Donc, comme $\|x - p(x,y_x)\| \leqslant d_F(x) \leqslant \|x - \pi(a)\|$,

$$\|x - p(x,y_x)\|^2 - \|a - p(x,y_x)\|^2 \leqslant d_F^2(x) - d_F^2(a) \leqslant \|x-\pi(a)\|^2 - \|a - \pi(a)\|^2$$

Or,

$$\|x-\pi(a)\|^2 - \|a-\pi(a)\|^2 = 2\langle x-a, \, a-\pi(a)\rangle + \|x-a\|^2$$

Ainsi,

$$d_F^2(x) - d_F^2(a) - 2\langle x-a, \, a-\pi(a)\rangle = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(\|x-a\|)$$

D'où,

$$d_F^2(a+h) = d_F^2(a) + \langle 2\,(a-\pi(a)), \, h\rangle + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$$

31. D'après ce qui précède, d_F^2 est différentiable en a et $\nabla(d_F^2)(a) = 2(a - \pi(a))$.

Comme $u : t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $d_F(a) > 0$, $d_F = u \circ (d_F^2)$ est différentiable en a comme composée de fonctions différentiables et on a

$$\forall h \in E,\ d(d_F)(a) \cdot h = du(d_F^2(a)) \cdot (d(d_F^2)(a) \cdot h) = \frac{1}{2\sqrt{d_F^2(a)}} \langle 2(a - \pi(a)),\, h \rangle = \left\langle \frac{1}{d_F(a)} (a - \pi(a)),\, h \right\rangle$$

Ainsi,

$$\nabla(d_F)(a) = \frac{1}{d_F(a)} (a - \pi(a)) = \frac{1}{\|a - \pi(a)\|} (a - \pi(a))$$

32. D'après la question précédente, d_F est différentiable sur Ω et

$$\forall x \in \Omega, \nabla(d_F)(x) = \frac{1}{\|x - \pi(x)\|} (x - \pi(x))$$

D'après la question 27d, π (qui est bien définie sur Ω) est continue sur Ω. Ainsi, ∇d_F est continue sur Ω, donc *d_F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.*

Partie VII

33. Si $a \in \mathring{F}$, d_F est nulle sur un voisinage de a, donc (d_F est différentiable en a et) $\nabla(d_F)(a) = 0$.

34. (a) $d_F(a) = 0$, puisque $a \in F$. Comme d_F est différentiable en a, de gradient égal à u,

$$d_F(a - tu) = d_F(a) + \langle u, -tu \rangle + \underset{t \to 0}{\mathrm{o}}(t) = -t\,\|u\|^2 + \underset{t \to 0}{\mathrm{o}}(t)$$

(b) D'après la question précédente,

$$0 \leqslant d_F(a - tu) = t \left(-\|u\|^2 + \underset{\substack{t \to 0 \\ t > 0}}{\mathrm{o}}(1) \right)$$

En divisant par $t > 0$, on en déduit que

$$0 \leqslant -\|u\|^2 + \underset{\substack{t \to 0 \\ t > 0}}{\mathrm{o}}(1)$$

En passant à la limite, on en déduit que $-\|u\|^2 \geqslant 0$, donc que $\|u\| = 0$. *Ainsi,* $\nabla(d_F)(a) = 0$.

Chapitre 4

Bibliothèque de l'agrégation de mathématiques

La bibliothèque est commune avec le concours de l'agrégation externe, excepté pour les livres d'informatique théorique qui ne sont pas repris dans la présente liste. Seuls les livres d'algorithmique présentant un intérêt pour le concours interne ont été maintenus.

AABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs	MIT Press ISBN : 9780262010771
AEBISCHER B.	Géométrie	Vuibert ISBN : 9782311002768
AEBISCHER B.	Analyse	Vuibert ISBN : 9782311002751
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	Masson ISBN : 9782225817939
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique	Vuibert ISBN : 9782711786213
ALDON G.	Mathématiques dynamiques	Hachette Éducation ISBN : 9782011712424
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	Dunod ISBN : 9782100045563
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations	Cambridge ISBN : 9780521823326
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	Cassini ISBN : 9782842250522
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 1A - Topologie	Ellipses ISBN : 9782729802002
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 1B - Fonctions numériques	Ellipses ISBN : 9782729802096
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 2 - Suites et séries numériques	Ellipses ISBN : 9782729886168

ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 3 - Analyse fonctionnelle	Ellipses ISBN : 9782729888470
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 5 - Algèbre générale, polynômes	Ellipses ISBN : 9782729802045
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie	Ellipses ISBN : 9782729802053
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	Ellipses ISBN : 9782729802061
ANDREWS G.	Number Theory	Dover ISBN : 9780486682525
APPEL A.W.	Modern compiler implementation, in C	Cambrigde ISBN : 9780521607650
APPEL A.W.	Modern compiler implementation, in Java	Cambrigde ISBN : 9780521820608
APPEL A.W.	Modern compiler implementation, in ML	Cambrigde ISBN : 9780521607643
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA ISBN : 9782869110103
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie, Tome I	Ellipses ISBN : 9782729843083
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie, Tome II	Ellipses ISBN : 9782729845940
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	Dunod ISBN : 9782100031023
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse tome 2	Dunod ISBN : 9782100014712
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques, 1. Algèbre	Dunod ISBN : 9782040164508
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques, 2. Analyse	Dunod ISBN : 9782040165017
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques, 3. Compléments d'analyse	Dunod ISBN : 9782040165253
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques, 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	Dunod ISBN : 9782040165505
ARNOLD A. **GUESSARIAN I.**	Mathématiques pour l'informatique	Ediscience ISBN : 9782100492305
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Lectures on partial differential equations	Springer Univsersitext ISBN : 9783540404484
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gauthier-Villars

ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gabay ISBN : 9782876470896
ARTIN M.	Algebra	Prentice Hall ISBN : 9780130047635
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée, Tome 2	PUF ISBN : 9782130392652
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	Belin ISBN : 9782701121307
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	Masson ISBN : 9782225826320
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	Masson ISBN : 9782225840012
AVEZ A.	Calcul différentiel	Masson ISBN : 9782225790799
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms, Introduction to design & analysis	Addison Wesley ISBN : 9780201612448
BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A.** **PETIT A.** **SANTHA M.** **WEIL P.** **ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale	Springer ISBN : 9783540423416
BAJARD J.-C.	Exercices d'algorithmique	International Thomson ISBN : 9782841801053
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	Hermann ISBN : 9782705660932
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	Diderot, éditeur Arts et Sciences ISBN : 9782841340002
BASS J.	Cours de Mathématiques, Tome 1	Masson
BASS J.	Cours de Mathématiques, Tome 2	Masson
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	Springer ISBN : 9783540426745
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	Mc Graw Hill ISBN : 9780070044524
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	Dunod ISBN : 9782100044320

BENOIST J. **BOUALEM H.** **BROUZET R.** **CABOT A.** **CHABANOL M.L.** **FEJOZ J.** **LAZZARINI L.,MANSUY R.** **MESNAGER L.** **MESNAGER s.** **PENNEQUIN D. YGER A.** **ZARRABI M.**	Mathématiques L2. Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés	Pearson Education ISBN : 9782744072253
BERCU B **CHAFAI D.**	Modélisation stochastique et simulation	Dunod ISBN : 9782100513796
BERGER M.	Géométrie tome 2	Nathan ISBN : 9782091917313
BERGER M.	Géométrie vivante	Cassini ISBN : 9782842250355
BERGER M.	Géométrie, 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407016
BERGER M.	Géométrie, 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407014
BERGER M.	Géométrie, 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407032
BERGER M.	Géométrie, 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407040
BERGER M.	Géométrie, 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407059
BERGER M.	Géométrie, Index	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407067
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407202
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	Armand, Colin
BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, Journées mathématiques X-UPS 2000	Editions de l'X ISBN : 9782730207515
BHATIA R.	Matrix analysis	Springer ISBN : 9780387948461
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	Prentice Hall ISBN : 9780135641470
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	Oxford Science, Publications ISBN : 9780198534273
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF ISBN : 9782130322535

BOAS R.	A primer of real functions	Mathematical association of America ISBN : 9780883850222
BOISSONNAT J.-D. **YVINEC M.**	Géométrie algorithmique	Ediscience ISBN : 9782840741121
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	Masson ISBN : 9782225849923
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.**	Optimisation numérique	Springer ISBN : 9783540631835
BOUALEM H. **BROUZET R.** **ELSNER B.** **KACZMAREK L.** **PENNEQUIN D.**	Mathématiques L1. Cours complet avec 1000 tests et exercices corrigés	Pearson Education ISBN : 9782744072581
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	Hermann
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III	Hermann
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII	Hermann
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Topologie générale, chapitres V à X	Hermann
BOURGADE P.	Olympiades internationales de mathématiques	Cassini ISBN : 9782842250874
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	Hermann ISBN : 9782705613838
BREMAUD **P.**	Introduction aux probabilités et aux chaînes de Markov	Springer ISBN : 9783540314219
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	Masson ISBN : 9782225771989
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration, Cours et exercices, 3ème édition	Vuibert ISBN : 9782711771264
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	Armand, Colin
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	Cambridge ISBN : 9780521312387
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire, 1. Espaces vectoriels , Polynômes	Ellipses ISBN : 9782729887049
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire, 2. Matrices et réduction	Ellipses ISBN : 2729890297
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux vol I	PUF ISBN : 9782130523529
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF ISBN : 9782130384656

CANDELPERGHER B.	Calcul intégral	CASSINI ISBN : 9782842250539
CARREGA J.C.	Théorie des corps	HERMANN ISBN : 9782705614492
CARTAN H.	Calcul différentiel	HERMANN ISBN : 9782705658793
CARTAN H.	Formes différentielles	HERMANN ISBN : 9782705667023
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	HERMANN ISBN : 9782705652159
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel	0
CARTON O.	Langages formels. Calculabilité et complexité	VUIBERT ISBN : 9782711720774
CASTI J.	Reality rules tome I	WILEY ISBN : 9780471570219
CASTI J.	Reality rules tome II	WILEY ISBN : 9780471577980
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	PRENTICE HALL ISBN : 9780132114677
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe tome I	MIR ISBN : 9785030016287
CHAFAI D.	Probabilités. Préparation à l'agrégation interne	E-LIVRE ISBN : 9782954171005
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle	EDITIONS DE L'X ISBN : 9782730212175
CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2	MASSON ISBN : 9782225848858
CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3	MASSON ISBN : 9782225853852
CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S. MAILLOT V.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	MASSON ISBN : 9782225855160
CHARPENTIER E. NILKOLSKI N.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui	CASSINI ISBN : 9782842250072
CHARPENTIER E. NILKOLSKI N.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 1	CASSINI ISBN : 9782842250706
CHARPENTIER E. NILKOLSKI N.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 2	CASSINI ISBN : 9782842250583
CHARPENTIER E. NILKOLSKI N.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 3	CASSINI ISBN : 9782842250829
CHARPENTIER E. NILKOLSKI N.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 3	CASSINI ISBN : 9782842250829
CHARPENTIER E. NILKOLSKI N.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 4	CASSINI ISBN : 9782842251147
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	MASSON ISBN : 9782225809682
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	SPRINGER VERLAG

CHOIMET D. **QUEFFELEC H.**	Analyse mathématique	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352107
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	Masson ISBN : 9782225599726
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	Hermann
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	Algèbre 1	Ellipses ISBN : 9782729845087
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	Algèbre 2	Ellipses ISBN : 9782729896898
CLAESSENS **L.**	Mes notes de mathématiques	E-livre ISBN : 9782954093611
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	Vuibert ISBN : 9782711753215
COHN P.M.	Algebra Volume 1	John Wiley ISBN : 9780471101699
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématiques BTS industriel	Nathan ISBN : 9782091790886
COLLET P.	Modeling binary data	Chapman and Hall ISBN : 9780412388002
COLMEZ **P.**	Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)	Editions de l'X ISBN : 9782730215879
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF ISBN : 9782130460299
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique, 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats	Dunod ISBN : 9782100054527
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique, 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	Dunod ISBN : 9782100054534
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique	Dunod ISBN : 9782100039227
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	Cassini ISBN : 9782842250683
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics, Volume 1	John Wiley ISBN : 9780471504474
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics, Volume 2	John Wiley ISBN : 9780471504399
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	Ediscience ISBN : 9782840741145
COX D.	Galois theory	Wiley ISBN : 9780471434191
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	John Wiley ISBN : 9780471504580

CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	INSTITUTE OF PHYSICS, PUBLISHING ISBN : 9780852742600
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	Exercices de Probabilités et Statistiques, 1. Problèmes à temps fixe	MASSON ISBN : 9872225779023
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	Probabilités et Statistiques, 1. Problèmes à temps fixe	MASSON ISBN : 9872225745476
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	MASSON
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique	ELLIPSES ISBN : 9782729823009
DANTZER J.-F.	Mathématiques pour l'agrégation interne, Analyse et probabilités. Cours et exercices corrigés	VUIBERT ISBN : 9782711740260
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique, Théorie de la démonstration	DUNOD ISBN : 9782100067961
DE KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
DE SEGUINS PAZZIS C.	Invitation aux formes quadratiques	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352190
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	QUE-SAIS-JE ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	SPRINGER ISBN : 9782287004165
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	DUNOD ISBN : 9782100044467
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	JACQUES GABAY ISBN : 9782876470500
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU GRENOBLE ISBN : 9782706104213
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	ELLIPSES ISBN : 9782729886469
DEMAZURE M.	Cours d'Algèbre	CASSINI ISBN : 9782842251277
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	CASSINI ISBN : 9782842251277
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	SPRINGER ISBN : 9780387984063
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN** **RUAUD** **MIQUEL** **SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés, 1ère année MPSI, PCSI, PTSI	DUNOD ISBN : 9782100039319

DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN** **RUAUD** **MIQUEL** **SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés, 2ème année MP, PC, PSI	Dunod ISBN : 9782100054121
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF ISBN : 9782130392149
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	Ellipses
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles	Cassini ISBN : 9782842250737
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	Hermann ISBN : 9782705655006
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse., Éléments d'Analyse Tome 2	Gauthier-Villars ISBN : 9782876472120
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse., Fondements de l'analyse moderne	Gauthier-Villars ISBN : 9782876472112
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	Hermann ISBN : 9782705610401
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle, Deuxième année	Gauthier-Villars ISBN : 9782040157159
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle, Première année	Gauthier-Villars ISBN : 9782100057702
DOWEK **G.** **LEVY J.-J.**	Introduction à la théorie des langages de programmation	Editions de l'X ISBN : 9782730213332
DRAPER N.R. **SMITH H.**	Applied regression analysis	Wiley ISBN : 9780471170822
DUBERTRET G.	Initiation à la cryptographie	Vuibert ISBN : 9782711770878
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF ISBN : 9782130316688
DUGAC P.	Histoire de l'analyse., Autour de la notion de limite et de ses voisinages	Vuibert ISBN : 9782711753116
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fourier series and integrals	Academics Press ISBN : 9870122264519
EBBINGHAUS **HERMES** **HIRZEBRUCH** **KOECHER** **LAMOTKE** **MAINZER** **NEUKIRSCH** **PRESTEL** **REMMERT**	Les Nombres	Vuibert ISBN : 9782711789016
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352084

EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	Ellipses ISBN : 9782729868352
ENGEL A.	Solutions d'expert vol. 1	Cassini ISBN : 9782842250515
ENGEL A.	Solutions d'expert vol. 2	Cassini ISBN : 9782842250553
EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes, Algèbre	Cédic/Nathan
EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes, Analyse. Volume 1	Cédic/Nathan
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques, Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles	Hatier
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques, Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse	Hatier
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques, Analyse 2 : Éléments de topologie générale	Hatier
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	Ellipses
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352008
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique, Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	Ellipses ISBN : 9872729890122
FELLER **W.**	An introduction to Probability theory & its applications, Volume 1	Wiley
FELLER **W.**	An introduction to Probability theory & its applications, Volume 2	Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	Masson ISBN : 9782225804182
FLORY G.	Topologie, analyse exercices tome 1	Vuibert ISBN : 9782711721467
FLORY G.	Topologie, analyse exercices tome 2	Vuibert
FLORY G.	Topologie, analyse exercices tome 3	Vuibert
FLORY G.	Topologie, analyse exercices tome 4	Vuibert
FONTANEZ C. **RANDE B.**	Les clés pour les Mines	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352176
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales, Algèbre	Ellipses ISBN : 9782729856571
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques pour lagrégation Algèbre 1	Masson ISBN : 9782225843662

FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Algèbre 1	Cassini ISBN : 9782842250300
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Algèbre 1 (seconde édition)	Cassini ISBN : 9782842251321
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Algèbre 2	Cassini ISBN : 9782842251420
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Algèbre 3	Cassini ISBN : 9782842250928
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Analyse 1	Cassini ISBN : 9782842251352
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Analyse 2	Cassini ISBN : 9782842251413
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Analyse 3	Cassini ISBN : 9782842250935
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	Hermann
FRESNEL J.	Géométrie	IREM de Bordeaux
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR Maths Bordeaux
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	Hermann ISBN : 9782705614379
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et Géométrie	Hermann ISBN : 9782705680701
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	Springer ISBN : 9780387946436
FULTON W.	Algebraic Topology	Springer ISBN : 9780387943275
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	Cassini ISBN : 9782842250188
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices, Tome 1	Dunod
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices, Tome 2	Dunod
GAREY M. **JOHNSON D.S.**	Computers and Intractability	Freeman and Co ISBN : 9780716710455
GARLING D.J.H.	Inequalities	Cambridge ISBN : 9780521699730
GATHEN J. **GERHARD J.**	Modern Computer algebra	Cambridge ISBN : 9780521826464
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	Springer ISBN : 9783540640745
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens	Cassini ISBN : 9782842250232

GOBLOT R.	Algèbre commutative	Masson ISBN : 9782225853081
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	Masson ISBN : 9782225831492
GODEMENT R.	Analyse mathématique 1	Springer ISBN : 9783540632122
GODEMENT R.	Analyse mathématique 2	Springer ISBN : 9783540634140
GODEMENT R.	Analyse mathématique 3	Springer ISBN : 9783540661429
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	Wiley ISBN : 9780801854149
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation, Topologie et Analyse fonctionnelle	Ellipses ISBN : 9782729896942
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 1 - Algèbre	PUF ISBN : 9782130458357
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 2 - Topologie et analyse réelle	PUF ISBN : 9782130458364
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel	PUF ISBN : 9782130458494
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 4 - Géométrie affine et métrique	PUF ISBN : 9782130470274
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF ISBN : 9782130471318
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M', Algèbre	Ellipses ISBN : 9782729894320
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M', Analyse	Ellipses ISBN : 9782729844493
GRAHAM **KNUTH**	Concrete mathematics	Addison Wesley ISBN : 9780201558029
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	Hermann ISBN : 9782705663339
GRANJON Y.	Informatique, Algorithmes en Pascal et en langage C	Dunod ISBN : 9782100485284
GREUB W.	Linear Algebra	Springer ISBN : 9780387901107
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	Oxford ISBN : 9780198532644
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	Wiley ISBN : 9780071139649
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences	Cambridge ISBN : 9780521585194
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	Ellipses
HAMMAD P.	Cours de probabilités	Cujas

HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	CUJAS ISBN : 9872254850707
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	SPRINGER ISBN : 9783540591108
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	OXFORD
HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing	ADDISON WESLEY ISBN : 9780321117847
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis, Volume 1	WILEY-INTERSCIENCE
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis, Volume 2	WILEY-INTERSCIENCE
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis, Volume 3	WILEY-INTERSCIENCE
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HINDRY M.	Arithmétique	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352046
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Éléments d'analyse fonctionnelle	MASSON ISBN : 9782225855733
HOCHARD M.	Algèbre, analyse, géométrie	VUIBERT ISBN : 9782711771844
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation	ADDISON WESLEY ISBN : 9780321210296
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	BELIN
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352121
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	SPRINGER VERLAG ISBN : 9780387906258
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	VUIBERT-SPRINGER
ITARD J.	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra, Tome I	FREEMAN AND CO
JACOBSON N.	Basic Algebra, Tome II	FREEMAN AND CO
KAHANE J.P. **LEMARIE-RIEUSSET P.-G.**	Séries de Fourier et ondelettes	CASSINI ISBN : 9782842250010
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	HERMANN
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C	DUNOD ISBN : 9782100487349
KNUTH D.E.	The art of computer programming, Volume 1 : Fundamental algorithms	ADDISON-WESLEY ISBN : 9780201896831

KNUTH D.E.	The art of computer programming, Volume 2 : Seminumerical algorithms	ADDISON-WESLEY ISBN : 9780201896842
KNUTH D.E.	The art of computer programming, Volume 3 : Sorting and Searching	ADDISON-WESLEY ISBN : 9780201896850
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography	SPRINGER ISBN : 9780387942933
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	ELLIPSES ISBN : 9696748024722
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	CAMBRIDGE ISBN : 9780521438490
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	CAMBRIDGE ISBN : 9780521389914
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de mathématiques pour physiciens	CASSINI ISBN : 9782842250379
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	CASSINI ISBN : 9782842250140
KUNG J.	Combinatorics	CAMBRIDGE ISBN : 9780521737944
LAAMRI EL HAJ	Mesures, intégration et transformée de Fourier, des fonctions	DUNOD ISBN : 9782100057009
LACOMME P. **PRINS C.** **SEVAUX M.**	Algorithmes de graphes	EYROLLES ISBN : 9782212113853
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF ISBN : 9782706106545
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	MASSON ISBN : 9782225821042
LANG S.	Algebra	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Algèbre linéaire, Tome 1	INTEREDITIONS ISBN : 9872729600011
LANG S.	Algèbre linéaire, Tome 2	INTEREDITIONS ISBN : 9872729600028
LANG S.	Linear Algebra	ADDISON-WESLEY
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques	ELLIPSES ISBN : 9782729860097
LASCAR D.	La théorie des modèles en peu de maux	CASSINI ISBN : 9782842251376
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	ELLIPSES ISBN : 9782729818562
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES ISBN : 9782729878429
LAX P. D.	Functional analysis	WILEY ISBN : 9780471556046
LAX P. D.	Linear Algebra	WILEY

LE BRIS G.	Maple Sugar : Initiation progressive à Maple	CASSINI ISBN : 9782842250195
LEBOEUF C. **GUEGAND J.,ROQUE J.-L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	ELLIPSES ISBN : 2729887296
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	JACQUES GABAY
LEHMANN D. **SACRE C.**	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 1 : Topologie	MASSON ISBN : 9872225806689
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 3 : Intégration et sommation	MASSON ISBN : 9782225806797
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 4 : Analyse en dimension finie	MASSON ISBN : 9782225808784
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 5 : Analyse fonctionnelle	MASSON ISBN : 9782225812262
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 2 : Dérivation	MASSON ISBN : 9782225808760
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 1 - Algèbre 1	ELLIPSES ISBN : 9782729888330
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 2 - Algèbre et géométrie	ELLIPSES ISBN : 9782729888349
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 3 - Analyse 1	ELLIPSES ISBN : 9782729801531
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 4 - Analyse 2	ELLIPSES ISBN : 9782729888357
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	MASSON
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques, Tome 1 pour A-A' : Algèbre	DUNOD
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques, Tome 1 pour M-M' : Algèbre	DUNOD ISBN : 9782040070748
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques, Tome 2 : Analyse	DUNOD ISBN : 9782040071356
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques, Tome 3 : Géométrie et cinématique	DUNOD
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques, Tome 4 : Équations différentielles, intégrales multiples	DUNOD ISBN : 9782040026066
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	ARMAND COLIN ISBN : 9782200210397

LION G.	Algèbre pour la licence, Cours et exercices (2ème édition)	Vuibert ISBN : 9782711789603
LIRET **F.**	Maths en pratique à l'usage des étudiants	Dunod ISBN : 9782100496297
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	Cambridge ISBN : 9780521812207
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre, 1 : Structures fondamentales	Gauthier-Villars
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre, 2 : Les grands théorèmes	Gauthier-Villars
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	Springer ISBN : 9780387906249
MAKAROV B.M. **GOLUZINA M.G.** **LODKIN A.A.** **PODKORYTOV A.N.**	Problèmes d'analyse réelle	Cassini ISBN : 9782842251246
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	Masson ISBN : 9782225699719
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	Masson ISBN : 9782225686408
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	Hermann
MANIVEL	Fonctions symétriques, polynômes de Schubert	SMF ISBN : 2856290663
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clés pour l'X (2)	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352152
Manuels Matlab	Using Matlab version 5	Matlab
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle, Tome 2 : Exercices et corrigés	PUF
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle, Tome 3 : Exercices et corrigés	PUF ISBN : 9782130401469
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle, Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF ISBN : 9782130401469
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	De Boeck Université ISBN : 9782804116705
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses ISBN : 9782729846725
MENEZES A. **VAN OORSCHOT P.** **VANSTON S.**	Handbook of applied cryptography	CRC Press ISBN : 9780849385230
MÉRINDOL J.Y.	Nombres et algèbre	EDP Sciences ISBN : 9782868838209
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	Springer ISBN : 9780387947617
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction., École Polytechnique	Ellipses ISBN : 9782729887164
MEUNIER	Agrégation interne de Mathématiques, Exercices d'oral corrigés et commentés, Tome 2	PUF ISBN : 9782130489801

MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie	Ellipses ISBN : 9782729852184
MEYRE T.	Séries, intégrales et probabilités. Préparation à l'agrégation interne	E-livre
MEYRE T.	Probabilités. Cours et exercices corrigés	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352374
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF ISBN : 9782130422594
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	Cambridge ISBN : 9780521780988
MNEIMNÉ R.	Éléments de géométrie : action de groupes	Cassini ISBN : 9782842250034
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352015
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales, Analyse : topologie et séries	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales, Analyse : suites et séries de fonctions	Ellipses ISBN : 9782729892937
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI	Dunod ISBN : 9782100029747
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT	Dunod ISBN : 9782100033126
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI	Dunod ISBN : 9782100030767
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Analyse 3 MP, PSI, PC, PT	Dunod ISBN : 9782100033669
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Analyse 4 MP, PSI, PC, PT	Dunod ISBN : 9782100034666
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Exercice d'algèbre et géométrie MP	Dunod ISBN : 9782100059775
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique, Tome 1	Vuibert ISBN : 9782711721418
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique, Tome 2	Vuibert
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel	Seuil ISBN : 9782020106528
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	Masson ISBN : 9782225827037
NIVEN I.	Irrational numbers	Mathematical Association of America ISBN : 9870883850112
NORRIS J.R.	Markov chains	Cambridge ISBN : 9780521633963

O'ROURKE J.	Computational geometry in C	CAMBRIDGE ISBN : 9780521649766
OPREA J.	Differential geometry	PRENTICE HALL ISBN : 9780133407389
OUVRARD J.Y.	Probabilités 1 (capes, agrégation)	CASSINI ISBN : 9782842250041
OUVRARD J.Y.	Probabilités 1 (capes, agrégation)	CASSINI ISBN : 9782842250041
OUVRARD J.Y.	Probabilités 2 (maitrise, agrégation)	CASSINI ISBN : 9782842250102
PAPADIMITRIOU C.	Computational complexity	ADDISON WESLEY ISBN : 9780201530827
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	SPRINGER ISBN : 9783540602262
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications	DUNOD ISBN : 9782100512171
PEDOE D.	Geometry - A comprehensive course	DOVER ISBN : 9780486658124
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	SPRINGER ISBN : 9780387947785
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ELLIPSES ISBN : 9782729855529
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école : nombres, mesure, géométrie	CASSINI ISBN : 9782842250577
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI ISBN : 9782842250218
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	SPRINGER ISBN : 9783540673873
PETKOVSEK M. **WILF H.** **ZEILBERGER D.**	A=B	A.K. PETERS ISBN : 9781568810638
PEVZNER P.	Computational molecular biology	MIT PRESS ISBN : 9780262161978
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis, Volume I	SPRINGER VERLAG ISBN : 9783540636404
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis, Volume II	SPRINGER VERLAG ISBN : 9783540636862
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES
POMMELLET A.	Agrégation de mathématiques. Cours d'analyse	ELLIPSES
PRASOLOV V.	Polynomials	SPRINGER ISBN : 9783540407140
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire	CASSINI ISBN : 9782842250676
PREPARATA F. **SHAMOS M.**	Computational geometry, an introduction	SPRINGER ISBN : 9780387961316

PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal	Cambridge ISBN : 9780521375160
PUTZ J. F.	Maple animation	Chapman and Hall ISBN : 9781584883784
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse	Dunod ISBN : 9782225848841
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	Masson ISBN : 9782225848841
RALSTON A. **RABINOWITCH P.**	A first course in numerical analysis	International Student Edition
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 1- Algèbre	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 2- Algèbre et applications à la géométrie	Masson ISBN : 9782225634048
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 3- Topologie et éléments d'analyse	Masson ISBN : 9782225771873
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 4- Séries et équations différentielles	Masson ISBN : 9782225840679
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 5- Applications de l'analyse à la géométrie	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions, Algèbre	Masson ISBN : 9782225813146
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions, Analyse 1	Masson ISBN : 9782225800986
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions, Analyse 2	Masson ISBN : 9782225805783
RAMIS J.- P. **WARUSFEL A.** **BUFF X.** **ARNIER J.** **HALBERSTADT E.** **LACHAND-ROBERT T.** **MOULIN F.** **SAULOY J.**	Mathématiques Tout-en-un pour la licence, Cours complet avec 270 exercices corrigés, niveau L1	Dunod ISBN : 9782100496143
RANDÉ B. **TAÏEB F.**	Les clés pour l'X	0 ISBN : 9782916352091
RANDÉ **B.**	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan	Cassini ISBN : 9782842250652
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	Wiley ISBN : 9780471708232

REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques	Livre de Poche ISBN : 9782253130130
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory	Springer ISBN : 9780387982212
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	Hermann
RIESZ E. **NAGY B. SZ**	Leçons d'analyse fonctionnelle	Gauthier-Villars
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	Springer ISBN : 9783540659792
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	Vuibert ISBN : 9782711753208
ROLLAND R.	Théorie des séries, 2- Séries entières	Cédic/Nathan
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP Sciences ISBN : 9782868834256
ROMBALDI J.E.	Interpolation, approximation, Analyse pour l'agrégation	Vuibert ISBN : 9782711771868
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP Sciences ISBN : 9772868834073
ROUDIER H.	Algèbre linéaire. Cours et exercices	Vuibert ISBN : 9782711724857
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et Technologie	Springer (SUMAT) ISBN : 9780387692128
ROUVIERE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	Cassini ISBN : 9782842250089
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	Masson
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	Masson
RUDIN W.	Functional analysis	Mc Graw Hill
RUDIN W.	Real and complex analysis	Mc Graw Hill
SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann	Cassini ISBN : 9782842250850
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352039
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates	Vuibert ISBN : 9782711748075
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	Masson
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	Hermann
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1	Ellipses ISBN : 9782729898519
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	Vuibert ISBN : 9782711789849
SCHNEIER B.	Applied cryptography	Wiley ISBN : 9780471117094

SCHWARTZ L.	Analyse, I Topologie générale et analyse fonctionnelle	HERMANN
SCHWARTZ L.	Analyse, II Calcul différentiel et équations différentielles	HERMANN ISBN : 9782705661625
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse	HERMANN
SCHWARTZ L.	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques	HERMANN
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java	PEARSON EDUCATION ISBN : 9782744070242
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C	DUNOD ISBN : 9780201314525
SEDGEWICK R.	Algorithms	ADDISON WESLEY ISBN : 9782744070242
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes	SPRINGER ISBN : 9780387818006
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique	DUNOD ISBN : 9782100055159
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SHAPIRO H.	Introduction to the theory of numbers	DOVER ISBN : 9780486466699
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	DUNOD ISBN : 9782100052349
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	THOMSON C.T. ISBN : 9780619217648
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	DUNOD ISBN : 9782100045310
SKANDALIS G.	Algèbre générale et algèbre linéaire. Préparation à l'agrégation interne	E-LIVRE
SKANDALIS G.	Algèbre générale et algèbre linéaire et un peu de géométrie. Agrégation interne	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352350
SKANDALIS G.	Analyse-Résumés et exercices. Préparation à l'agrégation interne	E-LIVRE
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	WADDWORTH AND BROOKS ISBN : 9780534065465
STEWART I.	Galois theory	CHAPMAN AND HALL ISBN : 9780412345500
STROUSTRUP B.	Le langage C++	PEARSON EDUCATION ISBN : 9782744070037
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	CASSINI ISBN : 9782842250270
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352060
TAUVEL P.	Cours d'algèbre	DUNOD ISBN : 9782100045907
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	DUNOD ISBN : 9782100058709

TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 2	Masson ISBN : 9782225844416
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	Masson ISBN : 9782225827338
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Institut Elie Cartan ISBN : 9782903594121
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	S.M.F. ISBN : 9782856290329
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF ISBN : 9782130483991
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S.M.F. ISBN : 9782856290450
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	Hermann ISBN : 9782705614416
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	Masson
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	Vuibert ISBN : 9782711771240
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM des Pays de Loire
TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing	Seuil ISBN : 9782020135719
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique, I Théorie des fonctions	Masson
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique, II Équations fonctionnelles - Applications	Masson
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	Masson ISBN : 9782225844508
VAZIRANI V.	Algorithmes d'approximation	Springer ISBN : 9782287006777
VINBERG E.B.	A course in algebra	AMS ISBN : 9780821834138
WAGSCHAL C.	Distributions, Analyse microlocale, Équations aux dérivées partielles	Hermann ISBN : 9782705680817
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes, Équations différentielles	Hermann ISBN : 9782705664565
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation	Ellipses ISBN : 9782729811402
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	Classiques Hachette
WARUSFEL **ATTALI** **COLLET** **GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques, Analyse	Vuibert ISBN : 9782711789573

WARUSFEL **ATTALI** **COLLET** **GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques, Arithmétique	VUIBERT ISBN : 9782711789535
WARUSFEL **ATTALI** **COLLET** **GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques, Géométrie	VUIBERT ISBN : 9782711789542
WARUSFEL **ATTALI** **COLLET** **GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques, Probabilités	VUIBERT ISBN : 9782711789580