MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

JBE MAT 1

SESSION 2023

CAPES A AFFECTATION LOCALE A MAYOTTE
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours externe du CAPES à affectation locale à Mayotte de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
JBE	1300E	101	0312

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 0664 – D'après documents fournis

Problème 1 : suite d'intégrales

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel n , par $\mathrm{I}_n = \int_2^3 (x-2)^n \mathrm{e}^x \, dx$.

1. Calculer I_0.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).
3. La suite (I_n) est-elle minorée ?
4. Établir la convergence de la suite (I_n).
5. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
   En déduire les valeurs exactes de I_1 puis de I_2.
6. Soit p un entier naturel non nul.
   Écrire un algorithme, en langage Python, permettant de calculer I_p.

Problème 2 : complexes et médiatrices

Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct.
On considère les points A et B d'affixes respectives $z_\mathrm{A} = 1$ et $z_\mathrm{B} = 2$.
C est le cercle de centre A et de rayon 1. T est la tangente au cercle C au point B.

Pour tout nombre réel θ de l'intervalle $]-\pi; \pi]$, on pose $z_\theta = (\cos\theta + 1) + i \sin\theta$.
On note M_θ le point du plan d'affixe z_θ.

Partie A

1. Donner une équation de la droite T.
2. Justifier que l'ensemble des points M_θ lorsque θ varie sur $]-\pi; \pi]$ est le cercle C.
3. Que peut-on dire du point M_θ lorsque $\theta = 0$?
4. Les droites (OM_θ) et T sont-elles sécantes quel que soit le nombre réel θ appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$?
5. Soit θ un réel non nul appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi[$.
   Déterminer l'affixe du point N appartenant au cercle C tel que le triangle $\mathrm{OM_\theta N}$ soit rectangle en O.

Partie B - $\theta = \frac{2\pi}{3}$. On note M le point $\mathrm{M}_{\frac{2\pi}{3}}$.

1. Vérifier que l'affixe du point N défini dans la question A.5 est $z_\mathrm{N} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice D du segment [MN].
3. K est le point d'intersection des droites (OM) et T.
   L est le point d'intersection des droites (ON) et T (on admet son existence).
   Déterminer l'affixe du point I milieu du segment [KL].
4. En déduire une équation cartésienne de la médiatrice D' du segment [KL].
5. Démontrer qu'il existe un point J équidistant des points N, M, K et L.
   On déterminera ses coordonnées.

Problème 3 : géométrie dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1; 2; 4)$, $B(1; 1; 3)$, $C(-1; 3; 3)$ et $D(3; 3; 5)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Démontrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (ABC).
3. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
4. Déterminer une équation du plan (ACD).
5. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ACD).
   Δ est la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{n}$.
   Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite Δ et du plan (ACD).
6. Déterminer l'aire du triangle ACD.

Problème 4 : équation fonctionnelle

On s'intéresse dans ce problème aux fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété (E) :

Pour tous réels x et y, $f(x+y) \times f(x-y) = (f(x))^2 \times (f(y))^2$ (E).

Partie A - Existence d'une fonction satisfaisant la propriété (E).

Soit m un nombre réel. On note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = \mathrm{e}^{mx^2}$.
Justifier que la fonction f_m vérifie la propriété (E).

Partie B - Propriétés des fonctions satisfaisant la propriété (E).

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 = x^4$.
2. En déduire que, si la fonction f satisfait la propriété (E), alors $f(0) \in \{-1; 0; 1\}$.
3. Démontrer que, si f est une fonction s'annulant en 0 et satisfaisant la propriété (E), alors f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f une fonction satisfaisant la propriété (E).
   Démontrer que, s'il existe un nombre réel non nul a tel que $f(a) = 0$, alors, pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$.
   On admet que l'on peut en déduire que f est la fonction nulle.

5. On suppose maintenant que f vérifie la propriété (E) et que f n'est pas la fonction nulle.
   Déduire de la question précédente que la fonction f est soit strictement positive sur $\mathbb{R}$, soit strictement négative sur $\mathbb{R}$.

Partie C - Identification des fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la propriété (E).

Soit f une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété (E).

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln[f(x)]$.

1. Démontrer, à l'aide de la question 2. de la partie B, que $g(0) = 0$.
2. Vérifier que, pour tous réels x et y : $g(x + y) + g(x - y) = 2\big(g(x) + g(y)\big)$.
3. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence et de la question précédente, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g(n) = g(1) \times n^2$.

4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $g(nx) = n^2 g(x)$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel p non nul : $g\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{g(1)}{p^2}$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel p non nul : $g\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{n^2}{p^2}\ g(1)$.

5. On admet que, pour tout nombre réel x, $g(x) = g(1) \times x^2$.
   En déduire l'expression des fonctions f définies, continues et strictement positives sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété (E).