MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

**EAD MAT 1**

**SESSION 2020**

# AGREGATION
# CONCOURS EXTERNE SPÉCIAL

## Section : MATHÉMATIQUES

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.*

*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

**Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents, sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. Il est possible d'utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.**

L'épreuve comporte deux parties :

- Une première partie, composée d'**exercices**. Les candidats sont invités à consacrer au moins un tiers du temps de l'épreuve à cette partie en cherchant à traiter les six exercices numérotés 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
- Un problème à traiter **au choix** parmi deux proposés : le Problème 1, plutôt orienté « Algèbre et Géométrie » ou bien le Problème 2, plutôt orienté « Analyse et Probabilités ». **Le candidat devra indiquer clairement sur sa copie le problème qu'il choisit. Seul ce choix sera pris en compte dans l'évaluation.** Au moins la moitié du temps de l'épreuve devrait être consacrée à l'un de ces problèmes.

Le barème tient compte de cette répartition indicative du temps à accorder à chaque partie.

# Exercices

### Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_0 + 2u_1 + \cdots + 2^n u_n}{1 + 2 + \cdots + 2^n}.$$

**a.** Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\ell$.

*Indication : le candidat pourra, s'il le juge utile, commencer par traiter le cas où $\ell = 0$.*

**b.** Dans cette question, on suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Déterminer un équivalent simple de $v_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**c.** Montrer que si la série de terme général $u_n$ est absolument convergente, alors la série de terme général $v_n$ l'est aussi.

**d.** Dans cette question, on considère les suites de fonctions $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $]-1, 1[$ par

$$U_n(x) = x^n \quad \text{et} \quad V_n(x) = \frac{U_0(x) + 2U_1(x) + \cdots + 2^n U_n(x)}{1 + 2 + \cdots + 2^n}.$$

La série de fonctions $\sum V_n$ converge-t-elle simplement sur $]-1, 1[$ ? uniformément sur $]-1, 1[$ ? uniformément sur tout segment $[-a, a]$ tel que $0 < a < 1$ ?

### Exercice 2

Soit $f$ une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives. On pose, pour tout réel $x > 0$,

$$g(x) = \left( \int_0^1 f(t)^x \, dt \right)^{1/x}.$$

**a.** Montrer que $g$ est croissante.

*Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Hölder.*

**b.** Montrer que $g(x)$ tend vers $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} f(t)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 3**

Soit $E$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$, de dimension finie $n \geqslant 1$.

**a.** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ qui commute avec tous les projecteurs de $E$.
 (i) Montrer que tout vecteur non nul de $E$ est un vecteur propre de $u$.
 (ii) Montrer que $u$ est une homothétie.

**b.** Le centre d'un groupe $(G, \cdot)$ est $Z(G) = \{x \in G \mid \forall\, y \in G,\ xy = yx\}$.
Déterminer le centre du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ et celui du groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(E)$.

*Indication : on pourra utiliser des automorphismes qui sont combinaisons linéaires d'un projecteur et de l'identité* $\mathrm{Id}_E$.

**c.** Montrer que les groupes $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)\times\mathbb{R}^*$ sont isomorphes si et seulement si $n = \dim E$ est impair.

**Exercice 4**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de $A$, dont les coefficients sont les cofacteurs de $A$.

**a.** Déterminer le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction du rang de $A$, qu'on note $\mathrm{rg}\, A$.

*On distinguera trois cas :* $\mathrm{rg}\, A = n$, $\mathrm{rg}\, A \leqslant n-2$, $\mathrm{rg}\, A = n-1$.

**b.** Soit $X = \{\mathrm{Com}(A) \mid A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset X$.

**c.** (i) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Quel est l'adhérence de $X$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ?
 (ii) Déterminer l'intérieur de $X$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Exercice 5**

Soit $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On pose, pour tout réel $s > 0$,

$$L(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx}\, dx.$$

**a.** Montrer que la fonction $L$ est de classe $C^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de ses dérivées successives.

**b.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes et suivant toutes une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, la variable aléatoire $S_n = X_1 + ... + X_n$ admet pour densité la fonction $\rho_n$ définie par

$$\forall\, t > 0, \quad \rho_n(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Donner la densité de la variable $T_n = S_n/n$.

**c.** En considérant l'espérance des variables aléatoires $Y_n = f(T_n)$, montrer que si $L$ est la fonction nulle, alors $f$ aussi.

**Exercice 6**

Les variables et vecteurs aléatoires considérés dans cet exercice sont définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Soit $n$ un entier $\geqslant 1$. L'espace $\mathbb{R}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. Soit

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que $X$ est de carré intégrable, c'est-à-dire que $\mathrm{E}(\|X\|^2) < +\infty$.

La covariance de deux variables aléatoires réelles $Y$ et $Y'$ est notée $\mathrm{Cov}(Y, Y')$. La matrice de covariance du vecteur $X$, notée $C(X)$, est définie par

$$C(X) = \big(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

**a.** (i) Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la variable aléatoire $Y = \langle v, X \rangle$ admet une variance, égale à ${}^t v C(X) v$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Z = AX$. Exprimer $C(Z)$ en fonction de $A$ et $C(X)$.

**b.** Soit $M$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un vecteur aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de carré intégrable, tel que $C(X) = M$ si et seulement si la matrice $M$ est symétrique positive.

**c.** On suppose dans cette question que le vecteur aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est de carré intégrable et centré : $\mathrm{E}(X) = 0$.

(i) Soit $H$ un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et $v$ un vecteur normal à $H$. Montrer que l'événement $[X \in H]$ est presque sûr si et seulement si $v \in \mathrm{Ker}(C(X))$.

(ii) Montrer qu'il existe un plus petit sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $X \in F$ presque sûrement et le déterminer en fonction de $C(X)$.

# Problème d'algèbre et géométrie

Le problème porte sur les notions de groupe dérivé et de groupe résoluble. Dans la première partie, on établit les propriétés les plus élémentaires concernant ces notions et on détermine les groupes dérivés de quelques groupes usuels ; enfin on établit un célèbre théorème de Burnside sur les groupes résolubles, en admettant un résultat intermédiaire qui sera prouvé à la fin du problème.
Dans le seconde partie, on étudie quelques groupes matriciels : on y détermine notamment leurs groupes dérivés et on examine leur résolubilité.
La troisième partie, indépendante de la deuxième, a pour objectif d'établir le résultat admis à la fin de la partie I. Elle fait intervenir les notions d'entier algébrique et de caractère irréductible d'un groupe fini.

**Notations et terminologie.**

Dans tout le problème, les anneaux sont supposés unitaires et les corps commutatifs.
Si $K$ désigne un corps, on note $K^* = K \setminus \{0\}$.
La matrice identité de l'anneau $\mathcal{M}_n(K)$ est notée $I_n$.
Si $A$ est une matrice à coefficients complexes, la matrice adjointe est notée $A^* = {}^t\bar{A}$.
On identifie matrices et applications linéaires canoniquement associées.
Un groupe $G$ d'élément neutre $e$ est dit simple s'il n'est pas réduit à $\{e\}$ et si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{e\}$ et $G$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, le groupe symétrique d'indice $n$ (groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$) est noté $\mathfrak{S}_n$ et son sous-groupe alterné est noté $\mathfrak{A}_n$.
Si $K$ est un corps de caractéristique différente de 2 et $V$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique $Q$, le groupe orthogonal de $Q$ est :

$$O(Q) = \{u \in \mathrm{GL}(V) \mid \forall x \in V,\ Q(u(x)) = Q(x)\}$$

et le groupe spécial orthogonal de $Q$ est :

$$\mathrm{SO}(Q) = \{u \in O(Q) \mid \det u = 1\}.$$

Si $Q$ désigne le carré de la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$, les deux groupes en question sont notés $O_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

## I. Groupe dérivé et résolubilité

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On note $e$ son élément neutre. Si $A$ est une partie de $G$, on note $\langle A \rangle$ le sous-groupe de $G$ engendré par $A$.
Le **commutateur** de deux éléments $x$ et $y$ de $G$ est l'élément $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.
Le **groupe dérivé** de $G$, noté $\mathrm{D}(G)$, est le sous-groupe engendré par les commutateurs :

$$\mathrm{D}(G) = \langle \mathcal{C} \rangle \qquad \text{où} \qquad \mathcal{C} = \Big\{[x, y] \mid x, y \in G\Big\}.$$

On pose $\mathrm{D}^0(G) = G$ et on définit par récurrence le groupe dérivé d'ordre $n$ de $G$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{D}^n(G) = \mathrm{D}(\mathrm{D}^{n-1}(G))$.

Tous les groupes considérés dans cette partie seront notés multiplicativement.

### 1. Un premier exemple

On considère dans cette question le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.

**a.** Montrer que $\mathrm{D}(\mathfrak{S}_3) \subset \mathfrak{A}_3$.

**b.** Soit les transpositions $\sigma = (1\,2)$ et $\tau = (1\,3)$ et $\varphi$ un élément de $\mathfrak{S}_3$. Calculer $\varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$. En déduire la valeur du commutateur $[\sigma, \tau]$.

**c.** Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 1$, le groupe dérivé d'ordre $n$ de $\mathfrak{S}_3$.

### A. Propriétés des groupes dérivés

**2. a.** Soit $G_1$ et $G_2$ deux groupes et $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes. Soit $A$ un sous-ensemble de $G_1$. Montrer que $f(A)$ est une partie génératrice de $f(\langle A \rangle)$. En déduire que $f(\mathrm{D}(G_1)) = \mathrm{D}(f(G_1))$.

**b.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe dérivé d'ordre $n$ d'un groupe $G$ est un sous-groupe distingué de $G$.

**3.** Soit $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe de $G$. Établir l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(*i*) $\mathrm{D}(G) \subset H$ ;

(*ii*) $H$ est distingué dans $G$ et $G/H$ est abélien.

### B. D'autres exemples

**4.** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 5. Déterminer le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$, puis les $\mathrm{D}^k(\mathfrak{S}_n)$ pour tout entier $k > 1$.

*Indication : si $a, b, c, d, e$ sont cinq éléments distincts de $\{1, ..., n\}$, on pourra calculer le commutateur des cycles $\sigma = (a\ b\ c)$ et $\tau = (c\ d\ e)$.*

**5.** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Le plan complexe $\mathbb{C}$ est muni de sa structure canonique d'espace euclidien de dimension 2. On note $D_n$ le groupe des isométries de ce plan qui conservent le polygone régulier $\mathbb{U}_n$ formé des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité. Lister les éléments du groupe $D_n$ puis déterminer son groupe dérivé $\mathrm{D}(D_n)$.

*Indication : si $r$ désigne la rotation de centre l'origine et d'angle $2\pi/n$, on pourra considérer le quotient $D_n/\langle r^2 \rangle$ et déterminer son cardinal.*

**6.** On considère le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ des rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$.

**a.** Soit $r \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $r$ et $r^{-1}$ sont conjugués dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

**b.** En déduire que tout élément du groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est un commutateur dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

**7.** Montrer que pour tout entier $n > 3$, $\mathrm{D}(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

### C. Résolubilité et théorème de Burnside

Un groupe $G$ est dit **résoluble** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{D}^n(G) = \{e\}$.

**8.** Soit $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe distingué de $G$. Montrer que $G$ est résoluble si et seulement si les deux groupes $H$ et $G/H$ sont résolubles.

**9.** Montrer que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ est résoluble.

**10.** Le théorème de Burnside (1904)

**a.** Soit $p$ et $q$ deux nombres premiers distincts et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ non tous deux nuls. Soit $G$ un groupe d'ordre $p^\alpha q^\beta$. Montrer qu'il existe un élément de $G$ différent de l'élément neutre dont le cardinal de la classe de conjugaison est égal à 1 ou à une puissance d'un nombre premier.

**b.** On admet dans cette question le théorème suivant (qui sera démontré à la fin de la partie III) :

*Soit $G$ un groupe fini non abélien dont une classe de conjugaison autre que celle de l'élément neutre a pour cardinal 1 ou une puissance d'un nombre premier. Alors $G$ n'est pas simple.*

Montrer que si $p$ et $q$ sont deux nombres premiers distincts et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, alors tout groupe fini d'ordre $p^\alpha q^\beta$ est résoluble.

# II. Étude de quelques groupes de matrices

### A. Le groupe $\mathrm{SL}_2(K)$

Dans cette section, on suppose que $K$ est un corps contenant au moins 4 éléments.

**11.** On désigne par $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{SL}_2(K)$ qui sont triangulaires (inférieures ou supérieures) et dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.
Montrer que $\mathcal{T}$ est une partie génératrice du groupe $\mathrm{SL}_2(K)$.

*Indication : on pourra s'inspirer de l'algorithme du pivot de Gauss.*

**12.** Montrer que $\mathrm{D}(\mathrm{SL}_2(K)) = \mathrm{SL}_2(K)$.

*Indication : on pourra calculer le commutateur $[M, N]$ des deux matrices*

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**13.** Dans cette question, on montre que les éléments du groupe dérivé de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ne sont pas tous des commutateurs.

**a.** Soit $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Montrer que si $M$ est semblable à $-M$, alors elle est aussi semblable à $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**b.** Vérifier qu'il n'existe pas de matrice $Q \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que $QR = -RQ$. En déduire que $-I_2$ est un élément de $\mathrm{D}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ qui n'est pas un commutateur dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

**14.** Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est une partie connexe de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

### B. Le groupe de Lorentz

Dans cette section, on munit l'espace $\mathbb{R}^4$ de la forme quadratique $Q$ définie par :

$$\forall\, X = (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4,\ Q(X) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

**15.** Déterminer l'orthogonal (au sens de $Q$) du vecteur $e_1 = (1, 0, 0, 0)$.

Le groupe orthogonal et le groupe spécial orthogonal associés à $Q$ sont notés $O_{1,3}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_{1,3}(\mathbb{R})$ respectivement.
On identifie les éléments de $O_{1,3}(\mathbb{R})$ à leur matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On rappelle que $O_{1,3}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que

$${}^tAJA = J, \qquad \text{où } J \text{ désigne la matrice } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$S = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid Q(X) = 1\} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} S^+ &= \{(t,x,y,z) \in S \mid t > 0\}, \\ S^- &= \{(t,x,y,z) \in S \mid t < 0\}. \end{aligned}$$

**16.** Soit $A \in O_{1,3}(\mathbb{R})$. Montrer que l'image $A(S)$ de l'ensemble $S$ par $A$ est égale à $S$, que $S^+$ est connexe puis que l'on a

$$(a) \begin{cases} A(S^+) = S^+ \\ A(S^-) = S^- \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad (b) \begin{cases} A(S^+) = S^- \\ A(S^-) = S^+. \end{cases}$$

*Dans le cas* $(a)$*, on dit que* $A$ *« conserve le sens du temps », et dans le cas* $(b)$ *que* $A$ *« renverse le sens du temps ».*

**17.** Montrer que pour tout $A = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,4\}} \in O_{1,3}(\mathbb{R})$, on a $a_{1,1} \neq 0$ et que l'application

$$f : \begin{pmatrix} O_{1,3}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \{-1,1\}^2 \\ A & \longmapsto & \left(\dfrac{a_{1,1}}{|a_{1,1}|}, \det A\right) \end{pmatrix}$$

est un morphisme de groupes surjectif.

On note dans la suite de cette partie $\mathcal{H}_2$ l'ensemble des matrices hermitiennes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ :

$$\mathcal{H}_2 = \{H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid H = H^*\}$$

et l'on définit l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$\Phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathcal{H}_2 \\ (t,x,y,z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} t+x & y-iz \\ y+iz & t-x \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

On observera que la forme quadratique $Q$ se transporte sur $\mathcal{H}_2$ par $\Phi$ et devient le déterminant : pour tout $X \in \mathbb{R}^4$, $Q(X) = \det(\Phi(X))$.
Enfin on considère l'action du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}_2$ définie par :

$$\forall (P,H) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_2,\ P \odot H = PHP^*.$$

**18.** Montrer que pour toute matrice $H = \Phi(t,x,y,z)$ avec $(t,x,y,z) \in S^+$, il existe $P \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ tel que $P \odot H = I_2$.

**19.** On note $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2)$ le groupe des permutations de l'ensemble $\mathcal{H}_2$ et $T : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2)$ le morphisme de groupes associé à l'action $\odot$, défini par $T(P)(H) = P \odot H$ pour tous $P \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $H \in \mathcal{H}_2$.
On pose enfin, pour tout $P \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\Theta(P) = \Phi^{-1} \circ T(P) \circ \Phi$.

**a.** Montrer que $\Theta$ est un morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans le groupe linéaire de $\mathbb{R}^4$. Déterminer son noyau.

**b.** Montrer que $\Theta(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \subset \mathrm{SO}_{1,3}(\mathbb{R})$.

**20.** On note $W$ le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ d'équation $t = 0$, que l'on munit de la structure euclidienne induite par $-Q$.

Soit $X = (0, a, b, c) \in W$ tel que $Q(X) = -1$. Montrer que $\Theta(i\Phi(X))$ laisse $W$ stable et que l'isométrie induite par $\Theta(i\Phi(X))$ sur $W$ est la rotation vectorielle d'axe $\mathbb{R}X$ et d'angle $\pi$.
*Indication : on pourra calculer l'image de* $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ *par* $\Theta(i\Phi(X))$.
En déduire que pour tout $R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $\Theta(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ contient la matrice

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

**21.** Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \Theta(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ (le morphisme $f$ a été défini à la question 17).
*Indication : on pourra montrer et exploiter le fait que le groupe* $\Theta(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ *agit transitivement sur l'ensemble* $S^+$.

**22.** Montrer que $O_{1,3}(\mathbb{R})$ possède quatre composantes connexes et que celle qui contient $I_4$ est un groupe isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{-I_2, I_2\}$.

**23.** Le groupe $O_{1,3}(\mathbb{R})$ est-il résoluble ? Déterminer son groupe dérivé.

### C. Un groupe orthogonal en dimension 2 sur un corps fini

Dans cette section, on considère un corps fini de cardinal $q$ impair, que l'on note $\mathbb{F}_q$. Soit $\alpha$ un élément de $\mathbb{F}_q$ qui n'est pas un carré :

$$\forall\, x \in \mathbb{F}_q,\ \ x^2 \neq \alpha.$$

Soit $L$ un corps de rupture du polynôme $X^2 - \alpha$ sur $\mathbb{F}_q$. On note $\sqrt{\alpha}$ une racine de ce polynôme dans $L$.

**24.** Justifier brièvement que tout élément $z$ de $L$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + y\sqrt{\alpha}$ avec $(x, y) \in (\mathbb{F}_q)^2$ et montrer que les seuls automorphismes de $\mathbb{F}_q$-algèbre de $L$ sont l'identité et

$$\sigma\ :\ x + y\sqrt{\alpha}\ \mapsto\ x - y\sqrt{\alpha}.$$

On munit le $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel $L$ de la forme quadratique $Q$ définie par

$$\forall\, (x, y) \in (\mathbb{F}_q)^2,\ \ Q(x + y\sqrt{\alpha}) = x^2 - \alpha y^2.$$

**25. a.** Déterminer les vecteurs isotropes de $Q$ (c'est-à-dire les $z \in L$ tels que $Q(z) = 0$) et montrer que le seul élément du groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(Q)$ ayant des points fixes non nuls est $\mathrm{Id}_L$.

**b.** Soit $G = \{g \in L^* \mid g\sigma(g) = 1\}$. On admettra sans vérification que $G$ est un sous-groupe multiplicatif de $L^*$. Pour tout $g \in G$, on définit

$$u_g : \begin{pmatrix} L & \longrightarrow & L \\ z & \longmapsto & gz \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'application $g \mapsto u_g$ est un isomorphisme de groupes de $G$ sur $\mathrm{SO}(Q)$.
En déduire que le groupe $O(Q)$ est résoluble.

**26. a.** Montrer :

$$\forall\, (a, b) \in (\mathbb{F}_q^*)^2,\ \forall\, c \in \mathbb{F}_q,\ \exists\, (x, y) \in (\mathbb{F}_q)^2,\quad ax^2 + by^2 = c.$$

**b.** Déterminer le cardinal du groupe orthogonal $O(Q)$.

**27.** Montrer qu'il existe un entier $n$ tel que $O(Q)$ soit isomorphe au groupe diédral $D_n$ (défini à la question 5 de la partie I).

# III. Entiers algébriques et caractères irréductibles

## A. Entiers algébriques

On appelle entier algébrique tout nombre complexe qui est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers algébriques.

**28.** Déterminer $\mathcal{A} \cap \mathbb{Q}$.

**29. a.** Soit $a \in \mathbb{C}$. On note $\mathbb{Z}[a]$ le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par $a$. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

- $(i)$ $a$ est un entier algébrique ;
- $(ii)$ $\mathbb{Z}[a]$ est de type fini en tant que groupe abélien ;
- $(iii)$ il existe un sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant $a$ et qui est de type fini en tant que groupe abélien.

**b.** Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

**30.** Soit $a \in \mathbb{C}$ un entier algébrique. Montrer que son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ est unitaire à coefficients entiers.

**31.** Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation d'un groupe fini $G$ dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V$ de dimension finie. On note $\chi : g \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(g))$ le caractère de cette représentation. Montrer que pour tout $g \in G$, $\chi(g)$ est un entier algébrique.

**32.** Soit $n$ et $d$ deux entiers naturels non nuls et $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes tels que $z_1^d = \cdots = z_n^d = 1$. On suppose que le nombre

$$a = \frac{z_1 + \ldots + z_n}{n}$$

est un entier algébrique non nul. On note $P$ son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ et $K = \mathbb{Q}[e^{2i\pi/d}]$.

**a.** Soit $b \in \mathbb{C}$ une racine de $P$. Montrer qu'il existe un morphisme de corps $f : K \to \mathbb{C}$ tel que $f(a) = b$.

**b.** Montrer que $|b| \leqslant 1$ puis que $z_1 = \ldots = z_n$.

## B. Caractères irréductibles

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini d'élément neutre noté $e$. On considère le groupe additif $\mathbb{Z}^G$ des fonctions de $G$ dans $\mathbb{Z}$. Pour tout $g \in G$, on note $\delta_g$ l'élément de $\mathbb{Z}^G$ défini par

$$\delta_g(g) = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, h \in G \setminus \{g\},\ \delta_g(h) = 0.$$

La famille $(\delta_g)_{g \in G}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^G$.
On munit $\mathbb{Z}^G$ de l'application $\mathbb{Z}$-bilinéaire $(f_1, f_2) \mapsto f_1 * f_2$ définie par les conditions $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$ pour tous $g$ et $h \in G$ et étendue à $\mathbb{Z}^G \times \mathbb{Z}^G$ par bilinéarité. On admettra sans vérification que $(\mathbb{Z}^G, +, *)$ est un anneau. On note enfin $B$ le centre de cet anneau :

$$B = \{f \in \mathbb{Z}^G \mid \forall\, f' \in \mathbb{Z}^G,\ f * f' = f' * f\}.$$

**33.** Montrer que $B$ est l'ensemble des fonctions de $G$ dans $\mathbb{Z}$ constantes sur chaque classe de conjugaison de $G$.

**34.** Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible du groupe $G$ dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V$ de dimension finie. On note $\chi$ le caractère de cette représentation. Pour toute fonction $f \in \mathbb{Z}^G$, on pose
$$\xi(f) = \sum_{g \in G} f(g)\rho(g).$$

**a.** On pose, pour toute homothétie $\lambda \mathrm{Id}_V$ de $V$, $\alpha(\lambda \mathrm{Id}_V) = \lambda$.
Montrer que si $f \in B$, alors $\xi(f)$ est une homothétie de $V$ puis que $\alpha(\xi(B))$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

**b.** Soit $g \in G$, $c(g)$ le cardinal de la classe de conjugaison de $g$ dans $G$ et $d(g) = \mathrm{pgcd}(c(g), \dim V)$. Montrer que $\dfrac{c(g)\chi(g)}{\dim V}$ et $\dfrac{d(g)\chi(g)}{\dim V}$ sont des entiers algébriques.

**35.** On suppose dans cette question qu'il existe un élément $g_0$ de $G$ différent de l'élément neutre $e$ tel que le cardinal de la classe de conjugaison de $g_0$ soit une puissance d'un nombre premier : $c(g_0) = p^m$ avec $p$ premier et $m \in \mathbb{N}$.

**a.** Montrer qu'il existe une représentation irréductible non triviale $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ de $G$ dont le caractère $\chi$ vérifie $\chi(g_0) \neq 0$ et dont le degré $\dim V$ est premier avec $p$.
*Indication : on pourra calculer $\sum_k \chi_k(g_0)\chi_k(e)$, où la somme porte sur les caractères irréductibles $\chi_k$ non triviaux de $G$.*

**b.** En considérant $\dfrac{\chi(g_0)}{\dim V}$, montrer que $\rho(g_0)$ est une homothétie de $V$. En déduire que, si l'on suppose en outre le groupe $G$ simple, alors $G$ est abélien.

# Problème d'analyse

**Notations.**
Dans tout le problème, $d$ désigne un entier supérieur ou égal à 1.
On identifie les espaces $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$.
La transposée d'une matrice $A$ (carrée ou non) est notée ${}^tA$.
On identifie matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et endomorphismes de $\mathbb{R}^d$.
Si $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une application différentiable en un point $a \in \mathbb{R}^d$, on note $DF(a)$ sa différentielle en $a$ ; c'est un élément de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
Pour tout ensemble $E$, on note $\mathrm{Id}_E$ l'application identité de $E$.
Pour tout nombre complexe $z$, on note $\mathfrak{Re}\, z$ et $\mathfrak{Im}\, z$ ses parties réelle et imaginaire.

## I. Résultats préliminaires

Dans les sections A et B ci-dessous, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ est muni d'une norme notée $\|\cdot\|$.

**A. Lemme de Grönwall**

**1. a.** Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ telle que :

$$\forall\, t \in I, \quad f'(t) \leqslant af(t) + b.$$

Montrer l'inégalité :

$$\forall\, t \in I \cap [0, +\infty[, \quad f(t) \leqslant f(0)e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1).$$

Trouver une inégalité similaire valable pour $t \in I \cap ]-\infty, 0]$.
*Indication : on pourra considérer la fonction* $t \mapsto f(t)e^{-at}$.

**b.** Dans cette question, on suppose $a > 0$ et on considère une fonction $v : I \to \mathbb{R}^d$ de classe $C^1$ telle que

$$\forall\, t \in I, \quad \|v'(t)\| \leqslant a\|v(t)\| + b.$$

Montrer l'inégalité :

$$\forall\, t \in I \cap [0, +\infty[, \quad \|v(t)\| \leqslant \|v(0)\|e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1).$$

*Indication : on pourra considérer la fonction* $t \mapsto \int_0^t \|v'(s)\|\, ds$.

**B. Flot d'un système différentiel**

**2.** Rappeler la définition d'une solution maximale d'un système différentiel et écrire l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction de classe $C^1$ et $L$-lipschitzienne. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On considère le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Soit $]t_1, t_2[$ l'intervalle de définition de la solution maximale $x$ de ce système (on a donc $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $t_1 < 0 < t_2$).

**3. a.** Trouver à l'aide du lemme de Grönwall un réel $M \geqslant 0$ indépendant de $t$ vérifiant, pour tout $t \in [0, t_2[$, l'inégalité $\|x(t)\| \leqslant M e^{Lt}$.

**b.** On suppose par l'absurde $t_2$ fini. Montrer qu'alors $x(t)$ et $x'(t)$ convergent lorsque $t$ tend vers $t_2$.

**c.** En déduire une contradiction.

*Ainsi on a $t_2 = +\infty$. On admet dans la suite que l'on a de même $t_1 = -\infty$.*

On note désormais $\phi_t(x_0) = x(t)$ la solution maximale du problème de Cauchy $(S)$. La fonction $(t, x_0) \mapsto \phi_t(x_0)$ est donc définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

**Définition.** Cette application $(t, x_0) \mapsto \phi_t(x_0)$ est appelée le flot du champ de vecteur $F$.

**4. a.** Montrer que

$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \|\phi_t(x_1) - \phi_t(x_2)\| \leqslant e^{L|t|}\|x_1 - x_2\|.$$

**b.** Montrer que l'application $(t, x_0) \mapsto \phi_t(x_0)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

**5. a.** Montrer que pour tous $t$ et $s$ réels, on a $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

**b.** En déduire que $\phi_t$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$.

### C. Construction d'un produit scalaire adapté à une matrice

**6.** Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice dont les valeurs propres complexes sont toutes de partie réelle strictement négative. Soit $\varepsilon > 0$.

**a.** Montrer l'existence d'une matrice inversible $P_\varepsilon \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ telle que la matrice $T_\varepsilon = P_\varepsilon A P_\varepsilon^{-1}$ soit triangulaire supérieure, avec des coefficients non diagonaux de module inférieur ou égal à $\varepsilon$.

*Indication : on pourra étudier l'effet sur une matrice triangulaire de la conjugaison par une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\delta, \delta^2, ..., \delta^d$, avec $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.*

**b.** On munit $\mathbb{R}^d$ du produit scalaire défini par

$$\forall\, v, w \in \mathbb{R}^d, \quad \langle\!\langle v, w\rangle\!\rangle_\varepsilon = \mathcal{R}\mathrm{e}({}^t v\, {}^t\overline{P_\varepsilon} P_\varepsilon w).$$

*Il n'est pas demandé aux candidats de vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.*
On note $\|\cdot\|_\varepsilon$ la norme associée.
Montrer que si $\varepsilon$ est assez petit, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^d, \quad \langle\!\langle v, Av\rangle\!\rangle_\varepsilon \leqslant -\alpha\|v\|_\varepsilon^2. \tag{1}$$

*Indication : on pourra expliciter $\langle\!\langle v, Av\rangle\!\rangle_\varepsilon$ et $\|v\|_\varepsilon$ à l'aide des coordonnées du vecteur $z = P_\varepsilon v$.*

### D. Point d'équilibre attractif

**7.** On reprend les notations et hypothèses de la section B, à savoir que $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une fonction lipschitzienne de classe $C^1$ et $\phi : (t, x_0) \mapsto \phi_t(x_0)$ désigne son flot. On suppose en outre qu'il existe un point $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $F(a) = 0$ et que la matrice $A = DF(a)$ a toutes ses valeurs propres complexes de partie réelle strictement négative. On se donne enfin un produit scalaire $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant la propriété (1) ci-dessus et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

**a.** Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall\, (t, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad \|\phi_t(x_0) - a\| \leqslant \eta \implies \frac{d}{dt}\|\phi_t(x_0) - a\|^2 \leqslant -\alpha\|\phi_t(x_0) - a\|^2.$$

**b.** On note $V = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - a\| < \eta\}$ la boule de centre $a$ et de rayon $\eta$. Soit $x_0 \in V$. Montrer que l'ensemble

$$J = \{t \in [0, +\infty[ \mid \forall\, s \in [0, t],\ \phi_s(x_0) \in V\}$$

est égal à $[0, +\infty[$ et que $\phi_t(x_0)$ tend vers $a$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

# II. L'équation du pendule

Soit $q$ et $\theta_0$ deux nombres réels tels que $q \geqslant 0$ et $0 < \theta_0 < \pi$. On étudie dans cette partie l'équation différentielle

$$(P) \qquad \begin{cases} \theta''(t) + q\theta'(t) + \sin\theta(t) = 0 \\ \theta(0) = -\theta_0 \\ \theta'(0) = 0. \end{cases}$$

*Dans toute cette partie, le candidat prendra soin de fournir des réponses rigoureuses ; il ne se contentera pas de justifier ses réponses par des intuitions de nature géométrique ou physique.*

### A. Pendule amorti

**8.** Donner (sans justification) une fonction $F_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que le système $(P)$ ci-dessus soit équivalent au système

$$\begin{cases} x'(t) = F_q(x(t)) \\ x(0) = \begin{pmatrix} -\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{d'inconnue} \quad x(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}.$$

Démontrer que le système $(P)$ possède une unique solution $\theta$ définie sur $\mathbb{R}$.

**9.** On suppose dans cette question que $q > 0$. En supposant $\theta_0$ assez proche de 0, déterminer le comportement asymptotique de $\theta(t)$ quand $t$ tend vers $+\infty$.

### B. Pendule non amorti

On suppose dans cette section B que $q = 0$ et on rappelle que $0 < \theta_0 < \pi$. On étudie l'équation

$$(P_0) \qquad \begin{cases} \theta''(t) + \sin\theta(t) = 0 \\ \theta(0) = -\theta_0 \\ \theta'(0) = 0. \end{cases}$$

**10.** Montrer que la solution $\theta$ de $(P_0)$ vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\theta'(t)^2 = 2(\cos\theta(t) - \cos\theta_0) \qquad \text{et} \qquad \theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0].$$

**11.** Soit $I = \{t > 0 \mid \forall\, s \in\, ]0, t],\ \theta'(s) > 0\}$ et

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (\cos\gamma - \cos\theta_0)^{-1/2}\, d\gamma.$$

**a.** Justifier que $\tau < +\infty$ et que l'ensemble $I$ est non vide et majoré par $\tau$.

**b.** Montrer que $\sup I = \tau$ et que $\theta(\tau) = \theta_0$.

**c.** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\theta(\tau + t) = \theta(\tau - t)$ puis que la fonction $\theta$ est périodique ; préciser sa plus petite période.

**C. Étude de la période en fonction de $\theta_0$**

On note, pour tout $\theta_0 \in ]0, \pi[$,

$$T(\theta_0) = \sqrt{8} \int_0^{\theta_0} (\cos\gamma - \cos\theta_0)^{-1/2}\, d\gamma.$$

**12.** Trouver un réel $A$ tel que, pour tout $\theta_0 \in ]0, \pi[$,

$$T(\theta_0) = A \int_0^1 \theta_0 \left[\sin\left(\frac{(1+s)\theta_0}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-s)\theta_0}{2}\right)\right]^{-1/2} ds.$$

**13.** Déterminer les limites de $T(\theta_0)$ lorsque $\theta_0$ tend vers $0^+$ et lorsque $\theta_0$ tend vers $\pi^-$.

**14.** On pose, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$\sigma(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\right)$$

et

$$\Delta(z) = \sigma(z) - \operatorname{cotan} z = \sigma(z) - \frac{\cos z}{\sin z}.$$

**a.** Justifier l'existence d'un réel $C > 0$ tel que, pour tout $r > 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 + r} \leqslant \frac{C}{\sqrt{r}}.$$

**b.** Montrer que la fonction $\sigma$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

**c.** Montrer que la fonction $\Delta$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{C}$, impaire et $\pi$-périodique.

**d.** Montrer que la fonction $\Delta$ est bornée sur le domaine du plan complexe d'équations $|\mathfrak{Re}\, z| \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $|\mathfrak{Im}\, z| \geqslant \pi$.

**e.** Montrer que $\Delta$ est la fonction nulle sur $\mathbb{C}$.

**15. a.** Établir l'identité suivante pour tout $t \in ]0, \pi[$ :

$$\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right).$$

**b.** En déduire l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs vérifiant, pour tout $t \in ]0, \pi[$,

$$\sqrt{\frac{t}{\sin t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

**16.** Montrer que la fonction $T$ coïncide sur l'intervalle $]0, \pi[$ avec la somme d'une série entière à coefficients positifs.

# III. Conjugaison topologique de flots

Soit $F$ et $G$ deux fonctions lipschitziennes de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. On note

$$\phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ (t,x) & \longmapsto & \phi_t(x) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \psi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ (t,x) & \longmapsto & \psi_t(x) \end{pmatrix}$$

les flots respectifs des champs de vecteurs $F$ et $G$ (tels que définis dans la section I.B). On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les fonctions $\phi_t$ et $\psi_t$ sont des homéomorphismes de $\mathbb{R}^d$.

**Définition.** On dit que les flots $\phi$ et $\psi$ sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme $h$ de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$ tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad h \circ \phi_t = \psi_t \circ h. \tag{2}$$

### A. Quelques exemples

**17.** Dans cette question, $d = 1$ et les fonctions $F$ et $G$ sont définies par $F(x) = \operatorname{th} x$, $G(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (la notation $\operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ désigne la fonction tangente hyperbolique).

**a.** Calculer les flots $\phi$ et $\psi$ de ces deux champs de vecteurs et trouver un homéomorphisme $h$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété (2).

**b.** Montrer que le flot de $F$ n'est pas topologiquement conjugué au flot de $-G$.

**18.** Dans cette question, $d = 2$ ; on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

et les fonctions $F$ et $G$ définies par $F(x) = Ax$, $G(x) = Bx$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

**a.** Trouver un homéomorphisme $h$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant la propriété (2).

**b.** Montrer qu'il n'existe pas de $C^1$-difféomorphisme $h$ vérifiant cette même propriété.

**19.** Dans cette question, pour tout réel $q \geqslant 0$, $F_q$ désigne la fonction trouvée à la question 8, associée à l'équation du pendule (amorti si $q > 0$, non amorti si $q = 0$).
Démontrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme $h$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ qui conjugue les flots associés aux champs de vecteurs $F_0$ et $F_1$ et tel que $h(0) = 0$.

### B. Conjugaison topologique : cas d'un point d'équilibre attractif

On considère dans cette section une fonction $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe $C^1$ telle que $F(0) = 0$. On suppose que la matrice $A = DF(0)$ est à valeurs propres de parties réelles strictement négatives et on se donne un produit scalaire $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant la propriété (1) : il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^d, \quad \langle\!\langle v, Av \rangle\!\rangle \leqslant -\alpha \|v\|^2 \tag{1}$$

(où $\|\cdot\|$ désigne la norme associée à ce produit scalaire). On suppose enfin que la fonction $F - DF(0)$ est $\frac{\alpha}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$ (au sens de cette norme $\|\cdot\|$).
On note $\phi : (t,x) \mapsto \phi_t(x)$ le flot associé à $F$, défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. L'objectif de cette section est de démontrer que $\phi$ est topologiquement conjugué au flot linéaire $\psi$ associé à $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d}$.

**20.** Soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Montrer que la fonction $t \mapsto \|\phi_t(x)\|$ est une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ et qu'elle vérifie les inégalités :

$$\begin{cases} \forall\, t \geqslant 0, & \|\phi_t(x)\| \leqslant e^{-\alpha t/2} \|x\|, \\ \forall\, t \leqslant 0, & \|\phi_t(x)\| \geqslant e^{-\alpha t/2} \|x\|. \end{cases}$$

**21.** Analyse du problème.
Soit $h$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$ tel que $\phi_t \circ h = h \circ \psi_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on rappelle que $\psi$ désigne ici le flot de $G = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d}$). On suppose en outre que $h(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ de norme 1. Montrer que $h(0) = 0$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad h(x) = \phi_{-\ln\|x\|}\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

**22.** Synthèse.
On définit une fonction $H$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{cases} H(x) = \phi_{-\ln\|x\|}\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ H(0) = 0. \end{cases}$$

**a.** Montrer que $H$ est continue sur $\mathbb{R}^d$ et qu'elle vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t \circ H = H \circ \psi_t$.

**b.** Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, justifier qu'il existe un unique couple $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ vérifiant les conditions $\|v\| = 1$ et $\phi_t(v) = x$.
On note ce couple $(\theta(x), u(x))$. Montrer que $|\theta(x)| \leqslant \frac{2}{\alpha}\Big|\ln\|x\|\Big|$ et en déduire que la fonction $x \mapsto (\theta(x), u(x))$ est continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

**c.** Montrer que $H$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$ et exprimer sa bijection réciproque à l'aide des fonctions $\theta$ et $u$.

# IV. Conjugaison de difféomorphismes

### A. Lemmes préliminaires

**23.** Soit $B$ un espace de Banach. On note dans cette question $\mathcal{L}(B)$ l'espace des endomorphismes continus de $B$ ; $\|\cdot\|_B$ désigne la norme de $B$ et $|||\cdot|||_B$ la norme subordonnée associée sur l'espace $\mathcal{L}(B)$.
Soit $\ell \in \mathcal{L}(B)$ un endomorphisme continu de $B$, inversible et d'inverse continu. Soit en outre $m : B \to B$ une application (non linéaire) $K$-lipschitzienne. On suppose que $K|||\ell^{-1}|||_B < 1$.
Montrer que $\ell + m$ est un homéomorphisme de $B$ sur $B$, lipschitzien et à réciproque lipschitzienne.

**24. a.** Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice dont les valeurs propres complexes sont de module strictement inférieur à 1. Montrer qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$ telle que la norme subordonnée associée $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ vérifie $|||A||| < 1$.

**b.** Soit $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les valeurs propres complexes sont de module différent de 1. Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels $E_a$ et $E_r$ de $\mathbb{R}^d$ et une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

($i$) $\mathbb{R}^d = E_a \oplus E_r$ ;

($ii$) $E_a$ et $E_r$ sont stables par $A$ ;

($iii$) les endomorphismes $A_a$ et $A_r$ induits par $A$ sur $E_a$ et $E_r$ vérifient $|||A_a||| < 1$ et $|||A_r^{-1}||| < 1$.

*On dit que le sous-espace $E_a$ est attractif pour $A$ et que le sous-espace $E_r$ est répulsif pour $A$.*

**B. Une version globale du théorème de Grobman-Hartman pour les difféomorphismes**

Soit $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ une matrice sans valeur propre complexe de module 1. On conserve les notations de la question 24.b : la norme $\|\cdot\|$, les sous-espaces attractif et répulsif $E_a$, $E_r$ de $A$, ainsi que les endomorphismes $A_a$ et $A_r$ induits par $A$ sur ces deux sous-espaces, qui vérifient $|||A_a||| < 1$ et $|||A_r^{-1}||| < 1$.
Soit $f_1$ et $f_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ deux fonctions de classe $C^1$, de la forme $f_1 = A + g_1$ et $f_2 = A + g_2$ où $g_1$ et $g_2$ sont deux fonctions $\varepsilon$-lipschitziennes de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.
On suppose que $\varepsilon|||A^{-1}||| < 1$.

**25.** Montrer que $f_1$ et $f_2$ sont des difféomorphismes de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$.

Jusqu'à la fin de cet énoncé, on désigne par $B = C_b^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ l'espace des applications continues et bornées de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, muni de la norme $\|\cdot\|_B$ définie par

$$\forall\, \varphi \in B, \quad \|\varphi\|_B = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|\varphi(x)\|.$$

Pour tout $\varphi \in B$, on pose

$$L(\varphi) = \varphi \circ f_1 - A \circ \varphi.$$

Les sous-espaces $B_a = C_b^0(\mathbb{R}^d, E_a)$ et $B_r = C_b^0(\mathbb{R}^d, E_r)$ sont stables par $L$ ; on note $L_a$ et $L_r$ les endomorphismes induits par $L$ sur $B_a$ et $B_r$.

**26.** Montrer que $L_a$, $L_r$ et $L$ sont des endomorphismes continus, inversibles et d'inverses continus de $B_a$, $B_r$ et $B$ respectivement.

**27.** On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^d$.
Montrer que si $\varepsilon$ est assez petit, alors il existe un unique $\varphi \in B$ tel que

$$(\mathrm{Id} + \varphi) \circ f_1 = f_2 \circ (\mathrm{Id} + \varphi).$$

**28.** Montrer que si $\varepsilon$ est assez petit, $\mathrm{Id} + \varphi$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$.

**INFORMATION AUX CANDIDATS**

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

| Concours | Section/option | Epreuve | Matière |
|---|---|---|---|
| EAD | 1300A | 101 | 0723 |