MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

EAI MAT 2

SESSION 2020

AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours interne de l'Agrégation de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAI	1300A	102	0530

► **Concours interne du CAER / Agrégation de l'enseignement privé** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAH	1300A	102	0530

Notations

- On rappelle que l'on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nul, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

- On se place dans un espace euclidien $(E, \langle\, .\, ,\, .\rangle)$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

- Pour tout vecteur x de E et tout réel positif r, on note $B(x,r)$ (resp. $\overline{B}(x,r)$, resp. $S(x,r)$) la boule ouverte (resp. la boule fermée, resp. la sphère) de centre x et de rayon r :

$$B(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| < r\}\,,\ \overline{B}(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| \leqslant r\} \quad \text{et} \quad S(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| = r\}\,.$$

- Pour toute partie A de E, on note $\mathring{A}$ l'intérieur de A, c'est-à-dire le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans A, $\overline{A}$ l'adhérence de A, c'est-à-dire le plus petit fermé contenant A et $\mathrm{Fr}\,(A)$ la frontière de A :

$$\mathrm{Fr}\,(A) = \overline{A} \backslash \mathring{A}.$$

- Si a est un élément de E, on note $\mathscr{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

- Pour toute partie fermée et non vide F de E et tout $x \in E$, on admet sans démonstration que l'ensemble

$$\{\|x-f\|\ ,\ f \in F\}$$

admet une borne inférieure notée $\inf\limits_{f \in F} \|x-f\|$ et on pose

$$d_F(x) = d(x,F) = \inf_{f \in F} \|x-f\|\,.$$

- On pose alors $\Gamma(x) = \{f \in F \mid \|x-f\| = d(x,F)\}$. C'est donc l'ensemble (éventuellement vide) des points de F pour lesquels la borne inférieure est atteinte.

- **Lorsque $\Gamma(x)$ est un singleton, on note $\pi(x)$ son unique élément.**

- Si u et v sont deux vecteurs de E, on appelle segment $[u,v]$ l'ensemble défini par :

$$[u,v] = \{x \in E \mid \exists t \in [0,1],\ x = (1-t)u + tv\}\,.$$

- Soient A une partie de E et $u : A \to \mathbb{R}$. On suppose que $0 \in \overline{A}$. On dit que $u(h) = \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$ lorsqu'il existe une fonction δ définie sur un voisinage V de 0 telle que

$$\forall h \in V \cap A,\ u(h) = \delta(h)\,\|h\| \quad \text{et} \quad \delta(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

- Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On rappelle que l'on dit que f est différentiable en un élément a de Ω lorsqu'il existe une forme linéaire $\ell : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)\,.$$

Lorsqu'elle existe, ℓ est unique et est notée $df(a)$ et l'image $\ell(h)$ du vecteur h de E par ℓ est notée $df(a) \cdot h$. Le gradient de f en a est alors l'unique vecteur v de E vérifiant :

$$\forall h \in E,\ df(a) \cdot h = \langle v,\, h\rangle\,.$$

On le note $\nabla f(a)$. Ainsi, sous réserve d'existence, on a :

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a),\, h\rangle + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)\,.$$

- Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

Le problème a pour objectif d'étudier la différentiabilité de la fonction $d_F : x \mapsto d(x, F)$ en fonction de la partie F.

On fixe donc une partie F de E **non vide** et **fermée**.

Partie I — Résultats préliminaires

1. Montrer que, pour tout vecteur x de E, $d_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

2. **a)** Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $f \in F$, on a :

$$d_F(y) \leqslant \|y - x\| + \|x - f\| \,.$$

b) En déduire que d_F est 1-lipschitzienne.

3. Soient x un vecteur de E et x_0 un vecteur de F. On pose $r = \|x - x_0\|$ et $K = \overline{B}(x, r) \cap F$.

a) Montrer que K est une partie compacte et non vide de E.

b) Montrer que $\Gamma(x)$ est non vide.

4. On suppose, *dans cette question seulement*, que F est en outre une partie convexe de E.

a) Montrer que, quels que soient les vecteurs u et v de E, on a : $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

b) Soit x un vecteur de E et soient f et f' deux éléments de $\Gamma(x)$. On suppose que $f \neq f'$.

Montrer que : $\left\|\frac{1}{2}(f + f') - x\right\|^2 < d(x, F)^2$.

En déduire que, pour tout vecteur x de E, $\Gamma(x)$ est un singleton.

Ainsi, avec les notations de l'introduction, $\Gamma(x) = \{\pi(x)\}$.

c) On souhaite montrer que : $\forall x \in E, \forall f \in F, \langle f - \pi(x), x - \pi(x)\rangle \leqslant 0$.

Pour cela, on fixe des éléments x de E et f de F. On introduit la fonction

$$\varphi\colon \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \quad \longmapsto \|(1-t)\pi(x) + tf - x\|^2 \end{cases} .$$

i. Montrer que φ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

ii. Justifier que φ admet un minimum en 0. Conclure.

d) On fixe un vecteur x de E. Soit z un vecteur de F. On suppose que :

$$\forall f \in F,\ \langle f - z,\, x - z\rangle \leqslant 0\,.$$

Montrer que $z = \pi(x)$.

Partie II — Étude en dimension 1

On suppose, *dans toute cette partie*, que $E = \mathbb{R}$, et que $\mathbb{R}$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

5. Expliciter $d_{\{0\}}$, puis déterminer l'ensemble des points où $d_{\{0\}}$ est dérivable et déterminer sa dérivée.

Dans les questions 6 à 10, on suppose que $F = \mathbb{Z}$ et on étudie donc la fonction $d_{\mathbb{Z}}$.

6. Montrer que $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

7. Justifier que $d_{\mathbb{Z}}$ est 1-périodique. Étudier la parité.

8. Pour tout x élément de $[0,1[$, expliciter, en justifiant, $d_{\mathbb{Z}}(x)$ en fonction de x. Tracer le graphe de $d_{\mathbb{Z}}$.

9. Étudier la dérivabilité de $d_{\mathbb{Z}}$ en tout point de $[0,1[$.

10. Développement en série de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$.

- **a)** Calculer les coefficients de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$.
- **b)** La série de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$ converge-t-elle simplement/uniformément/normalement vers $d_{\mathbb{Z}}$?
- **c)** En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ puis de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
On commencera par justifier la convergence des séries.

Pour toute la suite de la partie, on fixe une partie fermée F de $\mathbb{R}$. On note Ω le complémentaire de F. C'est donc une partie ouverte de $\mathbb{R}$.

11. On définit, sur Ω, une relation binaire $\sim$ de la manière suivante : étant donnés deux éléments x et y de Ω, on dit que x est en relation avec y lorsqu'il existe un intervalle ouvert $]a,b[$ inclus dans Ω et contenant les éléments x et y :

$$\forall (x,y) \in \Omega^2, \quad x \sim y \iff \left(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b \quad \text{et} \quad (x,y) \in]a,b[^2 \quad \text{et} \quad]a,b[\subset \Omega\right) .$$

- **a)** Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- **b)** Montrer que les classes d'équivalences sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints.
- **c)** En déduire qu'il existe une famille $(]a_i,b_i[)_{i\in I}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, indexée par un ensemble I fini ou dénombrable, telle que

$$\Omega = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[\ .$$

12. Soit x un élément de Ω. Il existe donc un unique i_0 élément de I tel que $x \in]a_{i_0}, b_{i_0}[$.

- **a)** Exprimer $d_F(x)$ à l'aide de x, de a_{i_0} et b_{i_0}.
- **b)** Étudier la dérivabilité de d_F en x.

13. On suppose dans cette question que $\mathring{F} \neq \varnothing$. Soit x un élément de $\mathring{F}$. Étudier la dérivabilité de d_F en x.

14. Étude à la frontière.

a) On suppose, *dans cette question*, que $F = [0,1]$. Expliciter $\mathrm{Fr}\,(F)$.
d_F est-elle dérivable en un point de $\mathrm{Fr}\,(F)$?

b) *Dans cette question*, on pose : $F = \mathbb{R}\backslash\Omega$ où $\Omega = \bigcup_{n\geqslant 2} \left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[$, la réunion étant prise sur l'ensemble des entiers naturels n tels que $n \geqslant 2$.

i. Justifier rapidement que $\Omega \subset \left]0, \frac{1}{2}\right[$, que F est un fermé de $\mathbb{R}$ et que $0 \in \mathrm{Fr}\,(F)$.

ii. Soit $x \in \Omega$. Montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que $n \geqslant 2$ et $x \in \left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[$.
Montrer que $n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

iii. En déduire qu'il existe un réel C strictement positif tel que $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, $d_F(x) \leqslant Cx^3$.

iv. Montrer que d_F est dérivable à droite en 0 et en calculer $(d_F)'_d(0)$.

v. d_F est-elle dérivable en 0 ?

Partie III — Étude de cas particuliers en dimension n

15. On fixe un vecteur x_0 de E et on suppose, *dans cette question seulement*, que $F = \{x_0\}$.

a) Expliciter d_F. Soit x un élément de E. Expliciter $\Gamma(x)$.

b) Montrer que la fonction g: $\begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x - x_0\|^2 \end{cases}$ est différentiable sur E et calculer son gradient.

c) En déduire que d_F est différentiable sur $E\backslash\{x_0\}$ et montrer que :

$$\forall a \in E\backslash\{x_0\}, \, \nabla d_F(a) = \frac{1}{\|a - x_0\|}(a - x_0)\,.$$

d) Étude de la différentiabilité de d_F en x_0. Supposons que d_F soit différentiable en x_0.

i. Montrer que, pour tout vecteur h de E, on a :

$$d_F(x_0 + th) = t\,\langle \nabla d_F(x_0), \, h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\,.$$

ii. Conclure.

16. On suppose, *dans cette question seulement*, que F est un sous-espace vectoriel de E, distinct de E.

a) Montrer que pour tout vecteur x de E, $\Gamma(x)$ est un singleton, et que π (défini dans le préambule du sujet) est le projecteur orthogonal sur F.

b) Montrer que, pour tout élément a de E, d_F^2 est différentiable en a et calculer son gradient.

c) En déduire que, pour tout élément a de $E\backslash F$, d_F est différentiable en a et calculer son gradient.

d) On fixe un vecteur a de F. L'objet de cette question est l'étude de la différentiabilité de d_F en a.

i. On suppose que d_F est différentiable en a et on pose : $u = \nabla(d_F)(a)$.
Soit $h \in F^\perp$. Montrer que : $\langle u, \, h\rangle = \|h\|$.
Indication : *on pourra procéder de manière analogue à la question* 15.d.

ii. Conclure.

17. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$, dont les éléments sont notés en colonne, muni de sa structure euclidienne canonique et que : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad y \geqslant x^2 \right\}$.

L'objet de cette question est d'étudier la différentiabilité de d_F en $0_{\mathbb{R}^2}$.

a) Dessiner l'allure de F.

b) Montrer que F est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que $0_{\mathbb{R}^2} \in \mathrm{Fr}\,(F)$.

d) Montrer que, pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$, $d_F(u) \leqslant \|u\|^2$.
Indication : on pourra séparer les cas où $u \in F$ et où $u \in \mathbb{R}^2 \backslash F$.

e) En déduire que d_F est différentiable en $0_{\mathbb{R}^2}$ et donner son gradient en $0_{\mathbb{R}^2}$.

Partie IV — Distance à la sphère unité

On suppose, *dans cette partie seulement*, que : $F = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

F est donc la sphère de centre 0_E et de rayon 1.

18. Soit a un élément de $E \backslash \{0_E\}$. On pose $u = \dfrac{1}{\|a\|} a$ et on fixe un vecteur y de F.

a) Montrer qu'il existe un plan vectoriel $\mathcal{P}$ contenant a, u et y.

b) Montrer que $S = F \cap \mathcal{P}$ est le cercle unité de $\mathcal{P}$, pour la structure euclidienne sur $\mathcal{P}$ induite par celle de E.

c) Montrer que $\Gamma(a) = \{u\}$.

19. Montrer que, pour tout vecteur a de E : $d_F(a) = |\, \|a\| - 1|$.

20. Montrer que, pour tout vecteur a de E tel que $a \neq 0_E$ et $a \notin F$, d_F est différentiable en a et calculer son gradient.

21. Expliciter $\Gamma(0_E)$.

22. Soit a un vecteur de F. Montrer que d_F n'est pas différentiable en a.
Indication : *On pourra calculer* $d_F(a + ta)$, *pour tout* t *élément de* $]-1, 1[$.

23. On fixe un vecteur unitaire v.

a) Étudier la dérivabilité en 0 de $\varphi \colon \begin{cases}]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \quad\; \longmapsto d_F(tv) \end{cases}$.

b) Conclure quant à la différentiabilité de d_F en 0.

Partie V — Une condition nécessaire de différentiabilité à l'extérieur de F

Dans cette partie, on fixe un vecteur a de $E \backslash F$ et on suppose que d_F est différentiable en a.
On souhaite montrer qu'alors :

$$\Gamma(a) \text{ est un singleton et que } \nabla d_F(a) = \frac{1}{d_F(a)}(a - \pi(a)).$$

On pose $u = \nabla d_F(a)$.

24. **a)** Montrer que, pour tout $t > 0$, $d_F(a + tu) - d_F(a) \leqslant t \|u\|$.
b) En déduire que $\|u\| \leqslant 1$.

Dans la suite de cette partie, on se donne **un** élément y de $\Gamma(a)$.

25. **a)** Montrer que pour tout $x \in [a, y]$,

$$\|x - y\| = d_F(a) - \|a - x\|.$$

b) En déduire que pour tout $x \in [a, y]$,

$$d_F(x) = \|x - y\|.$$

26. On fixe $t \in]0, d_F(a)]$ et on pose $v = \dfrac{1}{d_F(a)}(a - y)$.

a) Montrer que

$$d_F(a - tv) = d_F(a) - t.$$

b) Montrer que

$$\langle u,\, v\rangle = 1 = \|u\| \, \|v\|.$$

c) En déduire que $u = v$ et conclure.

Partie VI — Étude de la réciproque

Dans cette partie, on fixe $a \in E \backslash F$ et on suppose que $\Gamma(a)$ est un singleton. Ainsi, avec les notations du préambule,

$$\Gamma(a) = \{\pi(a)\}.$$

On souhaite montrer que d_F est différentiable en a et que $\nabla(d_F)(a) = \dfrac{1}{d_F(a)}(a - \pi(a))$.

27. Dans cette question, on se propose de montrer que :

$$\forall V \in \mathscr{V}(\pi(a)),\, \exists U \in \mathscr{V}(a),\, \forall x \in U,\, \Gamma(x) \subset V.$$

On va l'établir à l'aide d'un raisonnement par l'absurde. On suppose donc qu'il existe un voisinage ouvert $V \in \mathscr{V}(\pi(a))$ de $\pi(a)$ tel que :

$$\forall U \in \mathscr{V}(a),\, \exists x \in U,\, \Gamma(x) \not\subset V.$$

On dispose ainsi d'une suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a et d'une suite $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\, y_p \in \Gamma(x_p) \quad \text{et} \quad y_p \notin V.$$

On pose : $M = \sup\limits_{p \in \mathbb{N}} \|x_p - a\|$.

a) Justifier succinctement que M est bien défini, puis montrer que $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On note ℓ une valeur d'adhérence de $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

b) Justifier succinctement l'existence de ℓ.

c) Montrer que $\ell \in F \cap (E\backslash V)$.

d) Montrer que $\ell \in \Gamma(a)$, puis conclure.

28. On pose : $\quad R = \|a - \pi(a)\|$.

a) Justifier que $R > 0$ et expliciter $\overline{B}(a, R) \cap F$.

b) Soit x un élément de $B(a, R)$. On fixe un élément y de $\Gamma(x)$.

On considère la fonction $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \|(1-t)x + ty - a\|^2 - R^2 \end{cases}$.

i. Montrer que φ est un trinôme du second degré. Que dire du signe des racines de ce trinôme ?

ii. Montrer que $[x, y] \cap S(a, R)$ est un singleton. On note $p(x, y)$ le point d'intersection.
Il existe donc un unique $t_{x,y} \in [0, 1]$ vérifiant : $p(x, y) = (1 - t_{x,y})x + t_{x,y}\, y$.

iii. Que vaut $\varphi(t_{x,y})$? En déduire une expression de $t_{x,y}$.

c) Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in B(a, R),\ \|x - a\| < \eta \implies \forall y \in \Gamma(x),\ \|p(x, y) - y\| < \varepsilon.$$

d) En déduire que :

$$\forall V \in \mathscr{V}(\pi(a)),\ \exists U \in \mathscr{V}(a),\ \forall x \in U,\ \forall y \in \Gamma(x),\ p(x, y) \in V.$$

29. Pour tout x élément de $B(a, R)$, on note y_x un élément de $\Gamma(x)$. Montrer que :

a) $\forall x \in B(a, R),\ \|x - p(x, y_x)\|^2 - \|a - p(x, y_x)\|^2 = 2\langle x - a,\, a - p(x, y_x)\rangle + \|x - a\|^2$;

b) $\|x - p(x, y_x)\|^2 - \|a - p(x, y_x)\|^2 = 2\langle x - a,\, a - \pi(a)\rangle + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(\|x - a\|)$.

30. Montrer que : $\quad d_F^2(x) = d_F^2(a) + \langle x - a,\, 2(a - \pi(a))\rangle + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(\|x - a\|)$.

31. En déduire que d_F est différentiable en a et calculer son gradient.

32. Soit Ω un ouvert inclus dans $E\backslash F$. On suppose que, pour tout $x \in \Omega$, $\Gamma(x)$ est un singleton.
Montrer que d_F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

Partie VII — Une condition nécessaire de différentiabilité en un point de F

Dans cette partie, on fixe un élément a de F et on suppose que d_F est différentiable en a. On souhaite montrer que : $\nabla(d_F)(a) = 0$.
On pose encore : $u = \nabla(d_F)(a)$.

33. Montrer le résultat dans le cas où $a \in \mathring{F}$.

34. On se place dans le cas où $a \in \mathrm{Fr}\,(F)$.

a) Montrer que : $d_F(a - tu) = -t\,\|u\|^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$.

b) Conclure.

FIN DU SUJET