



## Concours de recrutement du second degré

### Rapport de jury

---

Concours : Agrégation externe spéciale

Section : Mathématiques

Session 2019

Rapport de jury présenté par : Thierry Goudon  
Président du jury

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Déroulement du concours et statistiques</b>	<b>5</b>
2.1	Déroulement du concours . . . . .	5
2.2	Commentaires généraux et statistiques sur la session 2019 . . . . .	6
2.2.1	Commentaires généraux . . . . .	6
2.2.2	Données statistiques diverses . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Épreuve écrite de mathématiques</b>	<b>11</b>
3.1	Commentaires sur l'épreuve écrite d'admissibilité . . . . .	11
3.2	Remarques générales . . . . .	11
3.3	Exercice 1 . . . . .	11
3.4	Exercice 2 . . . . .	12
3.5	Exercice 3 . . . . .	14
3.6	Exercice 4 . . . . .	15
3.7	Problème d'Analyse . . . . .	17
3.8	Problème de Mathématiques Générales . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Épreuves orales</b>	<b>29</b>
4.1	Épreuve orale de mathématiques (Analyse-Probabilités & Algèbre-Géométrie) . . . . .	29
4.2	Épreuve orale de modélisation (options A, B, C et D) . . . . .	30
4.3	Épreuve orale de mise en perspective didactique d'un dossier recherche . . . . .	30
<b>A</b>	<b>Liste des leçons de mathématiques pour le concours spécial 2020</b>	<b>34</b>

# Chapitre 1

## Introduction

La session 2019 n'est que la troisième édition de ce concours spécial réservé aux docteurs. Les exigences scientifiques de ce concours spécial sont les mêmes que celles qui régissent le concours externe standard, sans aucune concession quant aux connaissances mathématiques et leur maîtrise. Cependant, son format original et son public réservé donnent l'occasion de mettre en valeur la maturité liée à une expérience professionnelle et les qualités spécifiques résultant d'une pratique des mathématiques par la recherche. Ce concours permet ainsi de recruter des professeurs agrégés ayant un parcours professionnel riche, une expérience de recherche, des compétences pluridisciplinaires, souvent marqués par la confrontation à un environnement international. Ce vécu est appelé à s'exprimer au concours et ne peut que rejaillir positivement sur la pratique enseignante. L'expérience montre que cette voie de recrutement est très ouverte et permet de valoriser — moyennant un indispensable effort de préparation — des candidats aux parcours et profils variés, incluant des titulaires d'une thèse dans une autre discipline que les mathématiques.

Ce rapport vise deux objectifs. D'une part il établit un bilan de la session 2019, notamment en présentant les données statistiques du concours et en discutant les éléments saillants des productions des candidats. On retiendra à cet égard le niveau hétérogène proposé par les candidats de cette session, dont l'état de préparation aux épreuves était manifestement inégal. D'autre part il se veut un document *utile* pour les futurs candidats afin de les aider à se préparer au mieux pour les épreuves qui les attendent. Ainsi, il fournit :

- un corrigé commenté de l'épreuve écrite d'admissibilité, en indiquant les erreurs les plus fréquentes et les défauts de rédaction observés ;
- des recommandations précises pour les épreuves orales d'admission.

Le jury invite les candidats de tous profils, ainsi que les centres de préparation et leurs intervenants, à en faire une lecture attentive et à bien tenir compte des prescriptions qui y sont faites. La consultation du rapport du concours standard, plus détaillé sur les attentes des épreuves d'admission, en est un complément indispensable.

Le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques [agreg.org](http://agreg.org) a été remanié cette année. On y trouvera nombre d'informations utiles, des archives (sujets d'écrit, textes de modélisation, rapports) et des renseignements pratiques concernant les sessions à venir. En particulier, les futurs candidats peuvent trouver sur ce site la **ClefAgreg** qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation. Se préparer suffisamment tôt à cette épreuve permet d'en bien comprendre les attendus, mais aussi peut aider à renforcer les capacités de synthèse sur l'ensemble du programme. Enfin, le jury rappelle qu'une réunion publique, ouverte aux préparateurs et aux candidats, est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques et d'informatique pour évoquer le bilan et les perspectives du concours.

Le concours externe, spécial comme standard, de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et

technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé doit permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac-3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation. Le programme du concours spécial reprend à l'identique celui du concours standard. Il est publié sur le site [www.devenirenseignant.gouv.fr/](http://www.devenirenseignant.gouv.fr/). Le programme pour l'édition 2020 est accessible à l'URL [http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg\\_externespec/70/7/p2020\\_agreg\\_ext\\_spe\\_maths\\_1107707.pdf](http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg_externespec/70/7/p2020_agreg_ext_spe_maths_1107707.pdf).

Le jury recommande aux candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Afin de les guider, l'inspection générale collecte les textes réglementaires relatifs aux différentes situations que les lauréats de l'agrégation externe peuvent rencontrer et édite une note indiquant les recommandations correspondantes <http://igmaths.org/spip/spip.php?rubrique17>. Les lauréats de ce concours spécial sont considérés comme devant être immédiatement opérationnels et ne devraient donc pas être concernés par les procédures de report de stage. Notamment, les possibilités d'être nommé stagiaire en qualité d'ATER ou affecté dans l'enseignement supérieur sur un emploi de professeur du second degré (PRAG) ne sont pas offertes aux lauréats du concours spécial (note de service n°. 2019-064 du 25 avril 2019, [https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin\\_officiel.html?cid\\_bo=141354](https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=141354)). Il est à noter que les reçus bénéficient d'une bonification d'ancienneté de deux ans au titre de la période de préparation du doctorat ; lorsque la période de préparation du doctorat a été accomplie sous contrat de travail, les services accomplis dans ce cadre sont pris en compte pour la part de leur durée excédant deux ans (article 6 du décret n°. 72-580 du 4 juillet 1972 relatif au statut particulier des professeurs agrégés de l'enseignement du second degré, modifié par le décret n°. 2016-656 du 20 mai 2016).

## Chapitre 2

# Déroulement du concours et statistiques

### 2.1 Déroulement du concours

Le concours spécial docteur, création de la campagne de recrutement 2017, est un concours « jeune », instaurée par le décret n<sup>o</sup>. 2016-656 du 20 mai 2016. En 2019, six disciplines étaient concernées par l'ouverture de postes à ce concours spécial : mathématiques (seize postes), langues vivantes étrangères : anglais (dix postes), lettres modernes (douze postes), physique-chimie option chimie (cinq postes), physique-chimie option physique (douze postes) et sciences de la vie-sciences de la Terre et de l'Univers (cinq postes). Les modalités des épreuves sont décrites par l'arrêté du 28 juin 2016, accessible sur le site <https://www.legifrance.gouv.fr/>. Le concours comprend une seule épreuve écrite d'admissibilité et trois épreuves orales d'admission : une épreuve de leçon de mathématiques qui couvre l'intégralité du programme (sans distinction des thèmes d'algèbre-géométrie et ceux d'analyse-probabilités), une épreuve de modélisation et une épreuve de mise en perspective didactique d'un dossier de recherche qui est spécifique à ce concours. Les candidats ont le choix parmi quatre options :

- probabilités et statistiques,
- calcul scientifique,
- algèbre et calcul formel,
- informatique,

qui ne diffèrent que par l'épreuve de modélisation. Comme pour le concours standard, le classement est indépendant de l'option ; le choix de cette option doit être uniquement guidé par les goûts et les compétences des candidats.

Ce concours spécial est réservé aux titulaires d'un doctorat, le diplôme devant être acquis à la date de publication de la liste des admissibles. Les mères ou pères d'au moins trois enfants ainsi que les sportifs de haut niveau sont dispensés de cette condition de diplôme, mais ils seront bien sûr confrontés aux mêmes épreuves. En particulier candidater à ce concours n'a de sens que pour une personne qui, sans être forcément titulaire d'un doctorat, peut justifier d'un parcours et d'une expérience pouvant être mis en valeur dans l'épreuve sur dossier. Tout en rappelant que le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat de l'éducation (arrêté du 1er Juillet 2013) indique que la maîtrise de la langue française est un attendu premier, il est important de souligner que ce concours est ouvert à tout ressortissant d'un État membre de l'Union européenne, d'un État faisant partie de l'accord sur l'Espace économique européen, de la principauté d'Andorre, de la Confédération suisse ou de la Principauté de Monaco. Ainsi, ce concours peut être une opportunité pour des docteurs ressortissants de ces pays, intéressés pour exercer en France, mais dont le parcours académique initial, par exemple effectué à l'étranger, ne donnait pas d'inclination particulière pour passer le concours de l'agrégation externe standard dans la lignée de leur cursus. Enfin, cette session le prouve encore, le format de l'épreuve permet d'attirer des candidats qui seraient titulaires d'une thèse dans une autre discipline : ils ont l'occasion d'expliquer comment des outils mathématiques sont intervenus au cours de leur expérience de recherche ou professionnelle, comment ils ont été exploités au service d'applications

concrètes et comment cette expérience pourra enrichir leur pratique d'enseignant en mathématiques.

L'épreuve écrite d'admissibilité s'est déroulée le jeudi 21 mars 2019. Les candidats sont libres de s'inscrire à la fois au concours standard et au concours spécial ; toutefois, les épreuves écrites ayant lieu au même moment, il leur faut déterminer finalement à quel concours ils souhaitent se présenter. Le jury conseille aux candidats d'effectuer ce choix en évaluant quelles épreuves leur permettent de mieux se mettre en valeur, en fonction de leur parcours et de leur préparation, toute autre considération, par exemple liée à la gestion des carrières, paraissant particulièrement hypothétique.

La liste des candidats admissibles a été publiée le 16 mai 2019. Les épreuves orales du concours spécial étaient organisées en parallèle de celles du concours standard de l'agrégation externe à Lille, au lycée Pasteur. Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué. Les jurys, les délibérations et les classements du concours spécial et du concours standard sont distincts. On remarquera que la composition du jury respecte une exacte parité hommes/femmes et l'ensemble des commissions d'interrogation étaient aussi exactement équilibrées.

## 2.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2019

### 2.2.1 Commentaires généraux

Le nombre d'inscrits au concours spécial s'élève à 232 et 89 candidats se sont présentés à l'épreuve écrite. À l'issue de la délibération d'écrit, 34 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une note de 20/20 et le dernier une note de 5/20. Avec toutes les précautions d'usage sur la comparaison entre deux concours différents, le jury estime que tous ces candidats auraient largement eu leur place parmi les admissibles du concours standard et que les meilleures copies du concours spécial s'y seraient placées à un très bon, voire excellent, rang. À l'issue des épreuves orales, les délibérations du jury ont conduit à retenir les 11 candidats qui avaient franchi la note moyenne de 8,66/20 ; le premier du concours présente une moyenne de 16/20 et le premier candidat non admis a une moyenne de 8,2. Un candidat, surpris en possession de notes de cours manuscrites durant la préparation d'une des épreuves, a reçu une note éliminatoire. On notera que la moyenne du dernier admis est sensiblement supérieure à la moyenne du dernier admis du concours standard, confirmant le bon niveau de sélection adopté. Le jury se réjouit du bon niveau de préparation des candidats déclarés admis et des efforts de présentation du dossier.

Le jury renouvelle sa principale recommandation qui consiste à s'assurer de bases solides et à faire preuve de la maîtrise de ces bases, que ce soit par une rédaction efficace et convaincante à l'écrit, par des leçons calibrées et soignées ou une présentation à l'épreuve de modélisation qui inspirent toute confiance quant à la solidité de ces bases. La consultation du rapport du concours standard confortera ces priorités.

**Admissibilité.** L'épreuve écrite, unique, se présente sous un format légèrement différent de celui du concours standard. Le site [agreg.org](http://agreg.org) présente les archives du concours afin que les futurs candidats puissent se familiariser avec ce format. Le sujet était constitué

- d'une série d'exercices, qui balaient plutôt le niveau L1-L3,
- de deux problèmes **au choix**, l'un plutôt orienté sur la partie algèbre-géométrie du programme, l'autre orienté sur la partie analyse-probabilités.

Cette formulation permet d'une part de tester les candidats sur les bases du programme, et d'autre part de leur donner l'occasion de s'exprimer au mieux sur ce qui pourrait être leur terrain de prédilection. L'en-tête du sujet invitait très clairement les candidats à répartir leur temps, dont au moins la moitié devait être dévolue au problème et au moins un tiers à la partie exercices. Le barème correspondait à une telle répartition de l'effort. Un tel format « exercices (imposés) + problème au choix », avec la même clef de répartition du temps et du barème, sera reconduit en 2020.

**Admission.** Bien que le concours comporte une épreuve sur dossier, impliquant ainsi une connaissance du parcours et du profil du candidat, le jury travaille de manière étanche : les commissions des épreuves de leçons et de modélisation ne reçoivent aucune indication sur les candidats (sujet de thèse, provenance, situation professionnelle...). Les commissions n'ont par ailleurs aucune information quant aux résultats à l'écrit ou aux autres épreuves orales avant la phase de délibération. Ces épreuves obéissent donc au même fonctionnement et aux mêmes critères d'évaluation que pour le concours standard.

Le jury veille à respecter le programme. Des mathématiciens chevronnés estimeront peut être que des résultats « importants » manquent au programme. Les candidats restent libres d'en faire mention et de proposer des excursions hors des limites du programme, mais ces allusions, auxquelles le jury sait bien sûr s'adapter, ne sont absolument pas nécessaires pour prétendre aux notes maximales. Les candidats titulaires d'un doctorat, qui ont souvent mené des recherches très avancées sur des notions qui prolongent les éléments du programme, peuvent être tentés de se placer sur ce terrain qui a été celui de leur thèse. Le jury saura évidemment suivre le candidat, mais il s'attachera surtout à vérifier la maîtrise des bases du programme et la capacité à les exposer clairement et rigoureusement. Un positionnement outrageusement au-delà du programme n'a en général pour conséquence que de provoquer l'irritation du jury. Il est donc totalement inutile, si ce n'est contre-productif, de tenter d'éblouir par des énoncés sophistiqués, surtout lorsque les bases restent friables ou que la capacité à les énoncer précisément est absente.

Le tableau 2.1 donne des indications sur les notes obtenues par les admissibles et les présents. Globalement ces résultats sont tout à fait comparables à ceux du concours standard, même si la pertinence de cette comparaison est limitée par la faiblesse de l'effectif du concours spécial. Comme pour celui-ci, on remarque que la moyenne en modélisation est en léger retrait. Toutefois, on observe un écart-type important sur les résultats des admissibles, signe d'une population hétérogène, avec une proportion non négligeable de candidats insuffisamment préparés. Il s'agit soit de candidats dont la thèse et la pratique de mathématiques à ce niveau sont anciennes, soit, au contraire, de candidats qui estiment pouvoir passer le concours sur leurs acquis. Dans l'ensemble les corrélations sont très fortes entre les quatre épreuves.

		Écrit	Leçon	Dossiers	Mod.
Admis	Moy.	11,18	11,14	12,5	10,6
	Ec. type	3	3,3	3,4	5,1
Présents	Moy.	8,86	7,5	9,6	8,2
	Ec. type	3,5	5,11	5,5	5,5

TABLE 2.1 – Moyennes et écarts-types des admis et des présents à l'épreuve écrite et aux épreuves d'admission

### 2.2.2 Données statistiques diverses

Les indications sur la répartition des candidats suivant l'académie, l'âge, le genre et la profession sont donnés dans les tableaux 2.2, 2.3, 2.4. Deux candidats se sont présentés à l'épreuve écrite avec une dispense de diplômes, mais aucun n'a pu être déclaré admissible. La majeure partie des admissibles et des admis a moins de 30 ans. On trouvait 28 % puis 26 % de femmes parmi les inscrits et les présents à l'épreuve d'admissibilité. Avec 9 candidates sur 34, ce taux est préservé parmi les admissibles. À l'issue des épreuves orales, trois femmes sont déclarées admises (classement 2ème, 3ème et 9ème). Confirmant une observation de la session 2018, la session 2019 est marquée par la forte présence de candidats ayant une formation initiale d'ingénieur : 13 sur les 34 admissibles et 5 sur 11 admis. Parmi ces docteurs ingénieurs, on distingue encore deux populations : les néo-docteurs qui s'orientent immédiatement après leur thèse vers les carrières de l'enseignement et ceux qui ont une expérience d'ingénieur de plusieurs années et s'engagent dans une réorientation professionnelle. Ces deux types de profil ont pu

Académie	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
PCV	70	24	9	3
Lille	17	5	2	2
Aix-Marseille	11	7	3	2
Lyon	11	6	3	
Nice	11	3		
Bordeaux	10	5	2	1
Rennes	9	3	1	1
Orléans-Tours	9	6	1	
Grenoble	8	4	3	
Montpellier	7	2		
Toulouse	7	3	2	1
Reims	7	1	1	
Poitiers	6	2	1	1
Strasbourg	6	4	1	
Nantes	6	2		
La Réunion	6	1		
Nancy-Metz	5	2		
Caen	3			
Guadeloupe	3	2	1	
Clermont-Fd.	2	2		
Dijon	2			
Martinique	1			
Guyane	1	1		

TABLE 2.2 – Répartition suivant l'académie aux différentes étapes du concours

Age	< 29	29 - 30	30 - 32	32 - 35	35 - 40	40-45	45-50	> 50
Inscrits	11	21	20	35	43	34	26	44
Présents	4	8	6	14	16	14	9	18
Admissibles	2	5	4	5	5	5	5	2
Admis		3	2	2	2	2		

TABLE 2.3 – Répartition suivant l'âge aux différentes étapes du concours

franchir avec le même succès la barre d'admission, l'élément essentiel résidant dans le soin apporté à leur préparation au concours.

Les tableaux 2.5, 2.6 et 2.7 décrivent la cohorte des candidats admissibles en termes d'ancienneté après thèse et de domaine scientifique du doctorat. On observe de fortes évolutions d'une année sur l'autre, sur des effectifs qui restent réduits. La population des admissibles et des lauréats est très contrastée, mêlant « jeunes » docteurs et candidats dont la thèse est plus ancienne. On donne aussi, suivant une affectation quelque peu arbitraire, des éléments de répartition des candidats entre grands champs des mathématiques et dans d'autres disciplines. On notera pour cette session la réussite de candidats issus des sciences informatiques (qui n'ont pas forcément choisi l'option informatique pour l'épreuve de modélisation), et de candidats venus d'autres disciplines. Le jury se réjouit d'un concours ouvert à des profils aussi variés.

Profession	Inscrit	Compose	Admissible	Oral	Admis
CERTIFIE	69	37	12	9	2
SANS EMPLOI	33	11	4	4	1
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	20	4	1	1	1
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	13	3	1	1	
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	13	4	3	3	2
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	11	5	1	1	1
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	9				
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	6	1			
PROFESSIONS LIBERALES	6	2	1	1	1
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	6	2			
MAITRE AUXILIAIRE	5	2			
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	4				
AGREGE	4	1			
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	4				
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	4	2	1		
ETUD.HORS ESPE (PREPA MO.UNIV)	3	3	3	3	1
PLP	3	1	1	1	
PROFESSEUR ASSOCIE 2ND DEGRE	3	2	1		
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	2	1	1	1	1
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	2	2	2	1	1
ETUD.HORS ESPE (SANS PREPA)	2				
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	2	1	1		
ETUDIANT EN ESPE EN 1ERE ANNEE	1	1			
CONSEILLER D'ORIENTATION PSY.	1				
AG NON TIT FONCT TERRITORIALE	1				
ASSISTANT D'EDUCATION	1	1			
PERS ADM ET TECH MEN	1	1			
PERSONNEL DE DIRECTION	1	1			
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	1	1	1		
ETUD.HORS ESPE (PREPA CNED)	1				

TABLE 2.4 – Répartition suivant la profession aux différentes étapes du concours

		Ancienneté thèse	0-1 an	1-5 ans	5-7 ans	7-10 ans	plus de 10 ans
2019	Admissibles		5	7	5	2	10
	Admis		3	4	2	0	2
Section	CNU25	CNU26	CNU27	Autres (physique, mécanique, automatique,...)			
Admissibles	3	7	4	15			
Admis	3	2	2	4			

TABLE 2.5 – Répartition des admissibles (ayant déposé un dossier pour l’oral) 2019 suivant l’ancienneté et la discipline de la thèse

		Ancienneté thèse	0-1 an	1-5 ans	5-7 ans	7-10 ans	plus de 10 ans
2018	Admissibles		10	13	2	3	5
	Admis		7	5	1	1	1
Section	CNU25	CNU26	CNU27	Autres (physique, mécanique, automatique,...)			
Admissibles	6	13	5	9			
Admis	4	5	3	3			

TABLE 2.6 – Répartition des admissibles (ayant déposé un dossier pour l’oral) 2018 suivant l’ancienneté et la discipline de la thèse

		Ancienneté thèse	0-1 an	1-5 ans	5-7 ans	7-10 ans	plus de 10 ans
2017	Admissibles		0	13	3	5	5
	Admis		0	6	1	1	2
Section	CNU25	CNU26	CNU27	Autres (physique, mécanique, automatique,...)			
Admissibles	10	10	3	3			
Admis	4	4	0	2			

TABLE 2.7 – Répartition des admissibles 2017 suivant l’ancienneté et la discipline de la thèse

## Chapitre 3

# Épreuve écrite de mathématiques

Le sujet est disponible à l'URL <http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid111368/sujets-et-rapports-des-jeux> ou sur le site <http://www.agreg.org>.

### 3.1 Commentaires sur l'épreuve écrite d'admissibilité

Le jury se réjouit que la majorité des candidats aient abordé et traité, même partiellement, tous les exercices. Les candidats se sont répartis équitablement entre le problème d'analyse et le problème de mathématiques générales. Les connaissances mobilisées couvraient un large domaine des mathématiques, et une bonne proportion des candidats ont montré qu'ils avaient préparé sérieusement cette épreuve écrite. Des efforts sont toutefois à faire sur la rédaction, qui représente une part importante de l'évaluation et, en termes de volume, on pouvait s'attendre à ce qu'une portion plus substantielle des problèmes soit traitée. Trois copies peuvent être qualifiées d'excellentes.

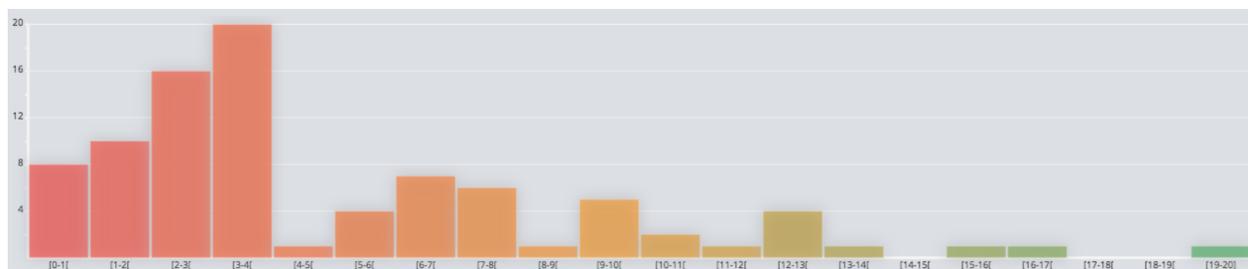


FIGURE 3.1 – Répartition des notes de l'épreuve écrite

### 3.2 Remarques générales

#### 3.3 Exercice 1

*Cet exercice était auto-contenu et ne nécessitait pas de connaissances sur les séries entières, seuls les résultats sur la convergence des séries numériques étaient à connaître. Il a été traité par la majorité des candidats.*

1. *Une difficulté, à ne pas négliger, est que les suites sont à valeurs complexes, mais les ensembles dont on prend les bornes supérieures sont inclus dans  $\mathbf{R}$ . Certains candidats ont écrit une majoration de  $a_n r^n$ , ce qui a été pénalisé.*

Le terme général d'une série convergente tend vers 0 donc  $C(a) \subset B(a)$ . Une suite qui est convergente est bornée donc  $B(a) \subset A(a)$ . Conclusion :  $C(a) \subset B(a) \subset A(a)$ . De plus,  $a_n = 1$  donne  $1 \in A(a)$  mais  $1 \notin B(a)$ ,  $a_n = 1/n$  donne  $1 \in B(a)$  et  $1 \notin C(a)$  (série harmonique).

Remarque : les exemples ci-dessous donnent des réponses aux inclusions strictes.

2. *L'inégalité des bornes supérieures à partir des inclusions a été très rarement justifiée, et l'égalité a été très peu traitée.*

Les inclusions précédentes donnent  $\sup C(a) \leq \sup B(a) \leq \sup A(a)$ , car si  $E \subset F$  on a  $\sup(E) \leq \sup(F)$ . En effet  $\forall x \in E$  on a que  $x \in F$  et donc  $x \leq \sup(F)$ , aussi  $\sup(F)$  est un majorant de  $E$ , la borne supérieure est le plus petit des majorants donc  $\sup E \leq \sup F$ . Il reste à montrer que  $\sup(A(a)) \leq \sup(C(a))$ . On va supposer le contraire  $\sup(C(a)) < \sup(A(a))$  et on choisit  $\rho$  tel que  $\sup(C(a)) < \rho < \sup(A(a))$  donc la suite  $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbf{N}}$  est bornée. Par le lemme d'ABEL, pour tout  $r \in ]\sup(C(a)), \rho[$ ,  $r = |r| \geq 0$ , la série  $\sum a_n r^n$  converge absolument car

$$|a_n r^n| \leq |a_n| \rho^n \frac{r^n}{\rho^n} \leq M \left( \frac{r}{\rho} \right)^n$$

ce qui est contradictoire avec la définition de  $C(a)$ .

3. *Le jury attendait un retour à la définition du rayon de convergence dans cette question. Les candidats n'ont en effet que rarement utilisé les définitions de  $A(a)$ ,  $B(a)$  et  $C(a)$ . Ils ont préféré essayer des « recettes » qui ne s'appliquaient pas ici (par exemple, le critère de D'ALEMBERT pour les séries entières appliqué à une série lacunaire).*

- (a) En 1, la suite,  $(1+i)/n$ , tend vers 0 donc  $1 \in B(a)$ , mais la série  $\sum_n (1+i)/n$  diverge donc  $1 \notin C(a)$ . En conclusion,  $R = 1$ .
- (b) En  $1/2$  on a  $2^{n((-1)^n - 1)} \leq 1$ , donc la suite est bornée, et  $1/2 \in A(a)$ . Mais la série est divergente car son terme général ne tend pas vers 0 (suite extraite des indices pairs) donc  $1/2 \notin B(a)$  ou  $C(a)$ . En conclusion,  $R = \frac{1}{2}$ .
- (c) La suite  $(\cos(2^n))_{n \in \mathbf{N}}$  est bornée donc  $1 \in A(a)$  d'où  $R \geq 1$ . Mais la suite  $(\cos(2^n))_{n \in \mathbf{N}}$  ne tend pas vers 0, donc  $1 \notin B(a)$   $R \leq 1$ . En effet, sinon,  $\cos(2^{n+1}) = 2 \cos^2(2^n) - 1$  convergerait vers  $-1$ , or c'est une suite extraite de  $(\cos(2^n))_{n \in \mathbf{N}}$  !

4. *Attention à l'implication  $R$  rayon de convergence donc  $|a_{n+1}/a_n| \rightarrow 1/R$ ...*

Soient  $r \geq 0$  et  $\rho \in ]0, R[$ . Pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\frac{|a_n|}{n!} r^n = \underbrace{|a_n| \rho^n}_{\text{bornée}} \times \underbrace{\left( \frac{r}{\rho} \right)^n}_{\text{tend vers 0}}$$

On en déduit que l'ensemble  $B$  associé à  $a_n/n!$  est  $[0, +\infty[$  donc la borne supérieure, qui est le rayon, est  $+\infty$ .

5. La contraposée de la question précédente est : si le rayon de la seconde série n'est pas  $+\infty$  alors  $R \leq 0$ . Le rayon de convergence étant positif, c'est donc 0.

Exemple :  $\sum_n n! 2^{-n} z^n$  a un rayon de 0 et  $\sum_n 2^{-n} z^n$  a un rayon de 2 (en 2, la suite est bornée mais ne tend pas vers 0) donc  $2 \in B(a)$  et  $2 \notin A(a)$ .

### 3.4 Exercice 2

*Les candidats ont majoritairement traité les trois premières questions. La difficulté de cet exercice résidait dans le fait que les matrices n'étaient pas nécessairement carrées, ce qui impliquait de devoir vérifier à certains moments les compatibilités des produits (questions 2 et 3). Il est à noter que très peu de candidats ont utilisé le théorème spectral pour étudier les propriétés de  $\mathcal{R}(f_A)$ . Par ailleurs, trop*

de candidats refusent d'aborder des questions de supremum, notamment dans un exercice qui relève d'algèbre linéaire au début. La continuité de  $\mathcal{R}(f_A)$  sur un compact était un argument simple, mais déterminant ici.

1. Le produit matriciel  $AB = C$  et  $BA = D$  donne, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  et  $k, l \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$c_{i,j} = \sum_{q=1}^p a_{i,q} b_{q,j}, \quad d_{k,l} = \sum_{q=1}^n b_{k,q} a_{q,l}.$$

On a

$$\text{trace}(C) = \sum_{i=1}^n \sum_{q=1}^p a_{i,q} b_{q,i}, \quad \text{trace}(D) = \sum_{i=1}^p \sum_{q=1}^n b_{i,q} a_{q,i} = \sum_{q=1}^p \sum_{i=1}^n b_{i,q} a_{q,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{q=1}^p b_{q,i} a_{i,q}.$$

2. — Pour le caractère symétrique, on remarque que  $\text{trace}(M^T) = \text{trace}(M)$  aussi

$$\langle A | B \rangle = \text{trace}(A^T \times B) = \text{trace}(B^T \times A) = \langle B | A \rangle$$

— La linéarité à droite découle du caractère linéaire de la trace : pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,

$$\langle A | \lambda B + C \rangle = \text{trace}(A^T (\lambda B + C)) = \lambda \text{trace}(A^T B) + \text{trace}(A^T C) = \lambda \langle A | B \rangle + \langle A | C \rangle$$

— Le calcul

$$\langle A | A \rangle = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \geq 0$$

donne le caractère positif, et aussi défini positif puisque cette somme est nulle si et seulement si chaque terme est nul, c'est-à-dire chaque coefficient de la matrice  $A$  est nul.

3. Pour montrer que  $f_A$  est un endomorphisme, le point essentiel est la vérification des tailles des matrices pour assurer la validité du résultat et son appartenance à  $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{R})$  au final. Le caractère linéaire est sans problème. L'endomorphisme est auto-adjoint, en effet

$$\begin{aligned} \langle f_A(M) | N \rangle &= \text{trace}(A^T \times (M \times A^T \times N)) \\ &\stackrel{\text{question 1}}{=} \text{trace}(M \times A^T \times N \times A^T) \\ &\stackrel{\text{transposition}}{=} \text{trace}(A \times N^T \times A \times M^T) \\ &\stackrel{\text{question 1}}{=} \text{trace}(M^T \times A \times N^T \times A) = \langle M | f_A(N) \rangle. \end{aligned}$$

4. L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et le fait que les applications linéaires en dimension finie sont continues donnent

$$|\langle f_A(M) | M \rangle| \leq \|f_A(M)\| \times \|M\| \leq \|f_A\| \|M\|^2.$$

L'ensemble  $\mathcal{R}(f_A)$  est donc une partie bornée non vide de  $\mathbf{R}$  : elle possède des bornes inférieure  $a$  et supérieure  $b$  dans  $\mathbf{R}$ . Le théorème spectral assure l'existence d'une base orthonormée constituée de vecteurs propres pour  $f_A$ . Soit  $(M_1, \dots, M_{n \times p})$  une telle base. Supposons que les valeurs propres correspondantes soient dans l'ordre croissant  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n \times p}$ .

On a pour  $M \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ ,  $M = \sum_{k=1}^{n \times p} \alpha_k M_k$ ,

$$\left\langle f_A \left( \sum_{k=1}^{n \times p} \alpha_k M_k \right) \middle| \sum_{j=1}^{n \times p} \alpha_j M_j \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n \times p} \alpha_k \lambda_k M_k \middle| \sum_{j=1}^{n \times p} \alpha_j M_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n \times p} \lambda_k \alpha_k^2.$$

On a pour tout  $k$ ,  $\lambda_1 \leq \lambda_k \leq \lambda_{n \times p}$  et  $\alpha_k^2 \geq 0$ , ce qui permet d'obtenir

$$\lambda_1 \times \|M\| \leq \langle f_A(M) | M \rangle \leq \lambda_{n \times p} \|M\|$$

ce qui (re-)donne l'existence de  $a$  et  $b$ . Comme  $M_1$  et  $M_{n \times p}$  réalisent chacun une égalité, cela permet de conclure que  $a = \lambda_1$  et  $b = \lambda_{n \times p}$ .

5. Soit  $c \in [a, b]$ . Il existe  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $c = (1 - \alpha)a + \alpha b$ . Posons  $M = \sqrt{1 - \alpha}M_1 + \sqrt{\alpha}M_{n \times p}$  alors

$$\langle f_A(M) | M \rangle = \langle \sqrt{1 - \alpha}aM_1 + \sqrt{\alpha}bM_{n \times p} | \sqrt{1 - \alpha}M_1 + \sqrt{\alpha}M_{n \times p} \rangle = (1 - \alpha)a + \alpha b = c$$

et on a  $\|M\|^2 = (1 - \alpha) + \alpha = 1$  (coordonnées dans une base orthonormée), donc  $c \in \mathcal{R}(f_A)$ . Les parties convexes de  $\mathbf{R}$  sont aussi les parties connexes. On peut donc aussi prouver que cet ensemble est connexe.

- Premier cas :  $n = p = 1$ ;  $f_A$  est une homothétie donc  $\mathcal{R}(f_A) = \{\lambda M^2 / |M| = 1\} = [\lambda, \lambda]$ .
- Deuxième cas :  $n \times p \geq 2$ ; la sphère unité est connexe et l'application  $M \mapsto \langle f_A(M) | M \rangle$  est continue (polynomiale en ses variables). L'image d'un connexe par une application continue est connexe. On a montré que  $\mathcal{R}(f_A)$  est un intervalle de  $\mathbf{R}$ . Et c'est un compact comme image d'un compact (la sphère unité en dimension finie) par une application continue. En conclusion,  $\mathcal{R}(f_A)$  est un intervalle compact de  $\mathbf{R}$ , c'est donc un segment, les bornes étant bien sûr la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble.

### 3.5 Exercice 3

Très peu de candidats ont pris la peine de justifier l'égalité

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = Y, Y = k),$$

qui a été, par ce fait, une question discriminante. De même, beaucoup de candidats ont oublié le cas où le rang de la matrice  $A$  est 0, ce qui les a pénalisés. Il est ainsi recommandé de bien lire les énoncés des exercices dans leur ensemble pour acquérir un minimum de recul sur les résultats recherchés.

1.  $((Y = k))_{k \in \mathbf{N}}$  est un système complet d'événements. On en déduit par  $\sigma$ -additivité

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = Y, Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = K) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \times \mathbf{P}(Y = K).$$

La dernière égalité résulte de l'indépendance.

2. L'événement ( $A$  non inversible) est égal à l'événement ( $\det A = 0$ ) qui est lui-même ( $X = 0$  ou  $Y = 0$ ). On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = 0 \cup Y = 0) &= \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(Y = 0) - \mathbf{P}(X = 0 \cap Y = 0) \\ &= \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(Y = 0) - \mathbf{P}(X = 0) \times \mathbf{P}(Y = 0) \\ &= e^{-\lambda} + p - pe^{-\lambda} = \mathbf{P}(A \text{ non inversible}). \end{aligned}$$

L'événement ( $A$  est inversible) est aussi ( $X > 0$  et  $Y > 0$ ). Ainsi, par indépendance, on obtient

$$\mathbf{P}(X > 0, Y > 0) = \mathbf{P}(X > 0) \times \mathbf{P}(Y > 0) = (1 - e^{-\lambda}) \times (1 - p).$$

Ceci donne une autre expression de

$$\mathbf{P}(A \text{ non inversible}) = 1 - (1 - e^{-\lambda}) \times (1 - p).$$

3. Les valeurs de  $\text{rang}(A)$  sont 0, 1, 2. L'événement ( $\text{rang}(A) = 2$ ) est équivalent à ( $A$  est inversible) donc  $\mathbf{P}(\text{rang}(A) = 2) = (1 - e^{-\lambda}) \times (1 - p)$ . L'événement ( $\text{rang}(A) = 0$ ) est équivalent à ( $A = 0$ ) i.e. ( $X = Y = 0$ ), donc

$$\mathbf{P}(\text{rang}(A) = 0) = \mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0) \times \mathbf{P}(Y = 0) = e^{-\lambda} \times p.$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{rang}(A) = 1) &= 1 - \mathbf{P}(\text{rang}(A) = 0) - \mathbf{P}(\text{rang}(A) = 2) \\ &= 1 - e^{-\lambda} \times p - (1 - e^{-\lambda}) \times (1 - p) \\ &= p + e^{-\lambda} - 2p \times e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que l'événement ( $\text{rang}(A) = 1$ ) correspond à ( $(X = 0 \text{ et } Y > 0)$  ou ( $X > 0 \text{ et } Y = 0$ )). Ces événements étant incompatibles, cela donne

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{rang}(A) = 1) &= \mathbf{P}(X = 0, Y > 0) + \mathbf{P}(X > 0, Y = 0) \\ &= \mathbf{P}(X = 0) \times \mathbf{P}(Y > 0) + \mathbf{P}(X > 0) \times \mathbf{P}(Y = 0) \\ &= e^{-\lambda} \times (1 - p) + (1 - e^{-\lambda}) \times p. \end{aligned}$$

Le calcul de l'espérance est immédiat et donne

$$\mathbf{E}(\text{rang}(A)) = 1 \times (p + e^{-\lambda} - 2p \times e^{-\lambda}) + 2 \times (1 - e^{-\lambda}) \times (1 - p) = 2 - p - e^{-\lambda}.$$

4. *La moitié des candidats n'a pas traité cette question, pourtant élémentaire en algèbre linéaire. Les réponses ont été contrastées : des réponses longuement justifiées, mais parfois fausses. Les candidats sont invités à bien vérifier la logique de leur raisonnement.*

La condition nécessaire et suffisante est ( $(a \neq b)$  ou ( $a = b$  et  $c = 0$ )). Le ( $a \neq b$ ) correspond au cas où la matrice a deux valeurs propres distinctes en dimension 2 (condition suffisante de diagonalisation). Le cas  $a = b$  correspond à une seule valeur propre, et dans ce cas la matrice n'est diagonalisable qu'à la seule condition d'être une matrice scalaire.

5. L'événement ( $A$  diagonalisable) correspond à ( $(X \neq Y)$  ou ( $X = Y$  et  $X + Y = 0$ )), ce qui est équivalent à  $X \neq Y$  ou  $X = Y = 0$ . Ces événements étant incompatibles, cela donne

$$\mathbf{P}(A \text{ est diagonalisable}) = \mathbf{P}(X \neq Y) + \mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = 1 - \mathbf{P}(X = Y) + \mathbf{P}(X = 0) \times \mathbf{P}(Y = 0).$$

À l'aide de la première question, on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \text{ est diagonalisable}) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \times \mathbf{P}(Y = k) \\ &= 1 - p \times e^{-\lambda} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda \times (1 - p))^k}{k!} \\ &= 1 - p \times e^{-\lambda} \times (e^{\lambda(1-p)} - 1) \\ &= 1 - p \times (e^{-\lambda p} - e^{-\lambda}). \end{aligned}$$

### 3.6 Exercice 4

*Cet exercice a été abordé par 2/3 des candidats, qui se sont concentrés sur les deux premières questions. Toutes les propriétés des objets n'ont pas été vérifiées systématiquement.*

1. Vérification de la connaissance de la définition :

**Inclusion :** dans  $\mathbf{Z}[i]$  puisque  $\mathbf{Z}[i]$  stable par produit,

**Non vide :**  $0 = (1 + 3i) \times 0$ ,

**Stabilité pour + :**  $\forall (z, z') \in \mathbf{Z}[i]^2$ ,  $(1 + 3i) \times z + (1 + 3i) \times z' = (1 + 3i) \times (z + z')$  résultant des propriétés d'anneau de  $\mathbf{Z}[i]$ ,

**Absorption :**  $\forall z \in \mathcal{I}$ , il existe  $z' \in \mathbf{Z}[i]$  tel que  $z = (1 + 3i) \times z'$ , aussi  $\forall z'' \in \mathbf{Z}[i]$  on a  $z \times z'' = (1 + 3i) \times (z' \times z'') \in \mathcal{I}$ .

2. **Réflexivité :**  $\forall z \in \mathbf{Z}[i]$   $z - z = 0 = (1 + 3i) \times 0$ ,

**Symétrie :**  $\forall (z, z') \in \mathbf{Z}[i]^2$ ,  $z - z' = (1 + 3i)z''$ , on a  $z' - z = (1 + 3i) \times (-z'')$ ,

**Transitivité :**  $\forall (z, z', z'') \in \mathbf{Z}[i]^2$ ,  $z - z' = (1 + 3i) \times y$  et  $z' - z'' = (1 + 3i) \times y'$  : cela donne en ajoutant les relations  $z - z'' = (1 + 3i) \times (y + y')$ .

3. La compatibilité de l'addition consiste à vérifier que, si pour tous  $a, b, c, d$  on a  $a\mathcal{R}b$  et  $c\mathcal{R}d$ , alors  $(a + c)\mathcal{R}(b + d)$  puisque  $a - b = (1 + 3i) \times z$  et  $c - d = (1 + 3i) \times z'$ , et par conséquent  $(a + c) - (b + d) = (1 + 3i) \times (z + z')$ . Mais aussi  $ac = (b + (1 + 3i)z) \times (d + (1 + 3i)z') = bd + (1 + 3i) \times z''$  donne la compatibilité pour la multiplication.

4. Le morphisme canonique de l'anneau  $\mathbf{Z}$  dans l'anneau  $\mathbf{Z}[i]/\mathcal{I}$  est un morphisme d'anneaux. On remarque que la classe de  $i$  est celle de 3 puisque  $(1 + 3i) \times (-i) = 3 - i$ .

Aussi de  $i = 3$ , on déduit  $-1 = 9$  ou encore  $10 = 0$  dans  $\mathbf{Z}[i]/\mathcal{I}$ . Aussi 10 est dans le noyau du morphisme canonique. Maintenant, si  $n \in \mathbf{Z}$  est dans le noyau, on a

$$n = (1 + 3i) \times (a + ib) = (a - 3b) + i(3a + b)$$

ce qui impose  $b = -3a$  d'où  $n = (1 + 3i)(a - 3ai) = 10a$ , donc  $n \in 10\mathbf{Z}$  i.e.  $\ker(\varphi) \subset 10\mathbf{Z}$ .

Or 10 est dans le noyau : c'est donc  $10\mathbf{Z}$ . Le théorème d'isomorphisme assure que  $\text{im } \varphi \simeq \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ .

Mais  $\varphi$  est surjective, en effet  $a + ib = a + 3b$  dans  $\mathbf{Z}[i]/\mathcal{I}$  et donc  $\varphi(a + 3b) = a + ib$ .

On peut aussi construire une application de  $\mathbf{Z}[i]$  dans  $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$  en utilisant le fait que  $i\mathcal{R}3$

$$\theta : a + ib \mapsto a + 3b.$$

Vérifions que cette application est un morphisme d'anneaux :  $\forall ((a + ib), (c + id)) \in \mathbf{Z}[i]^2$ ,

—  $\theta(1) = 1$ ,

— on a pour l'addition

$$\theta((a + ib) + (c + id)) = \theta((a + c) + i(b + d)) = a + c + 3(b + d) = a + 3b + c + 3d = \theta(a + ib) + \theta(c + id),$$

— on a pour la multiplication

$$\theta((a + ib) \times (c + id)) = \theta((ac - bd) + i(ad + bc)) = ac - bd + 3(ad + bc),$$

et puisque  $9 = -1$  dans  $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$

$$\theta(a + ib) \times \theta(c + id) = (a + 3b) \times (c + 3d) = ac + 9bd + 3(ad + bc) = ac - bd + 3(ad + bc).$$

Cette application est surjective : cela vient du fait que 1 et 3 sont premiers entre eux. Il y a existence d'un couple de BÉZOUT  $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$  tel que  $1u + 3v = 1$  (par exemple  $1 \times (-2) + 3 \times 1 = 1$  et donc pour tout  $k \in \mathbf{Z}$  on a  $k = 1(uk) + 3(vk)$  ( $k = -2k + 3k$ )). On déduit alors que  $\forall k \in \mathbf{Z}$  on a  $\theta(-2k + ik) = k$ . Ainsi  $\theta$  est a fortiori surjective sur  $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ .

Il reste à déterminer le noyau de  $\theta$ . Soit  $a + ib \in \ker(\theta)$  alors  $a + 3b = 0$  dans  $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ . Ceci donne  $a + ib \in \ker(\theta)$  si, et seulement si, il existe  $k \in \mathbf{Z}$  tel que  $a + 3b = k \times 10$ .

On résout cette équation diophantienne d'inconnue  $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$  en remarquant que  $10 = 1^2 + 3^2$ .

Il vient donc

$$(a - k) + 3(b - 3k) = 0.$$

Or  $3|(a - k)$ , aussi il existe  $\ell \in \mathbf{Z}$  tel que  $a - k = 3\ell$ , on a  $1|(b - 3k)$  donc il existe  $\ell'$  tel que  $b - 3k = \ell'$ . Mais l'égalité à 0 impose que  $3\ell + 3\ell' = 0$  i.e.  $\ell' = -\ell$ , donc, nécessairement, que

$$a = k + 3\ell, \quad \text{et } b = 3k - \ell.$$

On vérifie sans peine que ces conditions sont suffisantes. On a donc montré que

$$\ker(\theta) = \{(k + 3\ell) + i(3k - \ell)/(k, \ell) \in \mathbf{Z}^2\} = \{(1 + 3i)(k - i\ell)/(k, \ell) \in \mathbf{Z}^2\} = \mathcal{I}.$$

Le théorème d'isomorphisme assure que  $\mathbf{Z}[i] / \ker(\theta) = \mathbf{Z}[i] / \mathcal{I}$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ .

5. Cette question a été très peu traitée.

L'application  $\varphi : [k]_{10} \mapsto Cl(k)$  est un isomorphisme d'anneaux. Aussi  $Y$  solution de  $Y^2 + 5 = 0$ , si, et seulement si,  $X = \varphi(Y)$  solution de  $\varphi(Y^2) + \varphi(5) = \varphi(0)$ , i.e.  $X^2 + 5 = 0$  avec  $X = \varphi(Y)$ . Or dans  $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$  cette équation est  $X^2 = 5$ , et seul 5 est solution (on écrit les carrés dans  $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ ). En conclusion,  $Cl(5) = Cl(2 \pm i)$  est l'unique solution à l'équation dans  $\mathbf{Z}[i] / \mathcal{I}$ .

### 3.7 Problème d'Analyse

Le problème consistait à traiter une équation différentielle dite avec retard. La théorie de CAUCHY-LIPSCHITZ, souvent évoquée par les candidats, ne pouvait pas s'appliquer, en raison du terme de retard qui demandait de développer d'autres méthodes. Le caractère  $L^1$  de la solution cherchée n'a pas été véritablement exploité par les candidats, qui se sont essentiellement limités à des fonctions dérivables. La partie sur la fonction  $\Gamma$  d'EULER, très classique, a été abordée par la majorité des candidats, avec plus ou moins de bonheur, notamment en ce qui concerne les théorèmes d'holomorphic et méromorphie sous le signe intégrale. Pour plus de détails, le lecteur pourra se rapporter aux ouvrages de référence. Les questions sur la transformée de MELLIN ont été bien traitées par environ la moitié des candidats, à l'exception des questions sur l'holomorphic, qui requérait un théorème d'holomorphic sous le signe intégral, et des deux dernières questions, sur la convergence d'un produit, pourtant assez classique, et l'inverse de la transformée de MELLIN, question plus technique. Les quelques réponses fournies par peu de candidats aux questions de la dernière partie n'ont pas été pour la plupart pertinentes, ce qui est dommage, car elle pouvait quand même être traitée en admettant les résultats des parties précédentes.

Des compléments au corrigé peuvent être trouvés dans les références suivantes, dont le sujet s'est inspiré.

B. VAN BRUNT, A. A. ZAIDI, T. LYNCH, *Cell division and the pantograph equation*, ESAIM : ProcS, 62, 158-167 (2018).

A. HALL, G. WAKE, *A functional differential equation arising in modelling of cell growth*, The Journal of the Australian Mathematical Society, Series B, Applied Mathematics, 30(4), 424-435 (1989).

P. FLAJOLET, X. GOURDON, P. DUMAS, *Mellin transforms and asymptotics : Harmonic sums*, Theoretical Computer Science, 144(1-2), 3-58 (1995).

## 1 Premières propriétés de la solution

1. Il faut comprendre l'équation au sens des distributions. Comme  $\varphi$  est supposée intégrable au sens de LEBESQUE, sa dérivée au sens des distributions est également intégrable par l'équation. On en déduit que  $\varphi$  admet un représentant continu, qu'on identifiera à la solution cherchée par la suite.

2. Pour montrer que  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur l'ouvert, on écrit

$$\varphi'(x) = -a\varphi(x) + ab\varphi(bx)$$

qui est bien une fonction continue par les théorèmes généraux.

Par récurrence sur  $n$ ,  $\varphi$  est de classe  $C^n$  pour tout  $n$ . En conclusion,  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .

3. Soit  $b > 0$ . On remarque que, pour tout  $0 < \epsilon < A$ ,

$$\int_{\epsilon}^A \varphi'(x) dx = -a \int_{\epsilon}^A \varphi(x) dx + a \int_{b\epsilon}^{bA} \varphi(y) dy.$$

Comme  $\varphi$  est de classe  $C^1$ , le membre de gauche vaut  $\varphi(A) - \varphi(\epsilon)$ . Par intégrabilité de  $\varphi$ , la limite du membre de droite vaut

$$a \int_{b\epsilon}^{\epsilon} \varphi.$$

Par continuité de  $\varphi$ , la limite de ce terme quand  $\epsilon \rightarrow 0$  est 0. Donc  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \varphi(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \varphi(\epsilon)$ ,  $\varphi$  étant continue en 0 d'après les questions précédentes. Or  $\varphi$  étant intégrable sur  $\mathbf{R}^+$ , et plus précisément au voisinage de  $+\infty$ , si elle possède une limite, ce ne peut être que 0.

4. La question précédente montre qu'en posant  $\varphi(0) = 0$ , on a ainsi un prolongement par continuité de  $\varphi$  sur  $[0, +\infty[$ . Ce prolongement est de classe  $C^1$  par le théorème : si  $\varphi$  est continue sur  $[0, 1]$ , dérivable sur  $]0, 1]$  et  $\varphi'$  possède une limite finie en 0 alors  $\varphi$  est  $C^1$  sur l'intervalle fermé et  $\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = 0$  ici. Par récurrence, on montre que pour tout  $n \geq 0$ ,  $\varphi^{(n)}$  est de classe  $C^1$  sur le fermé en utilisant

$$\forall x > 0, \quad \varphi^{(n+1)}(x) = -a\varphi^{(n)}(x) + ab^{n+1}\varphi^{(n)}(bx).$$

## 2. Etudes préliminaires

### 2.1 Prolongement de la fonction $\Gamma$ d'EULER

1. L'équivalent RIEMANN en 0 impose  $1 - x < 1$ , c'est-à-dire  $x > 0$ , et l'intégrande est négligeable devant  $e^{-x/2}$  en  $+\infty$ . Le caractère non nul découle du fait que l'on intègre une fonction continue positive et strictement positive, en 1 par exemple, ce qui donne  $\Gamma(x) > 0$ .

2. On applique le théorème de continuité sous le signe intégrale sur  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ , en vérifiant la domination par  $(t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$ .

3. On applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale sur  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ , en vérifiant la domination par  $(t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t} |\ln t|$ , qui est négligeable devant  $e^{-t/2}$  à l'infini. En 0, on a pour  $\alpha < 1$

$$\frac{|\ln t|}{t^\alpha} = \frac{\ln t}{t^{\frac{\alpha-1}{2}}} \times \frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} = o\left(\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$$

et comme  $\frac{\alpha+1}{2} < 1$  on a une fonction RIEMANN-intégrable sur  $]0, 1]$ .

4. Une intégration par parties donne, pour  $x > 0$ ,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , une récurrence à partir de  $\Gamma(1) = 1$  (primitive immédiate) permet de répondre  $\Gamma(n+1) = n!$ .

5. On peut raisonner sur les équations de CAUCHY-RIEMANN sur  $\mathbf{R}^2$  avec des hypothèses de domination locale, sur toute bande verticale dont la base réelle  $I$  est un segment :  $|t^{x+iy}-1| = t^{x-1} \leq t^{\alpha-1}$  et  $(t^{b-1} + t^{a-1})e^{-t} \ln t = o(e^{-t/2})$  en  $+\infty$ . On pouvait aussi exploiter le théorème de convergence dominée version holomorphe.

6. On a  $0 < R = 2R - R < n - R \leq n - |z| \leq |z + n|$  qui donne l'inégalité immédiatement par la décroissance de  $y \mapsto \frac{1}{y}$  sur  $]0, +\infty[$ .

7. La question précédente permet de conclure à la convergence normale sur le disque fermé  $D(0, R)$  de la série de fonctions holomorphes (fractions rationnelles sans pôle dans le disque)

$$\sum_{n=|2R|+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

Elle est donc holomorphe, la partie de 0 à  $[2R]$  est une somme finie de fractions rationnelles à pôle simple sur les entiers négatifs. En conclusion, la fonction est holomorphe sur tout compact de  $\mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ .

8. On a, par le développement en série entière de la fonction exponentielle,  $t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{n!}$ . Chaque fonction est  $\mathbf{L}^1(0, 1)$  et l'hypothèse de domination

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^{\operatorname{Re}(z)+n-1}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n + \operatorname{Re}(z))} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!n} < +\infty$$

permet de justifier l'interversion des symboles  $\sum$  et  $\int$  pour tout  $z$  tel que  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

9. On a, pour tout  $x > 0$ ,

$$\Gamma(x) = \underbrace{\int_0^1}_{S(x)} + \underbrace{\int_1^{+\infty}}_{I(x)} ;$$

$S$  coïncide sur  $]0, +\infty[$  avec une fonction holomorphe sur  $\mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$  (question 2.1.7) et  $I$  coïncide sur  $]0, +\infty[$  avec une fonction holomorphe sur  $\mathbf{C}$ .

10. La fonction  $\Gamma$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$  qui vérifie  $\Gamma(x + 1) - x\Gamma(x) = 0$  sur  $]0, +\infty[$  (Cf. preuve question 2.1.4). Aussi par le principe des zéros isolés, cette relation est vraie sur  $\mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ .

11. Pour  $z$  vérifiant  $\operatorname{Re}(z) > 0$  et  $s \geq 0$ , on effectue le changement de variable affine  $u = \frac{t}{1+s}$

$$\frac{\Gamma(z)}{(1+s)^z} = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{t}{1+s} \right)^{z-1} \frac{dt}{1+s} = \int_0^{+\infty} e^{-(1+s)u} u^{z-1} du.$$

Remarque : on reconnaît la transformée de LAPLACE de  $t \mapsto e^{-t}t^{z-1}$ .

12. Pour  $x \in ]0, \operatorname{Re}(z)[$ , admettons la convergence de l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\Gamma(z) \times s^{x-1}}{(1+s)^z} ds &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(1+s)u} u^{z-1} s^{x-1} du ds \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(1+s)u} u^{z-1} s^{x-1} ds du \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{z-1} \int_0^{+\infty} e^{-su} s^{x-1} ds du \\ &\stackrel{su=y}{=} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{z-1} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{x-1} u^{-x+1} \frac{dy}{u} du \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{z-x-1} \Gamma(x) du = \Gamma(x)\Gamma(z-x). \end{aligned}$$

La justification des calculs se fait en partant du résultat : on a deux intégrales simples (chacune des fonctions dans  $\mathbf{L}^1$ ), on fait un changement de variable affine (les fonctions restent toutes dans  $\mathbf{L}^1$ ), ce qui autorise l'utilisation du théorème de FUBINI-TONELLI.

13. Si on suppose que  $\Gamma$  s'annule en  $\alpha$ , alors  $\Gamma(x)\Gamma(\alpha - x) = 0$  pour tout  $x$  réel de  $]0, \operatorname{Re}(\alpha)[$ . Mais  $\Gamma(x) \neq 0$  (question 2.1.1), aussi  $\Gamma(\alpha - x) = 0$  et la fonction  $\Gamma$  s'annule alors sur l'intervalle ouvert qui joint  $i\operatorname{Im}(\alpha)$  à  $\alpha$ . Or l'holomorphie de  $\Gamma$  sur la bande  $\operatorname{Re}(z) > 0$  implique que  $\Gamma$  est nulle sur ce domaine, ce qui est absurde, donc  $\Gamma$  ne s'annule pas sur la bande  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

Elle ne peut s'annuler sur  $\mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ , sinon la relation fonctionnelle  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$  appliquée plusieurs fois entraîne que  $\Gamma$  s'annule sur la bande  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

## 2.2 Propriétés de la transformée de MELLIN

1. On a

$$\forall \alpha < \alpha', \forall x \in ]0, 1[, \quad 0 \leq x^{\alpha'-1}|f(x)| \leq x^{\alpha-1}|f(x)|.$$

D'où le résultat : la fonction  $\widetilde{\mathbf{1}}_{]0,1[}|f|$  est décroissante sur  $[\alpha, +\infty[$ .

2. La fonction  $\widetilde{\mathbf{1}}_{]0,1[}|f|$  est décroissante positive et continue sur  $]\alpha_*, +\infty[$ , d'après le théorème de continuité des intégrales de LEBESGUE.

La limite est donc positive, soit finie, soit  $+\infty$ . Les deux comportements sont possibles (intégrales de BERTRAND) :

- pour  $f : x \mapsto (\ln(ex))^{-1}$ ,  $\alpha_* = 1$  n'est pas atteint,
- pour  $f : x \mapsto |\ln(ex)|^{-\gamma}$ ,  $\gamma < 1$ ,  $\alpha_* = 1$  est atteint.

3. Soit  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(z) \in ]\alpha_*, \beta^*[$ . Alors pour  $\varepsilon = (\beta^* - \alpha_*)/2$ , il existe  $\alpha \in ]\alpha_*, \alpha_* + \varepsilon]$  et  $\beta \in [\beta^* - \varepsilon, \beta^*[$  tels que

$$\forall x > 0, \quad |x^{z-1}f(x)| = x^{\operatorname{Re}(z)-1}|f(x)| \leq \mathbf{1}_{]0,1]}(x) x^{\alpha-1}|f(x)| + \mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x) x^{\beta-1}|f(x)|$$

Or  $x \mapsto \mathbf{1}_{]0,1]}(x) x^{\alpha-1}f(x) \in L^1(]0, +\infty[)$  et  $x \mapsto \mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x) x^{\beta-1}f(x) \in L^1(]0, +\infty[)$ . D'où l'absolue convergence.

4. On a  $\alpha_* = \beta^* = 0$ . Donc  $B = \emptyset$ .

5. Par exemple,  $x \mapsto \exp(-x - 1/x)$ .

6. Il faut évoquer soigneusement le théorème d'holomorphicité sous le signe somme.

7. Il faut faire le changement de variable dans la définition de la transformée de MELLIN, qui est bien définie car tous les termes sont intégrables en module sous la condition sur  $z$ , par hypothèse sur  $f$  : soit  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(z) \in ]\alpha_*, \beta^*[$ ,

$$\check{f}_\mu(z) \stackrel{=}{=}_{s=\mu x} \mu^{z-1} \int_{]0,+\infty[} s^{z-1} f(s) \frac{ds}{\mu}$$

d'où le résultat.

8. Soit  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $\tilde{\alpha} < \operatorname{Re}(z) < \tilde{\beta}$ . Il faut faire une intégration par parties en vérifiant soigneusement que chaque terme est de module intégrable, ce qui est le cas grâce aux hypothèses sur  $f$  et  $z$ . Le théorème de FUBINI-TONELLI conduit à

$$\begin{aligned} \int_{]0,+\infty[} x^{z-1} x f'(x) dx &= \int_{(\mathbf{R}^+)^2} \mathbf{1}_{]0,x[}(s) z s^{z-1} f'(s) ds dx \\ &= \int_{(\mathbf{R}^+)^2} \mathbf{1}_{]s,+\infty[}(x) z s^{z-1} f'(x) dx ds \\ &= z \int_{]0,+\infty[} s^{z-1} \underbrace{\int_{]s,+\infty[} f'(x) dx}_{=-f'(s)} ds = -z \check{f}(z). \end{aligned}$$

9. De la question précédente, on déduit que  $\check{f}'$  est définie pour tout  $z \in \mathcal{B}(]\alpha_* - 1, \beta^* - 1[)$ . Dans ce cas,

$$\check{f}'(z) = \check{g}(z - 1) = -(z - 1)\check{f}(z - 1).$$

10. Soit  $z \in \mathbf{C}$ . Alors il existe  $N \geq 1$  tel que  $|s^{-z-N}| = e^{-(\operatorname{Re}(z)+N)\ln(s)} < 1/2$ . Notons  $\kappa = s^{-z-N}$ . Pour tout  $n \geq N + 1$ , on peut donc définir  $R_n(z) = \ln(Q_n(z)/Q_N(z)) = \sum_{k=1}^n \ln(1 - \kappa s^{-k})$  qui est une série de terme général équivalent en module à  $|\kappa|s^{-k}$ . La série  $R_n(z)$  est donc absolument convergente, et le produit  $Q_n(z)$  converge.

11. En utilisant le changement de variable  $z = c + it$  et  $x = e^{-y}$ , on note que, formellement,

$$\check{f}(z) = \int_{\mathbf{R}^+} f(x)x^{z-1}dx = - \int_{\mathbf{R}} f(e^{-y})e^{-zy}e^{-ity}dy,$$

ce qui lie la transformée de MELLIN et la transformée de FOURIER. Si les fonctions  $\check{f}$  et  $y \mapsto f(e^{-y})e^{-zy}$  sont dans  $L^1(\mathbf{R}^+)$ , on peut appliquer la formule d'inversion de FOURIER. Grâce au théorème de FUBINI-TONNELLI, on montre que  $\Gamma Q$  et sa transformée de MELLIN sont dans  $L^1(\mathbf{R}^+)$ . Donc l'intégrale cherchée vaut

$$2i\pi\check{\Gamma}Q(ax).$$

### 3 Résultat d'existence et d'unicité

1. La fonction est continue sur  $[0, +\infty[$  et tend vers 0 en  $+\infty$ . Elle vaut 0 en 0 et son intégrale vaut 1, donc elle admet un maximum global strictement positif qui est aussi un maximum local.
2. Comme  $\bar{x} \in ]0, +\infty[$ ,  $\varphi'(\bar{x}) = 0$ , donc  $\varphi(b\bar{x}) = \varphi(\bar{x})/b > \varphi(\bar{x})$ , ce qui est absurde.
3. Alors  $\varphi$  serait à la fois nulle car  $\varphi' = 0$  et  $\varphi(0) = 0$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (2).
4. La fonction  $Z$  est de classe  $C^\infty([0, +\infty[)$ . On a, pour tout  $x \geq 0$ ,  $Z'(x) = -aZ(x) + aZ(bx)$ ,  $Z(0) = 1$  et  $Z(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . La constante  $a$  est nécessairement non nulle : sinon,  $\varphi$  est constante, nulle, et d'intégrale 1, ce qui est impossible.

On suppose qu'il existe un point  $x_1 > 0$  tel que  $\varphi(x_1) = 0$ , et donc  $Z'(x_1) = 0$ , et  $Z(x_1) = Z(bx_1)$ .

On va montrer qu'il existe  $x_2 \geq bx_1$  tel que  $Z'(x_2) = 0$  et  $|Z(x_2)| \geq |Z(x_1)| > 0$ .

— On suppose  $Z(x_1) > 0$ . Alors 3 cas sont possibles :

- $Z'(bx_1) > 0$  alors il existe  $x_2 > bx_1$  tel que  $Z(x_2) \geq Z(x_1)$  et  $Z'(x_2) = 0$ , sinon  $\varphi$  est strictement positive sur  $]bx_1, +\infty[$ ,  $Z$  est croissante sur le même intervalle et ne peut donc pas tendre vers 0,
- $Z'(bx_1) = 0$  alors  $x_2 = bx_1$  convient,
- $Z'(bx_1) < 0$  alors  $\varphi$  admet un maximum strictement supérieur à  $Z(x_1)$  sur  $]x_1, bx_1[$ . Donc il existe  $x^* < bx_1$  tel que  $Z(x^*) > Z(bx_1) = Z(x_1)$  et  $Z'(x^*) = 0$ . On a alors  $Z(x^*) = Z(bx^*) > Z(x_1) \geq 0$ . Donc  $bx_1 < bx^*$  avec  $Z(bx_1) < Z(bx^*)$ . Donc, comme  $Z$  tend vers 0 en l'infini, il existe  $x_2 > bx^* > bx_1$  tel que  $Z'(x_2) = 0$  et  $Z(x_2) \geq Z(x_1)$ .

— On suppose  $Z(x_1) < 0$ . Alors 3 cas sont possibles :

- $Z'(bx_1) < 0$  alors il existe  $x_2 > bx_1$  tel que  $Z(x_1) \geq Z(x_2)$ , sinon  $\varphi$  est négative ou nulle sur  $]bx_1, +\infty[$ ,  $Z$  est décroissante sur le même intervalle et ne peut donc tendre vers 0,
- $Z'(bx_1) = 0$  alors  $x_2 = bx_1$  convient,
- $Z'(bx_1) > 0$  alors  $\varphi$  admet un minimum strictement inférieur à  $Z(x_1)$  sur  $]x_1, bx_1[$ . Donc il existe  $x^* < bx_1$  tel que  $Z(x^*) < Z(bx_1) = Z(x_1)$  et  $Z'(x^*) = 0$ . On a alors  $Z(x^*) = Z(bx^*) < Z(x_1) \leq 0$ . Donc  $bx_1 < bx^*$  avec  $Z(bx_1) > Z(bx^*)$ . Donc, comme  $Z$  tend vers 0 en l'infini, il existe  $x_2 > bx^* > bx_1$  tel que  $Z'(x_2) = 0$  et  $Z(x_1) \geq Z(x_2)$ .

— On suppose  $Z(x_1) = Z(bx_1) = 0$ . Alors, si la fonction  $Z$  n'est pas nulle égale à 0 sur  $]x_1, bx_1[$  d'après le théorème de ROLLE, il existe  $x^* \in ]x_1, bx_1[$  tel que  $Z'(x^*) = 0$  et  $Z(x^*) = Z(bx^*)$  et  $Z(x^*) \neq 0$ . On est ramené aux cas précédents. Si la fonction  $Z$  est nulle sur  $]x_1, bx_1[$ , alors, comme pour tout  $x \in ]x_1, bx_1[$ ,  $Z(x) = e^{-ax}Z(0) + \int_0^{x_1} e^{a(y-x)}$ , on a une contradiction car  $Z(0) = 1 \neq 0$ .

Par récurrence, on a donc montré l'existence d'une suite strictement croissante  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  telle que  $(|Z(x_n)|)_{n \in \mathbf{N}^*}$  soit croissante, ce qui contredit le fait que  $\lim_{+\infty} Z = 0$ . Donc  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $]0, +\infty[$ . Comme  $\varphi$  admet un maximum global strictement positif d'après la question 3.1,  $\varphi(x)$  est strictement positif si  $x > 0$ .

5. Soit  $\varphi$  est solution de (1).

- Si  $a = 0$ , alors  $\varphi$  est constante. Comme elle doit être intégrable sur  $]0, +\infty[$ , c'est nécessairement 0. Mais son intégrale devant être égale à 1, par l'hypothèse (2),  $\varphi$  n'existe pas.
- Si  $a < 0$ , comme pour tout  $x > 0$ , on a

$$\varphi(x) = \int_0^x abe^{a(y-x)}\varphi(by)dy,$$

on arrive à une contradiction car  $\varphi$  est strictement positive d'après la question précédente.

6. L'équation (1) est linéaire : si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  satisfont à (1)-(2)-(3)-(5), alors  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  satisfait à (1)-(3) et (2) modifié :  $\varphi \in L^1(]0, +\infty[)$  et  $\int_{]0, +\infty[} \varphi = 0$ , qu'on note (2)'. On considère une nouvelle fois  $Z$ , avec  $Z(0) = 0$  et  $\lim_{+\infty} Z = 0$ . Par le théorème de ROLLE généralisé, il existe  $x_1 > 0$  tel que  $\varphi(x_1) = 0$ . Supposons que  $Z(x_1) \neq 0$ . Alors on peut répéter le raisonnement précédent, qui est à nouveau mis en défaut. Donc  $Z$  est nulle et  $\varphi$  également. D'où l'unicité de la solution.

7. On applique les résultats précédents : si  $\varphi$  est solution de (1)-(2)-(3)-(5), alors

- $\check{\varphi}'(z) = -(z-1)\check{\varphi}(z-1)$  d'après la question 2.2.8
- $\check{\varphi}_b(z) = b^{-z}\check{\varphi}(z)$  d'après la question 2.2.7
- $\check{\varphi}(1) = \int_{]0, +\infty[} \varphi = 1$ .

8. On va utiliser la relation  $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$  pour tout  $z \in \mathbf{C} \setminus -\mathbf{N} \cup \{1\}$  :

$$(z-1)\Upsilon(z-1) = a^{-(z-1)}(z-1)\Gamma(z-1) = a^{-(z-1)}\Gamma(z) = a\Upsilon(z).$$

Comme  $\Gamma$  ne s'annule pas sur  $\mathbf{C} \setminus -\mathbf{N}$  (question 2.1.13), on peut définir  $S = F_h/\Upsilon$  qui est telle que  $S(z) = S(z-1)$  pour tout  $z \in \{\zeta \in \mathbf{C} : \text{Re}(\zeta) \in ]\alpha_*, \beta^*[\cap(\mathbf{R} \setminus ((-\mathbf{N}) \cup \{1\}))\}$ . Comme  $S$  est holomorphe sur ce domaine comme quotient de deux fonctions holomorphes,  $S$  est constante car  $z \mapsto S(z)$  et  $z \mapsto S(z-1)$  coïncident sur un intervalle ouvert non vide. On en déduit également que  $F_h$  ne s'annule pas.

9. Soit  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $\text{Re}(z) \in ]\alpha_*, \beta^*]$ . Alors

$$(-G(z-1) + G(z))aF_h(z) = \frac{a}{b^{z-1}}G(z)F_h(z).$$

Donc  $\left(1 - \frac{1}{b^{z-1}}\right)G(z) = G(z-1)$ , ou encore, pour tout  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $\text{Re}(z) \in ]\alpha_* - 1, \beta^* - 1[$ ,

$$G(z+1) = \frac{G(z)}{1 - \frac{1}{b^z}}.$$

Or, pour tout  $z \in \mathbf{C}$ ,

$$H(z+1) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{b^{z+j+1}}} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{b^{z+j}}} = \frac{H(z)}{1 - \frac{1}{b^z}}.$$

Le même argument qu'à la question précédente sur le quotient  $G/H$  donne le résultat.

10. Les deux questions précédentes prouvent que  $F = F_h G$  est proportionnelle à  $H\Upsilon$ . De plus,

$$F(1) = a \prod_{j=1}^{\infty} (1 - b^{-j})^{-1}.$$

11. La formule d'inversion montrée en 2.2.11 permet de conclure que la solution cherchée de (1)-(2)-(3)-(5) est

$$x \mapsto K \left( e^{-ax} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{-ab^j x} \right),$$

avec

$$\forall j \in \mathbf{N}^*, \quad c_j = \frac{(-1)^j b^{-j(j-1)/2}}{\prod_{k=1}^j (1 - b^{-k})}$$

et

$$K = F(1).$$

### 3.8 Problème de Mathématiques Générales

Il s'agissait de montrer le théorème de WIGNER, qui porte sur la loi de la plus grande valeur propre d'une matrice aléatoire sous certaines conditions sur la loi de ses coefficients. Le lecteur intéressé pourra se référer à l'ouvrage *An Introduction to Random Matrices*, de Greg W. ANDERSON, Alice GUIONNET et Ofer ZEITOUNI, paru en 2009 aux éditions *Cambridge studies in advanced mathematics*.

Les premières questions sur l'algèbre linéaire, qui nécessitent une certaine technicité, auraient mérité une rédaction plus rigoureuse de la part de la plupart des candidats. Le théorème spectral doit être cité et utilisé avec une grande précision, et certains candidats oublient la partie cruciale de la diagonalisation dans une base orthonormée, et se contentent de l'aspect diagonalisation. L'étude des suites d'entiers (marches de BERNOULLI, suites de CATALAN) a donné lieu à des explications inventives de la part des candidats, ainsi que les premières questions sur les mots. La partie probabiliste n'a malheureusement été abordée que par une poignée de candidats, malgré des questions qui pouvaient être traitées de manière élémentaire. Le jury insiste sur le fait que les probabilités sont un point central du programme général de l'agrégation de mathématiques et que tous les candidats doivent connaître les notions et résultats de base dans le cadre continu, comme l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

## 1 Résultats préliminaires

### 1.1 Un résultat sur la trace

- On raisonne par récurrence sur  $k$  :
  - pour  $k = 2$  le produit matriciel donne

$$(A^k)(i, j) = \sum_{1 \leq q_1 \leq n} A(i, q_1) \times A(q_1, j)$$

- On utilise ensuite  $A^{k+1} = A^k \times A$

$$(A^{k+1})(i, j) = \sum_{1 \leq q_k \leq n} (A^k)(i, q_k) \times A(q_k, j) = \sum_{1 \leq q_k \leq n} \sum_{1 \leq q_1, \dots, q_{k-1} \leq n} A(i, q_1) \cdots A(q_{k-1}, q_k) \times A(q_k, j).$$

- D'où la conclusion.

- La trace d'une matrice carrée  $M$  de taille  $n$  est  $\text{trace}(M) = \sum_{k=1}^n M(i, i)$ . Donc, d'après la question précédente, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\text{trace}(A^k) = \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq q_1, \dots, q_{k-1} \leq n} A(i, q_1) \cdots A(q_{k-1}, i)$ .

### 1.2 Un résultat sur les matrices réelles symétriques

- Par le théorème spectral, une matrice symétrique réelle est diagonalisable, la base de vecteurs propres pouvant être une base orthonormée. Il y a existence d'une matrice  $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$  (les colonnes de  $P$  étant les vecteurs propres) telle que  $P^{-1}AP = D$ , si la base est orthonormée alors  $P$  est une matrice orthogonale  $P^{-1} = P^T$ .
- La trace est un invariant de similitude aussi  $\text{trace}(A^k) = \text{trace}(D^k)$ , ce qui donne la formule demandée.

3. Soit  $\alpha = \inf(\lambda_1, \mu_1)$ . Alors  $A - \alpha I = A'$  et  $B - \alpha I = B'$  sont toujours symétriques mais à valeurs propres positives  $\lambda_i - \alpha \geq 0$  et  $\mu_i - \alpha \geq 0$ . Supposons le résultat vrai pour  $A'$  et  $B'$ , cela donne alors la même inégalité.

4. On a  $A = PLP^T$  et  $B = QMQ^T$  avec  $P$  et  $Q$  orthogonales. Alors

$$\text{trace}(AB) = \text{trace}(PLP^T QMQ^T) = \text{trace}(LP^T QMQ^T P) = \text{trace}(LRMR^T)$$

avec  $R$  une matrice orthogonale (car groupe orthogonal).

On a  $(LR)(i, j) = \lambda_i R(i, j)$  et  $(MR^T)(i, j) = \mu_i R(j, i)$ , ce qui donne

$$\text{trace}(AB) = \sum_i \sum_k (LR)(i, k)(MR^T)(k, i) = \sum_{i,k} \lambda_i R(i, k) \mu_k R(i, k) = \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k R(i, k)^2.$$

Comme  $R$  est une matrice orthogonale on a  $\sum_k R(i, k)^2 = \sum_i R(i, k)^2 = 1$  (et plus que cela), d'où l'inégalité, en posant  $w_{i,j} = R(i, j)^2$ .

5. On mène le calcul

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda_i \mu_i - \sum_{i,j} w_{ij} \lambda_i \mu_i &= \sum_{i,j} (\delta_{ij} - w_{ij}) \lambda_i \mu_j \\ &= \sum_{i,j} (\delta_{ij} - w_{ij}) \sum_{k=1}^i (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{l=1}^j (\mu_l - \mu_{l-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j (\delta_{ij} - w_{ij}) (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (\mu_l - \mu_{l-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{i=k}^n \sum_{j=l}^n (\delta_{ij} - w_{ij}) (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (\mu_l - \mu_{l-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left( \sum_{i=k}^n \sum_{j=l}^n (\delta_{ij} - w_{ij}) \right) (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (\mu_l - \mu_{l-1}). \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, toutes les différences sont positives et il reste à se convaincre que

$$\sum_{i=k}^n \sum_{j=l}^n (\delta_{ij} - w_{ij}) \geq 0$$

pour que tout soit positif et ainsi obtenir l'inégalité.

On somme sur un rectangle (en bas à droite) d'une matrice doublement stochastique. On choisit le côté le plus petit pour sommer. Ce côté le plus petit est le nombre de  $\delta_{ij} = 1$  d'où le caractère positif puisque la somme de chaque  $w_{ij}$  vaut au plus 1.

On a prouvé que  $\text{trace}(AB) - \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j w_{i,j} \geq 0$  et ceci pour tout élément de  $\mathcal{W}$  donc  $\max(\dots) \leq \text{trace}(AB)$ .

Avec la question précédente on a l'égalité demandée.

6. On mène le calcul

$$\begin{aligned} \sum_i (\lambda_i - \mu_i)^2 &= \sum_i \lambda_i^2 + \mu_i^2 - 2\lambda_i \mu_i \\ &= \text{trace}(A^2) + \text{trace}(B^2) - 2 \sum_i \lambda_i \mu_i \\ &\leq \text{trace}(A^2) + \text{trace}(B^2) - 2\text{trace}(AB) \\ &\leq \text{trace}(A^2) - \text{trace}(AB) + \text{trace}(B^2) - \text{trace}(BA) \\ &\leq \text{trace}(A(A - B) - \text{trace}(B(A - B))) = \text{trace}((A - B)^2). \end{aligned}$$

En effet  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$  correspond à  $\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j w_{i,j}$  avec  $W = I_n$ , i.e.  $w_{i,j} = \delta_{i,j}$ , d'où  $-\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \leq -\text{trace}(AB)$  d'après la question précédente.

### 1.3 Etude de suites d'entiers

1. L'ensemble des marches de BERNOULLI est en bijection avec les suites de  $+1$  et de  $-1$  ( $S_{p+1} - S_p = \pm 1$ ),  $\alpha$  le nombre de  $1$  et  $\beta$  le nombre de  $-1$ , on a à résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2q \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

ce qui donne  $\alpha = \beta = q$  d'où  $\binom{2q}{q}$  le nombre de façons de placer les  $1$ .

2. Cette marche de BERNOULLI n'est pas un chemin de DYCK, puisqu'elle n'est pas à valeurs positives.

3.  $\beta_1 = 1$  : le seul chemin de DYCK de longueur  $2$  est  $(0, 1, 0)$ .

$\beta_2 = 2$  : il n'y a que  $(0, 1, 0, 1, 0)$  ou  $(0, 1, 2, 1, 0)$ .

4. Soit une marche de BERNOULLI de longueur  $2q$  qui n'est pas un chemin de DYCK mais arrive en  $0$ . En voici un exemple :  $0, 1, \dots, 1, 0, -1, \dots, 0$ . Supposons que  $S_k = -1$ , avec  $k$  le premier entier vérifiant cette propriété (on remarque que  $k$  est nécessairement impair). Alors il y a  $\frac{k-1}{2}$  incréments de «  $1$  » et  $\frac{k-1}{2} + 1$  incréments de «  $-1$  » avant l'indice  $k$ , suivis de  $2q - \frac{k-1}{2}$  incréments de «  $1$  » et  $2q - \frac{k+1}{2}$  incréments de «  $-1$  ». On change le signe de tous les incréments jusqu'à l'indice  $k$ , ce qui donne une somme finale de  $2$ , puisque  $2q - 1$  termes qui valent «  $-1$  » et  $2q + 1$  termes «  $1$  ». On a donc construit une application qui envoie un chemin non de DYCK (qui commence et termine en  $0$ ) sur un chemin qui va de  $0$  à  $2$  (les deux de longueur  $2q$ ). Maintenant on remarque que, pour un chemin de  $0$  à  $2$ , il y a un premier indice où il devient positif, on fait la même opération de changement de signe des incréments jusqu'à cet indice ce qui nous donne un chemin non de DYCK (il va arriver en  $0$ ). En fait cette application  $0-2$  est la réciproque de la précédente et la précédente est la réciproque de celle-ci. On a  $f : \text{Non DYCK} \rightarrow 0-2$  et  $g : 0-2 \rightarrow \text{Non DYCK}$  et  $g \circ f = \text{id}_{\text{Non DYCK}}$  et  $f \circ g = \text{id}_{0-2}$ , d'où le résultat.

5. Pour calculer le nombre de chemins de longueur  $2q$  qui commencent par  $0$  et arrivent en  $2$ , on a à résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2q \\ \alpha - \beta = 2 - 0, \end{cases}$$

le  $2 - 0$  étant arrivée moins départ. Cela donne  $\alpha = q + 1$  et  $\beta = q - 1$ . On obtient  $\binom{2q}{q+1}$  chemins non de DYCK par la bijection. Pour  $q \geq 2$ , on obtient  $\beta_q$  égal au nombre de marches de BERNOULLI de longueur  $2q$  qui se terminent par  $0$  moins le nombre de chemins qui ne sont pas de DYCK mais qui commencent et terminent par  $0$

$$\beta_q = \binom{2q}{q} - \binom{2q}{q+1} = \frac{(2q)!}{(q!)^2} - \frac{(2q)!}{(q+1)!(q-1)!} = \frac{(2q)!}{(q!)^2} \left(1 - \frac{q}{q+1}\right) = \frac{1}{q+1} \binom{2q}{q} = C_q$$

et il est facile de vérifier  $\beta_0 = 1 = C_0$ ,  $\beta_1 = 1 = C_1$ .

6. On raisonne par récurrence sur  $m$  :

Initialisation :  $m = 1$  donne  $1 < 4$   $m = 2$ .

Hérédité : On suppose qu'il existe  $m \geq 1$  tel que  $\frac{1}{m+1} \binom{2m}{m} < 4^m$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+2} \binom{2m+2}{m+1} &= \frac{(2m+2)!}{((m+1)!)^2(m+2)} = \frac{(2m)! \times (2m+1) \times 2}{(m!)^2 \times (m+1)(m+2)} \\ &\leq \frac{(2m)! \times (2m+2) \times 2}{(m!)^2 \times (m+1)(m+2)} = \frac{(2m)! \times 2 \times 2}{(m!)^2 \times (m+2)} \\ &\leq \frac{(2m)! \times 2 \times 2}{(m!)^2 \times (1)} < 4^m \times 4 = 4^{m+1}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion.

7. On commence avec  $x \in ]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ . On connaît le développement en série entière de  $u \mapsto (1+u)^\alpha$  : c'est  $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} u^n$  pour  $|u| < 1$  en utilisant le coefficient binomial généralisé, ici  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Donc

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} 4^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} 4^n x^n.$$

Aussi

$$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \binom{\frac{1}{2}}{n} 4^n x^{n-1}.$$

Maintenant on écrit

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{n} &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{2} - k}{k+1} = \frac{1}{(n)! 2^n} \prod_{k=0}^{n-1} (1-2k) = \frac{(-1)^n}{(n)! 2^n} \prod_{k=0}^{n-1} (2k-1) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n)! 2^n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(2k-1) \times (2k)}{2 \times k} = \frac{(-1)^{n+1} \times (2n-2)! \times 2}{(n)! \times (n-1)! \times 2^{2n}}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^{n+1} \times (2n-2)! \times 2}{(n)! \times (n-1)! \times 2^{2n}} 4^n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{(n)! \times (n-1)!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} x^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m} x^m. \end{aligned}$$

## 1.4 Mots

1. On vérifie :

**Réflexivité** : la bijection est l'identité.

**Symétrie** : on prend  $f^{-1}$ .

**Transitivité** : la composée des deux bijections est encore une bijection.

2. Les supports sont image l'un de l'autre par la bijection aussi ils ont le même cardinal.

3. Voir Figure 3.2.

4. Deux mots équivalents ont même longueur et même poids. Les deux ensembles proposés sont en bijection.

5. Soit un mot fermé de longueur  $q+1$  tel que chaque arête soit parcourue exactement deux fois. Par définition, son graphe  $G_m$  est connexe. Donc le nombre d'arêtes, qui sont toutes parcourues 2 fois, est supérieur à  $2(p(m)-1)$ . La longueur du mot étant  $q+1$ , le nombre total d'arêtes est  $q$ . D'où le résultat.

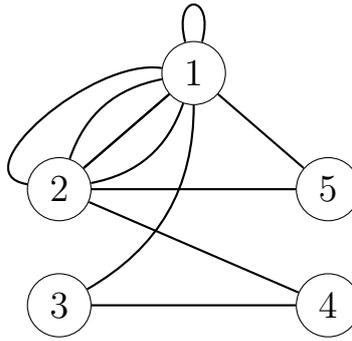


FIGURE 3.2 – Graphe du mot  $m = 12134211521$ .  $A_m = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4)\}$ ,  $A_m^b = \{(1, 1)\}$ ,  $A_m^c = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4)\}$ ,  $N_m^{(1,2)} = 4$ .

6. Le cardinal de l'alphabet est maintenant supposé inférieur à  $q$  et on ne considère que les mots dont les sommets sont exactement tout l'alphabet, tels que chaque arête soit parcourue au moins 2 fois. Le cardinal de  $\mathcal{M}_{q,n}$  est inférieur ou égal au nombre de mots fermés de longueur  $q + 1$ , donc  $\text{card}(\mathcal{M}_{q,n}) \leq n^q \leq q^q$ .

7. Comme la longueur est  $2q + 1$  et comme le poids est exactement  $q + 1$ , le nombre d'arêtes est exactement  $2q + 1$ . Donc il ne peut pas y avoir de boucle.

8. On choisit l'ensemble des représentants  $\mathcal{M}_{2q,q+1}$  tels que tout mot  $m = s_1 \dots s_{2q+1}$  satisfait, pour tout  $1 \leq k \leq 2q + 1$ , à la condition que chaque  $\{s_1, \dots, s_k\}$  est un intervalle de  $\mathbf{Z}$  commençant à 1. Chaque élément  $m \in \mathcal{M}_{2q,q+1}$  détermine un chemin  $s_1, \dots, s_{2q+1} = s_1$  dans le graphe  $G_m$ . Soit  $d(s, s')$  la distance entre les sommets  $s$  et  $s'$  dans le graphe  $G_m$ , c'est-à-dire la longueur du plus court chemin sur le graphe commençant en  $s$  et terminant en  $s'$ . En posant  $d_k = d(s_{k+1}, s_1)$ , on voit que chaque mot  $m \in \mathcal{M}_{2q,q+1}$  définit un chemin de DYCK  $D(m) = (d_1, \dots, d_{2q})$  de longueur  $2q$ . Réciproquement, un chemin de DYCK  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_{2q})$  permet de construire un mot  $m$  par récurrence : on pose  $m_2 = (1, 2)$ , puis, pour  $k > 2$ , si  $d_{k-1} = d_{k-2} + 1$ , on obtient  $m_k$  en « collant » à la droite de  $m_{k-1}$  le plus petit entier positif n'apparaissant pas dans  $m_{k-1}$ . Sinon,  $m_k$  est obtenu en « collant » l'avant-dernière lettre de  $m_{k-1}$  à droite de  $m_{k-1}$ . On vérifie alors que  $m$  ainsi construit est un élément de  $\mathcal{M}_{2q,q+1}$ .

9. Ceci entraîne que  $\mathcal{M}_{2q,q+1}$  et l'ensemble des chemins de DYCK de longueur  $2q$  sont en bijection : le cardinal de  $\mathcal{M}_{2q,q+1}$  est donc  $C_q$ .

## 2 Cadre probabiliste et étude des moments

COQUILLE : Il fallait comprendre  $\mathbf{E}(Z_{1,2}^2) = 1$ .

1. Il s'agit d'une application immédiate de l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

2. Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Alors  $\xi_n = (1/\pi) \int_{-2}^2 x^n \sqrt{4 - x^2} dx$ . Il est immédiat que  $\xi_n = 0$  si  $n$  est impair par imparité de l'intégrande.

On pose donc  $n = 2k$ . Alors, par parité et changement de variable,  $\xi_{2k} = (2^{2k+2}/\pi)(W_{2k} - W_{2k+2})$ , où  $W_{2k} = \int_0^1 (\sin(\theta))^{2k} d\theta = (\pi/2)(2k)!/(2^k k!)^2$  (c'est une intégrale de WALLIS, son calcul se fait par récurrence). On vérifie enfin que  $\xi_{2k} = C_k$ .

3. Cette formule est une conséquence directe du calcul fait sur la trace dans la question 1.1.2.

4. Ce produit découle immédiatement de la question précédente, de l'indépendance des coefficients de  $M$  et des hypothèses sur leur loi.

5. Les coefficients de  $M$  étant supposés d'espérance nulle, si une arête n'est parcourue qu'une fois,  $\mathbf{E}(\pi_q) = 0$  car le terme correspondant dans le produit obtenu dans la question précédente s'annule.

6. Toute arête étant parcourue au moins deux fois, on applique le même raisonnement qu'à la question 1.4.5.

7. Ceci découle immédiatement de la définition de l'équivalence de deux mots.
8. Cette égalité est une conséquence des calculs précédents (notamment les questions sur l'ensemble des mots de WIGNER).
9. L'égalité précédente et l'hypothèse «  $r_k$  est finie pour tout  $k$  » impliquent que cette limite est nulle.
10. Du fait des mêmes hypothèses, par calcul, on obtient le résultat.
11. Comme les seuls mots qui restent dans la somme sont ceux de WIGNER (les arêtes sont parcourues exactement deux fois,  $N_{m_q}^a = 2$ ), qu'il n'y a pas de boucle et que la variance de  $Z_{1,2}$  vaut 1, l'égalité se réduit au cardinal de l'ensemble des mots de WIGNER, dont on a établi en 1.4 qu'il vaut  $C_q$ .
12. On utilise encore une fois l'identité établie dans la question 1.1.2, et on considère maintenant des phrases, c'est-à-dire des successions de 2 mots.
13. On tire de la formule précédente l'égalité

$$\mathbf{E}(\gamma_{n,k}^2) - \xi_{n,k}^2 = \sum_{h=1}^{2k} \frac{1}{n^{k+2}} \frac{n!}{(n-h)!} \sum_{\varphi=(m_1, m_2) \in \mathcal{M}_{2q, q+1}} \left( \prod_{a \in A_\varphi^c} \mathbf{E}(Z_{1,2}^{N_\varphi^a}) \prod_{a \in A_\varphi^b} \mathbf{E}(Z_{1,1}^{N_\varphi^a}) \right. \\ \left. - \prod_{a \in A_{m_1}^c} \mathbf{E}(Z_{1,2}^{N_{m_1}^a}) \prod_{a \in A_{m_1}^b} \mathbf{E}(Z_{1,1}^{N_{m_1}^a}) \prod_{a \in A_{m_2}^c} \mathbf{E}(Z_{1,2}^{N_{m_2}^a}) \prod_{a \in A_{m_2}^b} \mathbf{E}(Z_{1,1}^{N_{m_2}^a}) \right).$$

14. On montre qu'il n'existe pas de phrase de poids  $p$  constituées de 2 mots de WIGNER de longueur chacun  $q+1$  qui n'ont pas d'arêtes en commun et dont toutes les arêtes sont parcourues au moins deux fois si  $p \geq q+2$ . On conclut grâce à l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.
15. En utilisant les résultats précédents, on montre par récurrence que  $\gamma_{n,2k}$  converge vers un réel  $a_k$ , qui satisfait à  $a_0 = a_1 = 1$  et  $a_k = \sum_{j=1}^k a_j a_{k-j}$ , qui est en fait le  $k^e$  nombre de CATALAN. Grâce au théorème de WEIERSTRASS, à la question 1.3.7 et à ce dernier résultat, on a montré le théorème énoncé.
16. En considérant  $\widehat{M}_n(i, j) = M_n(i, j) \mathbf{1}_{\sqrt{n}|M_n(i, j)| \geq C} - \mathbf{E}(\sqrt{n}M_n(i, j)) \mathbf{1}_{\sqrt{n}|M_n(i, j)| \geq C}$  et en revisitant les questions précédentes, on montre le théorème.

## Chapitre 4

# Épreuves orales

**Note préliminaire.** Les compétences techniques sont au cœur de l'épreuve de leçons de mathématiques et de l'épreuve de modélisation mathématique. La première consiste à construire une leçon sur un thème donné. Le candidat doit proposer un plan argumenté précisant l'agencement et l'enchaînement des concepts clefs de la notion abordée, les illustrer par des exemples et applications et être en mesure de développer au tableau des résultats représentatifs de cette leçon. C'est au candidat qu'il incombe de sélectionner de tels résultats représentatifs (au moins deux), d'expliquer ces choix, et d'en proposer le développement au jury, dans un temps imparti. Dans la seconde épreuve, le candidat doit mettre en valeur ses connaissances techniques à partir d'un texte d'environ six pages qui lui est fourni. Il s'agit alors de mettre des mathématiques en action dans un contexte applicatif. Le candidat est invité à présenter et discuter, de manière structurée, les hypothèses qui conduisent à la description mathématique proposée dans le texte et à expliquer comment les énoncés du programme s'appliquent dans le contexte qui y est décrit. Le propos doit, de plus, être illustré en exploitant l'outil informatique. Le jury rappelle que s'écarter du programme n'est en aucun cas une exigence pour prétendre à des notes très satisfaisantes ; le jury encourage surtout les préparations et les candidats à se concentrer sur la maîtrise des bases.

### 4.1 Épreuve orale de mathématiques (Analyse-Probabilités & Algèbre-Géométrie)

Les thèmes des leçons proposées au concours docteurs sont une sélection de l'ensemble des leçons d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités du concours standard. On trouvera en annexe la liste des leçons qui seront utilisées en 2020. Le format de cette épreuve de leçons, ainsi que ses attendus, sont en tous points identiques à ceux des épreuves d'Analyse-Probabilités et d'Algèbre-Géométrie du concours standard. Aussi, les candidats sont invités à se reporter aux indications fournies dans le rapport du concours standard pour cette épreuve.

Proposer un plan de leçon et réaliser le développement d'une démonstration précise et détaillée d'un résultat substantiel sélectionné dans le plan proposé, dans un temps limité, sans recours à des notes, constituent des exercices difficiles qui ne s'improvisent pas et auxquels les candidats doivent impérativement s'entraîner. Il est recommandé de s'y exercer au sein d'une préparation universitaire, où les candidats docteurs, forts d'une plus grande maturité scientifique, peuvent d'ailleurs jouer un rôle d'émulation très positif sur l'ensemble de la promotion. Le jury attire l'attention des candidats sur le fait que les tirages peuvent combiner deux leçons orientées analyse et probabilités ou deux leçons orientées algèbre et géométrie ou deux leçons prises dans chacun de ces champs. En complément de l'intitulé des leçons, les tirages donnaient cette année un court résumé des modalités de l'épreuve. Le candidat choisit laquelle de ces deux leçons il va exposer au jury. Le jury recommande une lecture

minutieuse du rapport du concours standard, qui donne des indications détaillées sur les attendus de ces leçons. On y trouvera notamment une description des notions de base qui devraient constituer le cœur des leçons.

Il est toujours conseillé aux candidats de chercher à rassurer le jury quant à la maîtrise de ces bases plutôt que de tenter de l'éblouir par un exposé potentiellement inspiré de leurs thèmes de recherche mais débordant largement du programme. Le jury estime que le programme du concours contient un matériel technique suffisamment étoffé pour évaluer les capacités à remplir les missions du professeur agrégé. Les résultats contrastés sont surtout le reflet de niveaux de préparation hétérogènes.

## 4.2 Épreuve orale de modélisation (options A, B, C et D)

Pour cette épreuve, le jury renvoie là encore aux recommandations faites dans le rapport du concours standard. Les candidats de la session 2019 étaient, dans l'ensemble, bien préparés à cette épreuve, y compris dans l'exercice d'illustration informatique. La plupart d'entre eux a su éviter les écueils suivants :

- se lancer dans un hors sujet, caractérisé par une tentative de replacer le contenu d'une leçon au détriment de l'analyse du texte ;
- négliger l'illustration informatique, parfois par manque d'entraînement sur les logiciels du concours.

Les candidats docteurs peuvent tirer profit de leur recul scientifique dans cette épreuve qui nécessite des qualités de synthèse et une capacité à balayer le programme de manière transverse.

Le jury encourage les futurs candidats à bien se préparer à cette épreuve en s'exerçant sur les textes rendus publics et en se familiarisant avec l'environnement informatique du concours accessibles sur le site [agreg.org](http://agreg.org).

## 4.3 Épreuve orale de mise en perspective didactique d'un dossier recherche

Cette épreuve est spécifique au concours spécial ; sa matière est fournie par un document PDF de 12 pages maximum envoyé par les candidats dix jours avant le début des épreuves d'admission (en l'espèce la date butoir était donc le 9 juin à 23h59). Ce document consiste en un dossier scientifique présentant le parcours, les travaux de recherche et, le cas échéant, les activités d'enseignement et/ou de valorisation de la recherche. Il n'y a pas de format type puisque ce document a pour vocation de décrire l'expérience *personnelle* du candidat ; il doit surtout s'attacher à décrire le parcours du candidat, la place qu'occupent les mathématiques dans les principales étapes de celui-ci et comment cette expérience, quelle qu'en soit la nature, sera réinvestie dans la pratique enseignante. La description de l'exploitation d'outils mathématiques au cours d'une expérience professionnelle, comme ingénieur par exemple, est tout à fait bienvenue. Des candidats déjà enseignants peuvent aussi expliquer comment leur expérience de recherche s'exprime dans les classes.

Chaque dossier est confié au préalable à deux membres du jury, avec mission d'en être rapporteurs devant la commission d'interrogation. L'affectation des dossiers prend garde à ne pas confier cette part de l'évaluation à un expert du sujet de thèse du candidat. L'appréciation du document fourni fait partie des éléments de la grille de notation. Les deux autres membres du jury sont réputés avoir un regard plus « candide » sur la présentation orale de ce dossier. Un débat préparatoire réunissait les membres de la commission avant les épreuves afin d'échanger sur les dossiers et d'organiser une interrogation personnalisée, adaptée aux profils des candidats.

Les dossiers fournis étaient dans l'ensemble soignés et de qualité, montrant un investissement incontestable des candidats pour mettre en valeur leur parcours. Le jury conseille aux candidats de penser

dans un même élan le document écrit et la présentation orale, en ayant bien présent à l'esprit que le document fournit la base de la présentation et qu'il sera disponible tout au long de celle-ci. Le jury recommande aux candidats d'inclure dans leur dossier un minimum d'éléments biographiques (notamment en y faisant apparaître clairement leur nom) : des informations sur la mobilité géographique et thématique, le parcours académique et/ou professionnel, les évolutions après thèse... donnent du relief à la discussion. De manière générale, la rédaction du dossier doit être guidée par une réflexion sur la question « En quoi une expérience dans la recherche peut-elle être un plus pour un enseignant ? ». La dimension de mise en perspective didactique du dossier occupe une place importante de son évaluation : on attend des candidats qu'ils mettent en lumière leurs savoirs, les méthodes et démarches présentes dans leurs travaux et qu'ils expliquent comment elles pourraient être réinvesties dans un enseignement sur l'éventail « lycée - L3 ». Le jury fait observer que la description d'une démarche de recherche et son explication didactique peuvent s'appuyer sur des sujets différents de ceux abordés durant la thèse, si le candidat juge un tel choix plus pertinent (cela peut être le cas pour des candidats ayant une expérience post-thèse assez longue). Davantage que les travaux proprement dits du candidat, c'est son expérience de recherche, son parcours qu'il convient de valoriser dans cette épreuve. L'objet de cette épreuve est que les candidats puissent faire preuve d'une véritable plus-value, les distinguant des candidats du concours standard.

Bien que cette demande puisse être légitime au regard des pratiques de la communauté mathématique, les textes régissant le concours interdisent l'exploitation de matériel auxiliaire : les candidats ne peuvent donc pas appuyer leur présentation sur un support projeté préparé à cette fin. Le jury regrette que cette possibilité ne puisse pas être offerte aux candidats. Pour compenser en partie cette difficulté, le jury a décidé de projeter le document de 12 pages fourni par les candidats en amont du concours. Il recommande donc vivement aux candidats de prendre en compte cette disposition, afin d'exploiter au mieux cette ressource pour leur exposé. Ce document peut notamment contenir des images ou des figures en illustrant le contenu, qui peuvent même être organisées sous forme d'animation à l'intérieur du fichier PDF. (Il doit bien s'agir d'images ou de figures sous forme d'animation ; cette option ne doit pas permettre d'ajouter du texte et de contourner ainsi la limitation imposée de 12 pages.) Il est aussi possible d'insérer des liens hypertextes pour naviguer à l'intérieur du document. Il n'est toutefois pas permis d'exploiter des liens vers des sites web. De même, il n'est pas autorisé de se munir de son manuscrit de thèse, d'articles de recherche, ou, évidemment, de notes personnelles, ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation ; seuls sont autorisés les mêmes documents que pour les autres épreuves, à savoir des livres dont la diffusion commerciale est avérée. S'il est conscient des contraintes posées par la réglementation, le jury estime cependant que les diverses possibilités pour tirer parti du document à l'oral, rendre l'exposé plus vivant, sont insuffisamment exploitées.

Il était rappelé en début de préparation que l'épreuve a pour objectif « d'apprécier l'aptitude du candidat à rendre ses travaux accessibles à un public de non-spécialistes ». Typiquement il était recommandé de construire un discours à destination d'un auditoire de niveau au plus M2 de mathématiques ; l'épreuve n'est pas un séminaire réservé à un public de chercheurs sur le sujet de thèse du candidat. Une grande attention avait été apportée à la composition des commissions pour justement éviter la présence d'experts des thèmes de recherche du candidat. L'aptitude à se faire comprendre par des non-spécialistes, à la fois dans le dossier écrit et durant la prestation orale, la capacité à s'adapter à des questions de niveaux variés, occupent une part très substantielle de la grille de notation.

L'arrêté du 28 juin 2016 stipule que le candidat doit, lors de cette épreuve, répondre « [...] à une question [...] communiquée par le jury au début de l'heure de préparation ». Chaque candidat reçoit donc une question spécifique l'invitant à développer sa réflexion sur la dimension didactique qui pourrait être donnée à son expérience de recherche et à expliquer comment cette expérience pourrait rejaillir dans ses fonctions d'enseignant. Lors de cette session, les questions posées étaient les suivantes :

- *Proposez un thème et une notion mathématique que vous pourriez développer lors d'une activité pluridisciplinaire de niveau lycée ou L1, L2. On précisera bien le niveau choisi et les disciplines concernées.*

- *Comment valoriseriez-vous votre parcours doctoral ou post-doctoral pour créer une activité de niveau lycée ou CPGE en partenariat avec des équipes de chercheurs ?*
- *Proposez une activité permettant d'illustrer une application des mathématiques dans le monde professionnel. Cette activité pourra être de niveau lycée ou L1, L2. On précisera bien le niveau choisi.*

Le jury souligne le caractère totalement ouvert de ces questions pour lesquelles il n'y a pas de réponse « type » attendue. Néanmoins, le jury attend une description assez précise et concrète de la séance qui pourrait être proposée à des élèves ou des étudiants, avec des exemples et des exercices le cas échéant. Certains candidats ont fait cet effort de réfléchir à leur séance de cours ou TD et ont décrit en détail la séquence, en mettant bien en avant une démarche, bâtie sur une question, un calcul, une simulation, et conduisant à des déductions. Si ces propositions ont été plus ou moins pertinentes, avec un niveau plus ou moins bien identifié/adapté, elles ont toujours été valorisées par rapport aux affirmations laconiques « cette notion pourrait être présentée à des étudiants de L1-L2 », « telle partie pourrait être comprise par des étudiants de L1-L2 »... qui, d'ailleurs, bien souvent se révélaient être d'un niveau bien trop élevé pour le public visé. Le dialogue s'est systématiquement attaché à clarifier les modalités de mise en œuvre pratique et concrète de la séquence proposée.

L'épreuve proprement dite comprend deux parties distinctes. Dans un premier temps, durant 30 minutes, le candidat organise librement la présentation de son dossier (durant au moins 20 minutes) et la réponse à la question posée (durant au moins 5 minutes). La suite de l'interrogation est consacrée à un dialogue avec le jury. Ce dialogue, personnalisé suivant le parcours du candidat, explore divers aspects du dossier. On peut y distinguer

- des questions en lien direct avec la question posée pour la préparation de l'épreuve. L'objectif est ici de discuter du contenu mathématique de la démarche proposée et de sa mise en perspective didactique.
- des questions sur les mathématiques, les démarches et les méthodes présentées par le candidat lors de son exposé ou présents dans son dossier. Il ne s'agit pas de questions spécialisées d'experts, et encore moins de questions « pièges ». En particulier, pour des docteurs ayant soutenu leur thèse dans d'autres disciplines que les mathématiques, ces questions visent à mettre en relief les aspects mathématiques qui peuvent être en rapport avec leurs travaux de leur recherche. Le but est de tester la capacité à expliquer des points élémentaires des travaux de recherche et de discuter des possibilités de réinvestir les démarches utilisées ou les savoir-faire acquis dans un enseignement de niveau lycée, ou L1-L2.
- le jury peut proposer un exercice niveau lycée (ou L1 mais en restant dans des domaines très classiques) dans un domaine disjoint de celui de la thèse en demandant de le « faire vivre » dans une classe. Ces questions sortent les candidats de leur zone de confort en les faisant réfléchir à des questions en lien avec le programme du secondaire qui ne sont pas reliées à leur domaine de recherche.
- enfin, le jury pose des questions plus ouvertes dont le thème général peut se résumer à évaluer l'apport d'une expérience dans la recherche pour un enseignant.

Ces questions, dont le niveau est généralement assez élémentaire, arrivent au débotté durant la discussion. La capacité à rebondir pour resituer la question dans le cadre de l'expérience de recherche et/ou d'une réflexion à mener en classe, à reformuler des notions pour les rendre accessibles à un public non averti sont particulièrement évaluées dans cette phase de l'épreuve.

Cette épreuve permet de faire ressortir un véritable signal, discriminant et pertinent quant à l'objectif de recrutement d'enseignants et de valorisation d'une expérience de recherche. Elle joue pleinement son rôle dans la sélection des candidats. L'épreuve permet à des profils variés, issus d'autres disciplines ou dont la thèse est ancienne, d'exprimer des qualités et une motivation pour les carrières d'enseignants en mathématiques. Pour tirer plein profit de leur expérience et bien mettre en valeur leur parcours, les candidats doivent préparer cette épreuve spécifique avec soin. Une prestation improvisée, purement descriptive des résultats doctoraux, sans réflexion de mise en perspective et sans anticipation de la discussion, ne conduira qu'à un résultat médiocre. Il est d'ailleurs patent que les meilleurs du classe-

ment, à une exception près, avaient particulièrement bien anticipé cette épreuve, où ils ont confirmé les bonnes notes obtenues aux autres épreuves.

## Annexe A

# Liste des leçons de mathématiques pour le concours spécial 2020

- 101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications.
- 107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel. Exemples.
- 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
- 120 Anneaux  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Applications.
- 121 Nombres premiers. Applications.
- 123 Corps finis. Applications.
- 126 Exemples d'équations en arithmétique.
- 141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
- 142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.
- 151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- 152 Déterminant. Exemples et applications.
- 153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 156 Exponentielle de matrices. Applications.
- 157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- 158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.
- 162 Systèmes d'équations linéaires; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
- 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
- 191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.
- 203 Utilisation de la notion de compacité.
- 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- 213 Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
- 214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

- 215** Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ . Exemples et applications.
- 219** Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
- 220** Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'étude de solutions en dimension 1 et 2.
- 222** Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.
- 226** Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
- 228** Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
- 233** Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.
- 234** Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.
- 235** Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
- 236** Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.
- 241** Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 245** Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.
- 246** Séries de FOURIER. Exemples et applications.
- 250** Transformation de FOURIER. Applications.
- 262** Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.
- 265** Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
- 266** Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.