Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse

Session 2019

PE2-19-PG1
Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

09 avril 2019

Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques	**Durée : 4 heures** **Épreuve notée sur 40**

Rappel de la notation :

- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire**.

Ce sujet contient 12 pages, numérotées de 1 à 12. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

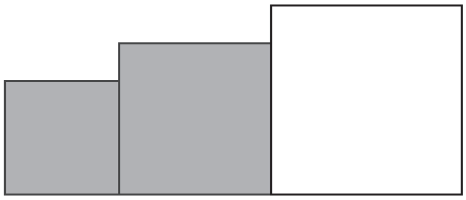
Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

PREMIÈRE PARTIE (13 points)

Dans cette partie, les figures qui sont représentées dans l'énoncé ne sont pas dessinées à l'échelle.

A. Situation des trois carrés

La figure ci-dessous représente trois carrés dont les mesures des côtés, en centimètre, sont respectivement 3 cm, 4 cm et 5 cm. Les deux plus petits carrés sont gris, le troisième est blanc.



1. Vérifier que la somme des aires des deux carrés gris est égale à l'aire du carré blanc.

2. Claude affirme : « Si on dispose les trois carrés obtenus à la question précédente comme sur la figure 1 ci-dessous alors le triangle ABC est un triangle rectangle. »
L'affirmation de Claude est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

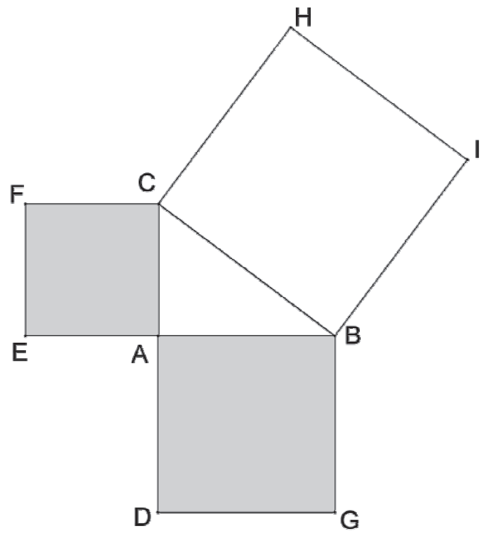


Figure 1

3. Avec les mêmes carrés, Dominique affirme : « Sur la figure 2 ci-dessous, les longueurs exactes, en centimètre, des segments [MN] et [IJ] sont des nombres décimaux ».
L'affirmation de Dominique est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

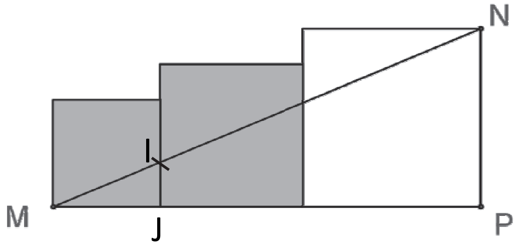


Figure 2

4. Avec les mêmes carrés, Camille affirme : « Sur la figure 3 ci-dessous, les points R, S et T sont alignés. »
L'affirmation de Camille est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

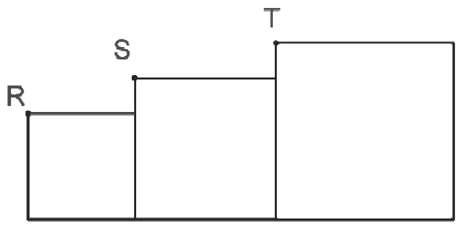
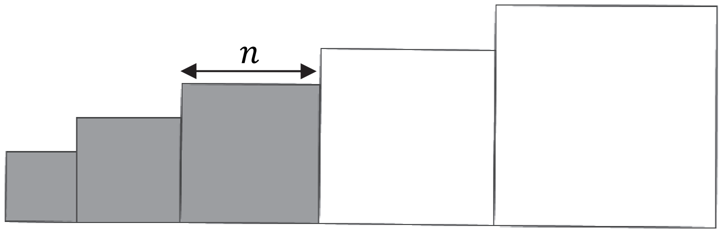


Figure 3

B. Situation des cinq carrés

La figure ci-dessous qui n'est pas à l'échelle représente cinq carrés dont les mesures des côtés, en centimètre, sont des nombres entiers consécutifs. Les trois plus petits carrés sont gris, les deux autres sont blancs.



On désigne par n la mesure, exprimée en centimètres, du côté du carré gris le plus grand (carré du milieu). L'objectif de cette partie est de chercher les valeurs de n pour lesquelles la somme des aires des trois carrés gris est égale à la somme des aires des deux carrés blancs.

1. Montrer que résoudre ce problème revient à résoudre l'équation $n^2 - 12\,n = 0$
2. Quelles sont les solutions de l'équation $n^2 - 12\,n = 0$? Justifier la réponse.
3. Ces solutions peuvent-elles être retenues pour le problème de la « situation des cinq carrés » ? Justifier votre réponse.
4. Réaliser une figure à l'échelle $\frac{1}{5}$ d'une solution du problème de la « situation des cinq carrés » en détaillant les calculs effectués pour construire la figure.

C. Situation des sept carrés

On s'intéresse maintenant à une figure comportant sept carrés. Les mesures, en centimètre, des côtés des sept carrés sont des entiers consécutifs. Les quatre plus petits carrés sont gris et les trois autres sont blancs.
On cherche s'il est possible de trouver des longueurs pour les côtés des carrés telles que la somme des aires des quatre carrés gris soit égale à celle des trois carrés blancs.

On envisage une résolution graphique. On choisit comme variable x la longueur en cm du côté du plus grand carré blanc. On admet que l'expression algébrique de la somme des aires des carrés gris est alors :

$$4x^2 - 36x + 86,$$

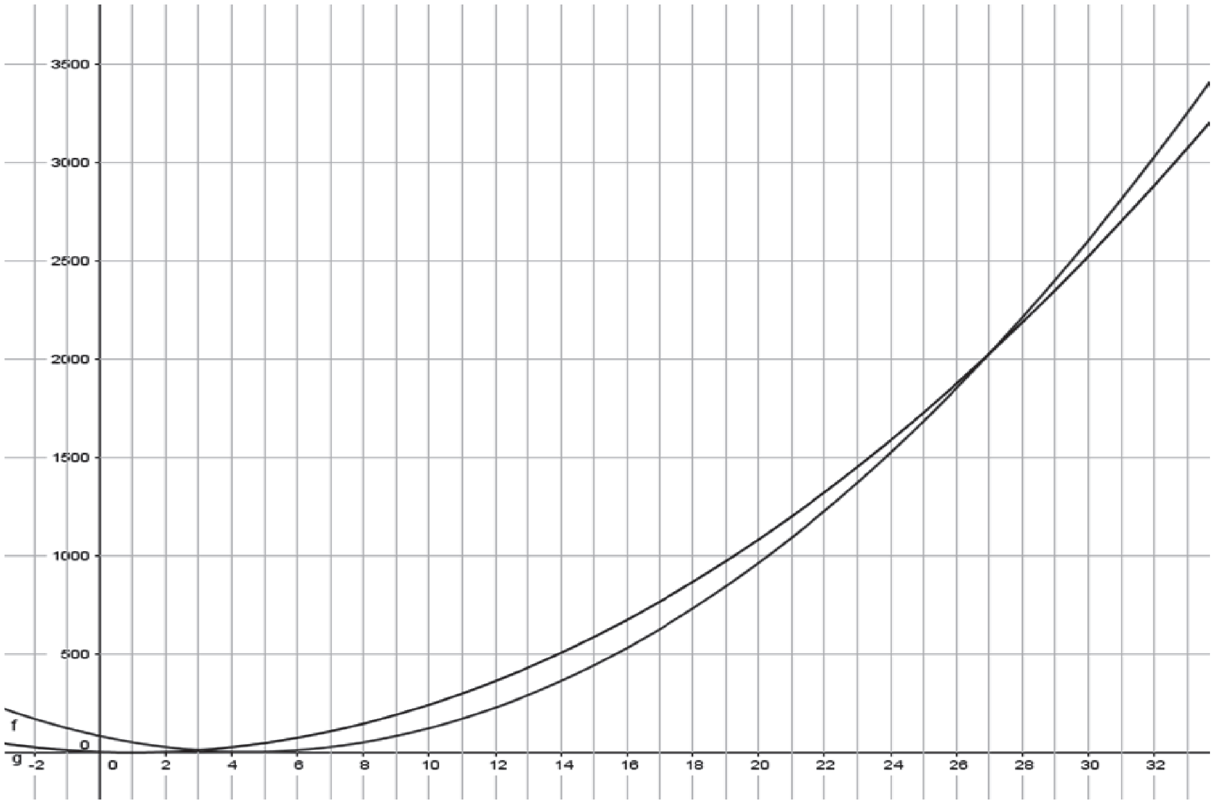
et que l'expression algébrique de la somme des aires des carrés blancs est :

$$3x^2 - 6x + 5.$$

On nomme :

- f la fonction qui à tout nombre x fait correspondre $f(x) = 4x^2 - 36x + 86$;
- g la fonction qui à tout nombre x fait correspondre $g(x) = 3x^2 - 6x + 5$.

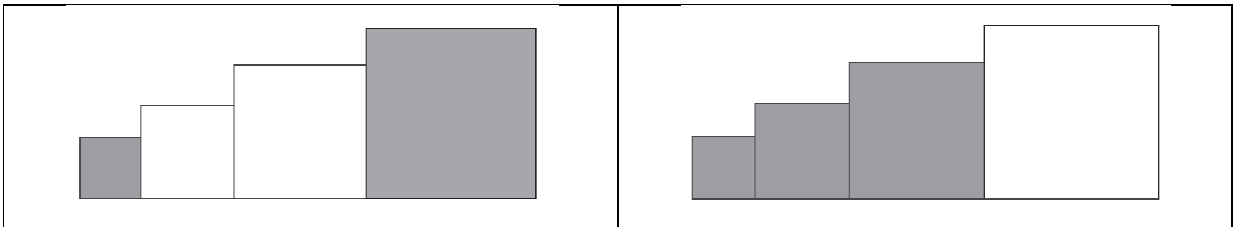
La copie d'écran ci-dessous fait apparaître une partie des représentations graphiques de ces deux fonctions, obtenues à l'aide d'un logiciel.



1. Déterminer graphiquement, si la situation des sept carrés semble avoir des solutions.
2. Vérifier si la ou les solutions trouvées conviennent.

D. Situation des quatre carrés

Avec quatre carrés ayant des côtés de mesures entières et consécutives, on peut envisager au moins deux cas :



cas 1	cas 2

On cherche à savoir si, dans chacun de ces cas, il est possible que l'aire de la surface grise soit égale à l'aire de la surface blanche.

On utilise pour cela un tableur. On donne ci-dessous les copies d'écran des feuilles de calcul obtenues lors de cette recherche.

Copies d'écran :

	A	B	C	D	E	F	G
1	coté du plus petit carré	aire du premier carré	aire du 2ème carré	aire du 3ème carré	aire du 4ème carré	aire de la partie grise	aire de partie blanche
2	**1**	**1**	**4**	**9**	**16**	17	13
3	**50**	**2500**	**2601**	**2704**	**2809**	5309	5305
4	**100**	**10000**	**10201**	**10404**	**10609**	20609	20605
5	**700**	**490000**	**491401**	**492804**	**494209**	984209	984205
6	**1000**	**1000000**	**1002001**	**1004004**	**1006009**	2006009	2006005
7	**2000**	**4000000**	**4004001**	**4008004**	**4012009**	8012009	8012005
8	**50000**	**2500000000**	**2500100001**	**2500200004**	**2500300009**	5000300009	5000300005
9	**100000**	**10000000000**	**10000200001**	**10000400004**	**10000600009**	20000600009	20000600005
10							

Feuille de calcul A

	A	B	C	D	E	F	G
1	coté du plus petit carré	aire du premier carré	aire du 2ème carré	aire du 3ème carré	aire du 4ème carré	aire de la partie grise	aire de partie blanche
2	**1**	**1**	**4**	**9**	**16**	14	16
3	**2**	**4**	**9**	**16**	**25**	29	25
4	**3**	**9**	**16**	**25**	**36**	50	36
5	**4**	**16**	**25**	**36**	**49**	77	49
6	**5**	**25**	**36**	**49**	**64**	110	64
7	**6**	**36**	**49**	**64**	**81**	149	81
8	**7**	**49**	**64**	**81**	**100**	194	100
9	**8**	**64**	**81**	**100**	**121**	245	121
10							

Feuille de calcul B

1. Quelle feuille correspond à chacun des deux cas ? Justifier la réponse.
2. Pour la feuille de calcul A :
   a. Quelle formule étirable vers le bas a-t-on pu saisir dans la cellule E2 pour calculer l'aire du quatrième carré à partir de la valeur saisie dans la cellule A2 ?
   b. Quelle formule étirable vers le bas a-t-on pu saisir dans la cellule F2 pour calculer l'aire de la partie grise ?
3. Pour chaque cas, quelle conjecture, sur les solutions du problème, la copie d'écran de la feuille de calcul permet-elle d'émettre ? Justifier la réponse.
4. Démontrer que dans les deux cas, la « situation des quatre carrés » n'admet pas de solution.

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1 :

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de points.

1. Les tableaux ci-dessous résument les productions par deux sociétés de deux types de tablettes : la tablette Electrix et la tablette Tronix.

Société 1

	Nombre de tablettes fabriquées par jour	Pourcentage moyen de tablettes défectueuses
Electrix	2000	5 %
Tronix	7000	2 %

Société 2

	Nombre de tablettes fabriquées par jour	Pourcentage moyen de tablettes défectueuses
Electrix	6000	3 %
Tronix	1000	2 %

Affirmation 1 : Pour l'ensemble des tablettes produites, la société 1 a le pourcentage d'appareils défectueux le plus faible.

2. On sait que l'aire d'un cube est égale à la somme des aires des faces qui le constituent.
Affirmation 2 : Le volume d'un cube est proportionnel à son aire.

3. Un récupérateur d'eau de pluie contient 0,3 m^3 d'eau.
Pour arroser un potager il faut 15 L d'eau par m².
Affirmation 3 : Avec l'eau du récupérateur, on peut arroser quatre fois un potager de 5 m².

4. $A = 7 + \frac{2}{10}$
Affirmation 4 : La partie décimale de A² est $\frac{4}{100}$.

EXERCICE 2 :

1. Inès a lancé 200 fois un dé équilibré à 6 faces et a collecté ses résultats dans un tableau :

Nombre affiché sur la face	1	2	3	4	5	6
Nombre d'apparitions	30	41	32	28	31	

a. Combien de fois a-t-elle obtenu 6 ?
b. Quelle est, en pourcentage, la fréquence d'apparition du « 1 » ?

2. Inès lance cette fois deux dés équilibrés à 6 faces.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à 9 ?
b. Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est égal à 12 ?

EXERCICE 3 :

Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

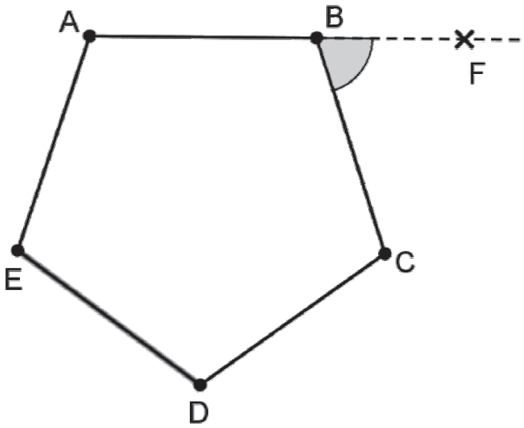
Au cours de cet exercice, on pourra utiliser le résultat admis suivant : « La somme des mesures en degré des angles d'un polygone régulier à n côtés vaut $180n - 360$. »

1. Déterminer, sans justifier, la nature des deux figures tracées lorsqu'on exécute le **programme A et le programme B**

Programme A

Programme B

2. On considère le pentagone régulier ABCDE ci-dessous. F est un point de la droite (AB) n'appartenant pas à la demi-droite [BA).



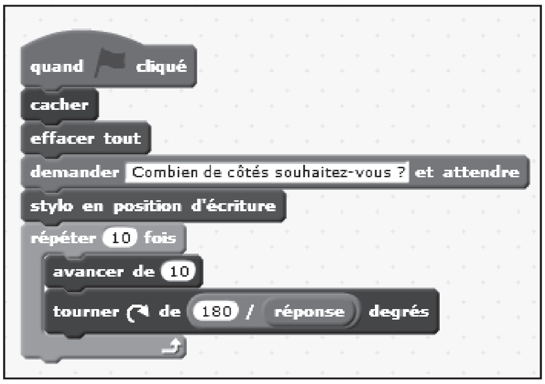
a. Démontrer que $\widehat{FBC} = 72$ °.

b. En déduire les modifications à apporter au **programme A** pour que la figure tracée soit un pentagone régulier.

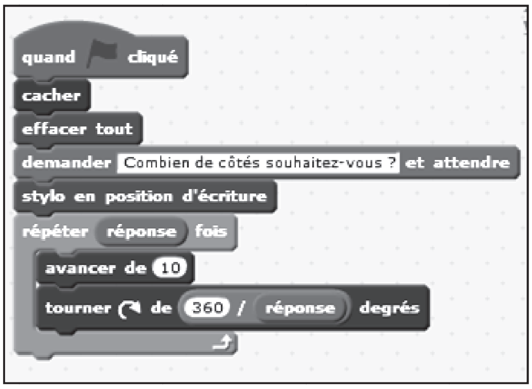
Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout polygone régulier, l'angle $\widehat{FBC}$ est égal à 360 divisé par le nombre de côtés de ce polygone.

3. On souhaite maintenant réaliser un **programme** qui, lorsqu'on l'exécute, permet d'obtenir le tracé d'un polygone régulier dont le nombre de côtés est choisi par l'utilisateur. Voici les programmes élaborés par quatre élèves.

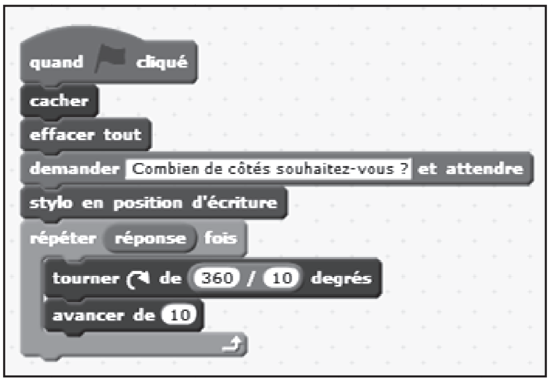
Lequel de ces quatre programmes permet de réaliser le tracé souhaité ? Préciser pourquoi les autres ne conviennent pas.



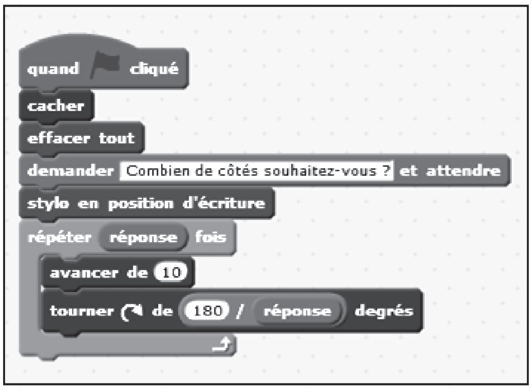
Programme 1



Programme 2



Programme 3



Programme 4

<u>Rappel</u> :
Une fois que l'utilisateur a répondu à la question « Combien de côtés souhaitez-vous ? », la valeur indiquée est stockée dans la variable réponse *.*

4. Le programme Scratch ne permet pas de tracer facilement un cercle. Comment peut-on utiliser le travail mené dans cet exercice pour construire, avec Scratch, une figure ayant l'apparence d'un cercle à l'écran ?

TROISIÈME PARTIE (14 points)

SITUATION 1 :

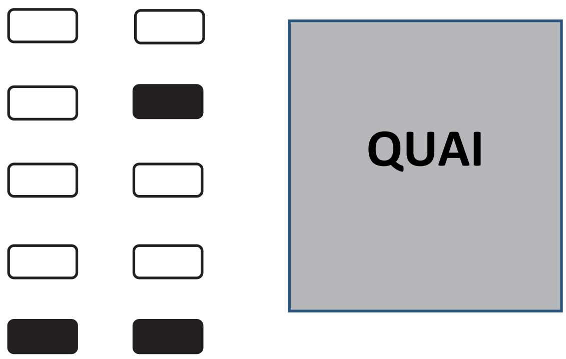
Dans une classe de maternelle, une enseignante donne à un groupe d'élèves la consigne suivante :

« Vous devez aller chercher des voyageurs pour remplir le petit train, pas un de plus, pas un de moins. Vous poserez les voyageurs sur le quai. »

<u>Matériel</u> :

- des jetons représentant les voyageurs (ils sont placés dans une boîte éloignée dans un coin de la classe) ;
- un support pour chaque élève représentant des places libres ou occupées ;
- une partie libre (le quai) sur lequel seront posés les voyageurs rapportés avant validation.

Le premier support proposé compte 7 places vides (blanches) et 3 places occupées (noires). Les places vides peuvent être organisées de différentes façons. Les élèves devront déposer les voyageurs sur le quai (zone grisée) avant de les faire monter à bord.



L'élève A a effectué deux voyages. Au premier voyage, il ramène une dizaine de jetons et au second il rapporte les jetons en trop ;

L'élève B a effectué un voyage, il revient très rapidement avec 7 jetons ;

L'élève C a effectué sept voyages, rapportant un seul jeton à la fois ;

L'élève D a effectué un voyage. Il revient avec 4 jetons dans une main et 3 jetons dans l'autre main.

1. Quel usage du nombre est mobilisé dans cette situation ?

2. Quel est l'intérêt du quai ?

3. Au regard des acquis liés à la notion du nombre, analyser les procédures mises en œuvre par chacun des élèves.

4. Proposer deux modifications de la tâche, que l'enseignant peut proposer pour amener les élèves A ou C à progresser dans leur utilisation du nombre ?

SITUATION 2 :

Un enseignant propose deux calculs à effectuer en ligne à des élèves de cycle 3 et relève quatre productions.

Calcul 1 : L'enseignant écrit au tableau : 12,42 – 6,8 et dit aux élèves : « Calculer la différence, entre 12 unités et 42 centièmes et 6 unités et 8 dixièmes ».	
Elève 1 : 12,42 – 6,8 = 6,42 – 0,8 = 6 – 0,38 = 5,62	**Elève 2 :** 12 unités et 42 centièmes moins 6 unités et 8 dixièmes = 1242 centièmes moins 68 dixièmes = 1242 centièmes moins 680 centièmes 1242 – 680 = 1262 – 700 = 562 Résultat : 562 centièmes

Calcul 2 : Calculer le produit de 15 par 0,24	
Elève 3 : 15 × 0,24 = 2,4 + 1,2 = 3,6	**Elève 4 :** 15 × 24 centièmes = 300 centièmes + 60 centièmes = 360 centièmes

1. Pour chaque calcul, analyser les productions des élèves au regard des connaissances mobilisées sur les nombres et sur les propriétés des opérations.

2. Pour chaque calcul, préciser ce qui distingue les productions des deux élèves.

SITUATION 3 :

Un professeur d'une classe de cycle 3 propose les trois exercices suivants, dans cet ordre, à ses élèves.

> Exercice 1
>
> Un livre de cuisine indique que, pour faire de la crème brulée, il faut 6 œufs si la recette est prévue pour 9 personnes et 10 œufs si la recette est prévue pour 15 personnes.
>
> Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette crème brulée pour 24 personnes ?
> J'ai chez moi tous les ingrédients dont j'ai besoin.

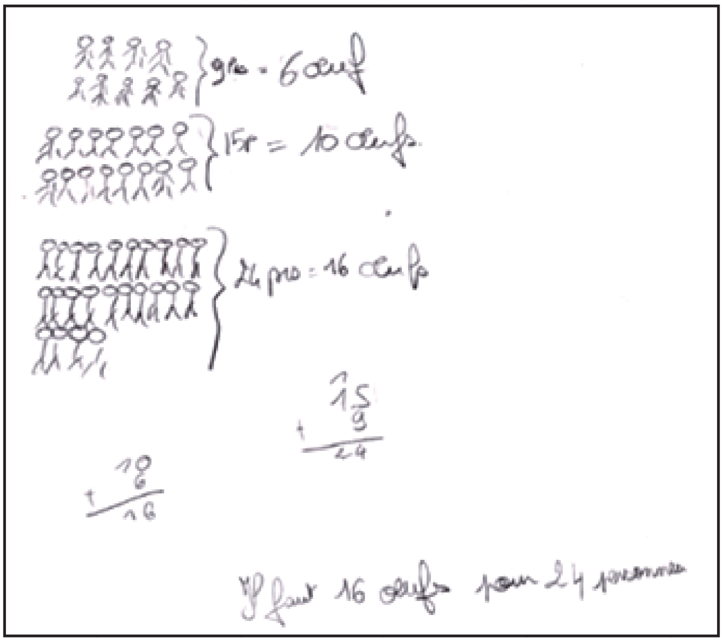
Élève A

Pour 24 personne il faut 16 oeufs.

~~Il faut faire une division~~ Il faut faire des additions

9 + 15 = 24 10 + 6 = 16

Élève B



Exercice 2

Il faut 6 œufs pour faire une crème au caramel pour 10 personnes.

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette crème au caramel pour 15 personnes ?

J'ai chez moi tous les ingrédients dont j'ai besoin.

Élève C

6 oeuf pour 10 personnes
9 oeuf pour 15 personnes

3+3+3=9
œuf

il faut 9 oeuf pour 15 personnes.

Exercice 3

Il faut 5 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 10 personnes.

J'ai 3 œufs. Pour combien de personnes puis-je faire une mousse au chocolat ?

J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

Élève D

1 oeuf = 2 personnes. 3X2=6

On peut faire une mousse au chocolat pour 6 personnes

1. Quelle est la notion du programme que ces exercices permettent principalement de travailler ?

2. Analyser les productions des élèves A, B, C et D en indiquant le type de procédures utilisées.

3. Montrer en quoi les différences entre les trois énoncés permettent une progressivité dans l'apprentissage de la notion.

4. Proposer un exercice qui permettrait, en deuxième moitié de cycle 3, de poursuivre l'apprentissage de la notion travaillée.